DOMANDA D'ESAME 26/09/2022

Dato il sistema LTI autonomo

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix}$$

si vuole determinare la sua descrizione a segnali campionati nei 2 casi:

(a) $\Delta = 10 \text{ s}$

(b) $\Delta = \frac{1}{10} \text{ s}$

Commentare i risultati ottenuti.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ +1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \lambda^2 + 1$$

$$\lambda_{1,2} = \pm j$$

2 autovalori distinti $\rightarrow \exists$ forma diagonale

$\exists\, T : \quad A = T D T^{-1}$

$$D = \begin{bmatrix} +j & 0 \\ 0 & -j \end{bmatrix}$$

NB T è a valori complessi!

$$e^{A\Delta} = \mathcal{L}^{-1}\left\{ (sI - A)^{-1} \right\}_{t=\Delta}$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & +1 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2+1} \begin{bmatrix} s & -1 \\ +1 & s \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{s}{s^2+1} & -\frac{1}{s^2+1} \\ \frac{1}{s^2+1} & \frac{s}{s^2+1} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{\cdot\} = \begin{bmatrix} \cos(t)\cdot 1(t) & -\operatorname{sen}(t)\cdot 1(t) \\ \operatorname{sen}(t)\cdot 1(t) & \cos(t)\cdot 1(t) \end{bmatrix}$$

NB le componenti di e^{At} sono segnali a pulsazione $\Omega = 1$ rad/s !

Posso già concludere che:

(a) $\Delta = 10$ s $\Longleftrightarrow$ $\Omega_s^{(a)} = \frac{2\pi}{10} = \frac{\pi}{5}$ (<1)

(b) $\Delta = \frac{1}{10}$ s $\Longleftrightarrow$ $\Omega_s^{(b)} = \frac{2\pi}{1/10} = 20\pi$ $(>2$

Per il Teorema di Nyquist-Shannon deve essere $\Omega_s > 2$ rad/s

In conclusione

(a) c'è aliasing

(b) non c'è aliasing

Per i valori numerici:

(a)

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos(10) & -\operatorname{sen}(10) \\ \operatorname{sen}(10) & \cos(10) \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} -0{,}8391 & +0{,}5440 \\ -0{,}5440 & -0{,}8391 \end{bmatrix}$$

(b)

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{1}{10}\right) & -\operatorname{sen}\left(\frac{1}{10}\right) \\ \operatorname{sen}\left(\frac{1}{10}\right) & \cos\left(\frac{1}{10}\right) \end{bmatrix}$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 0{,}9950 & -0{,}0998 \\ 0{,}0998 & 0{,}9950 \end{bmatrix}$$