PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2018/2019

7 giugno 2019

nome e cognome:
numero di matricola:

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Soluzione Es. 1.1.

Domanda 1.2

Si consideri il seguente sistema dinamico lineare **a tempo continuo**:

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= -x_1(t) + 8\,x_2(t) + 3\,u_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= -x_2(t) + u_2(t) \\
y(t) &= 3\,x_1(t) + 12\,x_2(t) + u_1(t) - u_2(t)
\end{aligned}
$$

Lo si vuole discretizzare per campionamento (con la *tecnica di campionamento e tenuta*), utilizzando il valore 1 s per il periodo di campionamento.
Determinare le matrici A, B, C e D della descrizione a segnali campionati del sistema.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 12 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 3 & 12 \end{bmatrix} \qquad D = \begin{bmatrix} +1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$p_A(\lambda) = (\lambda+1)^2 \Longleftrightarrow \lambda_1 = -1$$

molteplicità algebrica 2

$$\text{rank}\left[A - \lambda_1 I\right] = \text{rank}\begin{bmatrix} 0 & 8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 1$$

molteplicità geometrica 1

$\nexists$ forma diagonale per A
(serve forma di Jordan)

$$A_d = e^{A\Delta} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\}_{t=\Delta}$$

$$(sI-A) = \begin{bmatrix} (s+1) & -8 \\ 0 & (s+1) \end{bmatrix}$$

$$(sI-A)^{-1} = \frac{1}{(s+1)^2}\begin{bmatrix} s+1 & 8 \\ 0 & s+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s+1} & \frac{8}{(s+1)^2} \\ 0 & \frac{1}{s+1} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\{\cdot\} = \begin{bmatrix} e^{-t}\cdot 1(t) & 8t\cdot e^{-t}\cdot 1(t) \\ 0 & e^{-t}\cdot 1(t) \end{bmatrix}$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} e^{-\Delta} & 8\Delta e^{-\Delta} \\ 0 & e^{-\Delta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{e} & 8\cdot\frac{1}{e} \\ 0 & \frac{1}{e} \end{bmatrix}$$

$$\Delta = 1$$

$$\simeq \begin{bmatrix} 0{,}368 & 2{,}943 \\ 0{,}000 & 0{,}368 \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \int_0^{\Delta} e^{A\tau} B \, d\tau = A^{-1}\left[e^{A\Delta} - I\right] B$$

utilizzo questa espressione dato che $\exists \, A^{-1}$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ -8 & -1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$\det A = +1$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & -8 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (e^{-\Delta} - 1) & 8\Delta e^{-\Delta} \\ 0 & (e^{-\Delta} - 1) \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_d \simeq \begin{bmatrix} 1{,}896 & 2{,}114 \\ 0{,}000 & 0{,}632 \end{bmatrix}$$