PROVA SCRITTA DI SISTEMI DINAMICI
A.A. 2018/2019

1 luglio 2019

nome e cognome:

numero di matricola:

Note: Scrivere le risposte negli spazi appositi. Non consegnare fogli aggiuntivi. La chiarezza e precisione nelle risposte sarà oggetto di valutazione.

Soluzione Es. 1.1

Esercizio 1

Si consideri il seguente **sistema dinamico a tempo continuo** descritto dalle equazioni:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u(t) \\ \\ y(t) & = & \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} x(t) \end{cases}$$

Domanda 1.1

Determinare le equazioni di stato del **sistema discretizzato**, con periodo di campionamento $\Delta = 0.1\,\mathrm{s}$

$$\begin{cases} x(k+1) & = & A_d x(k) + B_d u(k) \\ \\ y(k) & = & C_d\, x(k) + D_d u(k) \end{cases}$$

$\Delta = \frac{1}{10}$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

NB $\nexists A^{-1}$

$$B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad D = [0]$$

$$A_d = e^{A\Delta} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI - A)^{-1}\right\}_{t=\Delta}$$

$$B_d = \int_0^{\Delta} e^{A\tau} B \, d\tau \qquad C_d \equiv C \qquad D_d \equiv D$$

se $\exists A^{-1} \Rightarrow B_d = A^{-1}\left[e^{A\Delta} - I\right]B$

In questo caso **NON** si può utilizzare questo risultato!

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad p_A(\lambda) = \lambda^2 \qquad \underset{(2)}{\lambda} = 0$$

autovalore $\bar{\lambda} = 0$ molteplicità algebrica 2

$$\text{rank}\left[A - \bar{\lambda} I\right] = 1 \iff \dim\left\{\ker\left(A - \bar{\lambda} I\right)\right\} = 1$$

$1 \iff$ molteplicità geometrica di $\bar{\lambda}$

Molteplicità geometrica ed algebrica diverse $\rightarrow$

$\rightarrow$ matrice NON diagonalizzabile!

Rimane $\quad e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left[(sI - A)^{-1}\right]$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ -1 & s \end{bmatrix}$$

$$(sI - A)^{-1} = \frac{1}{s^2}\begin{bmatrix} s & 0 \\ 1 & s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ \frac{1}{s^2} & \frac{1}{s} \end{bmatrix}$$

$$e^{At} = \mathcal{L}^{-1}\left\{(sI-A)^{-1}\right\} = \begin{bmatrix} 1(t) & 0 \\ t\cdot 1(t) & 1(t) \end{bmatrix}$$

$$A_d = e^{A\Delta} = \begin{bmatrix} 1(\Delta) & 0 \\ \Delta\cdot 1(\Delta) & 1(\Delta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{10} & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_d = \int_0^{\Delta} e^{A\tau} B \, d\tau = \int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} 1(\tau) & 0 \\ \tau\cdot 1(\tau) & 1(\tau) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} d\tau$$

$$= \int_0^{\Delta} \begin{bmatrix} 1(\tau) \\ \tau\cdot 1(\tau) \end{bmatrix} d\tau = \begin{bmatrix} \tau\cdot 1(\tau) \\ \frac{1}{2}\tau^2\cdot 1(\tau) \end{bmatrix}\Bigg|_{\tau=\Delta} - 0$$

$$B_d = \begin{bmatrix} \Delta \\ \frac{1}{2}\Delta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/10 \\ 1/200 \end{bmatrix}$$