

Stimatori campionari

di valore atteso,

varianza,

coerenza

di una variabile aleatoria

Stima campionaria

del valore atteso

di una variabile aleatoria

variable aleatoria X

$$E(X) = \mu_x$$

$$\text{var}(X) = E(X - \mu_x)^2 = E(X^2) - \mu_x^2 = \sigma_x^2$$

Sono state compiute N osservazioni e
sono stati raccolti N campioni

$$x(1) \quad x(2) \quad x(3) \quad \dots \quad x(N)$$

Stima del valore atteso

$$\hat{\mu} = ?$$

media aritmetica
delle osservazioni

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)$$

stimatore non polarizzato [fig. 4.6-p.24]

Stima campionaria
della varianza di una
variabile casuale

v.a. X

$$E(X) = \mu_x$$

$$\text{var}(X) = \sigma_x^2 = E(X - \mu_x)^2$$

observation $\rightarrow x(1) \ x(2) \ x(3) \ \dots \ x(N)$

$$\hat{\sigma}_x^2 = ?$$

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N x(k)$$

I° formulazione

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{\mu})^2$$

lo stimatore $\hat{\sigma}_x^2$ è polarizzato

$$E[\hat{\sigma}_x^2] = E\left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{\mu})^2\right]$$
$$= E\left\{\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [x^2(k) - 2\hat{\mu}x(k) + \hat{\mu}^2]\right\} =$$

$$\begin{aligned}
 E(\tilde{\sigma}_x^2) &= E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^2(k) + \right. \\
 &\quad \left. - 2\hat{\mu} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(k) + \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\mu}^2 \right\} = \\
 &= E \left\{ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x^2(k) - \hat{\mu}^2 \right\} = \rightarrow
 \end{aligned}$$

An orange arrow points from the symbol $\hat{\mu}$ to the term $-2\hat{\mu} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x(k)$. A blue line connects the $\tilde{\sigma}_x^2$ in the first line to the final expression.

$$E(\hat{\sigma}_x^2) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N E(x^2(k)) - E(\hat{\mu}^2)$$

$$\hat{\sigma}_x^2 = E(x^2) - [E(x)]^2 = E(x^2) - \mu_x^2$$

$$E(x^2) = \hat{\sigma}_x^2 + \mu_x^2$$

$$E(\hat{\mu}^2) = E\left\{ \frac{1}{N^2} \left[\sum_{k=1}^N x(k) \right]^2 \right\} = \rightarrow$$

$$E(\hat{\mu}^2) = [E(\hat{\mu})]^2 + \text{var}(\hat{\mu})$$

$\hat{\mu}$ e' v.a.

$$E(\hat{\mu}) = \mu$$

se
osservazioni
complete

$$\frac{\sigma_x^2}{N}$$

[di (6-p24 e p25)]

$$E(\hat{\mu}^2) = \mu^2 + \frac{\sigma_x^2}{N}$$

$$E(\tilde{\sigma}_x^2) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\sigma_x^2 + \mu_x^2) - \mu_x^2 - \frac{1}{N} \sigma_x^2$$

$$= \frac{N-1}{N} \sigma_x^2 + \cancel{\mu_x^2} - \cancel{\mu_x^2}$$

$$E(\tilde{\sigma}_x^2) = \frac{N-1}{N} \sigma_x^2 \quad \text{bias!}$$

$$E(\tilde{\sigma}_x^2) = \frac{N-1}{N} \sigma_x^2 \quad (< \sigma_x^2)$$

Stimuliere von pleitoto

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{\mu})^2$$

Ansatz:

$$\hat{\sigma}_x^2 = \frac{N}{N-1} \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N (x(k) - \hat{\mu})^2$$

$$\hat{\sigma}_x^2$$

$$E(\hat{\sigma}_x^2) = \frac{N}{N-1} E(\hat{\sigma}_x^2) = \frac{N}{N-1} \cdot \frac{N-1}{N} \sigma_x^2 = \sigma_x^2$$

Stima campionaria
della covarianza

tra 2 variabili aleatorie

X v. r.

$$E(X) = \mu_x \quad \text{var}(X) = \sigma_x^2$$

Y v. r.

$$E(Y) = \mu_y \quad \text{var}(Y) = \sigma_y^2$$

$$\sigma_{xy} \equiv E[(X - \mu_x)(Y - \mu_y)]$$

$$s_{xy} = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^N (x(k) - \bar{x})(y(k) - \bar{y})$$

non polarizzato

Stima campionaria
della funzione
di cross-correlazione

X v. a. di processo stocastico stazionario
con $E(X) = 0$

Y v. a. di processo stocastico stazionario
con $E(Y) = 0$

$$\gamma_{xy}(\tau) \triangleq E[X(t) \cdot Y(t+\tau)]$$

Stimatore non polarizzato

$$\hat{\gamma}_{xy}^{\wedge}(k) = \frac{1}{N-|k|} \sum_{i=1}^{N-|k|} x(i) y(i+k)$$

$$|k| \ll N$$

dato una realizzazione con N
campioni x ed y