Esercizio:

Stima di Bayes

x, w v.a. incorrelate

$E(x) = 0 = E(w)$ $\qquad$ $\sigma_x^2 = 1 = \sigma_w^2$

Si può osservare v.a. y MA NON x

Tra le v.a. esiste il legame

$$y = x + w$$

$\hat{x} \leftarrow$ stimatore lineare ottimo di x in base alla osservazione di y

---

$E(y) = ?$ $\qquad$ $\sigma_y^2 = ?$ $\qquad$ $\sigma_{xy} = ?$

$E(x) = E(w) = 0 \Rightarrow E(y) = E(x) + E(w) = 0$

$\sigma_{xw} = 0 \Longrightarrow \sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_w^2 = 2$

Stima di Bayes

$E(\vartheta d)$ $\qquad$ osservo questo

$E(\theta) = E(d) = 0$ $\qquad$ $\hat{\vartheta} = \dfrac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} d$ $\qquad$ $\lambda_{dd} \to E(d^2) = \sigma_d^2$

voglio conoscere il valore ATTUALE di θ MA non è accessibile

Allora uso lo stimatore di Bayes

Nel caso considerato $\vartheta \leftarrow x$

$d \leftarrow y$

quindi servono

$\sigma_y^2 = \alpha_{yy} = 2$ ← già calcolato

$\sigma_{xy} = \alpha_{xy} = E(xy) = ?$ $y = x + w \Rightarrow x = y - w$

$$E(xy) = E\left[x(x+w)\right] = \underbrace{E(x^2)}_{\sigma_x^2 = 1} + \underbrace{E(xw)}_{0 \text{ per ipotesi}} = 1 = \alpha_{xy}$$

E se utilizzassi l'altra espressione?

$$E(xy) = E\left[(y-w)y\right] = \underbrace{E(y^2)}_{\sigma_y^2 = 2} - \underbrace{E(yw)}_{?}$$

devo calcolare quanto vale $E(yw) = \alpha_{yw}$

$$\alpha_{yw} = E\left[yw\right] = E\left[(x+w)w\right] = \underbrace{E(xw)}_{0 \text{ per ipotesi}} + \underbrace{E(w^2)}_{1 \text{ per ipotesi}} = 1$$

In definitiva $E(xy) = E(y^2) - E(yw) = 2 - 1 = 1$

Ora posso determinare lo stimatore di Bayes

$$\hat{x} = \frac{\alpha_{xy}}{\alpha_{yy}} y = \frac{1}{2} y$$

La varianza della stima vale (in generale)

$$\hat{\vartheta} = \frac{\lambda_{\vartheta d}}{\lambda_{dd}} \cdot d \qquad var(\vartheta - \hat{\vartheta}) = \lambda_{\vartheta\vartheta} - \frac{\lambda_{\vartheta d}^2}{\lambda_{dd}}$$

quindi nel caso considerato

$$var(X - \hat{X}) = \lambda_{XX} - \frac{\lambda_{xy}^2}{\lambda_{yy}} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

L'osservazione di w potrebbe migliorare la stima $\hat{x}$?

In realtà NO perché x, w sono incorrelate $\quad \lambda_{xw} = 0$

Supponiamo di poter disporre di 2 osservazioni, ciascuna di 1 v. a.

$$y_1 = x + w \qquad\qquad x, w \text{ v.a. incorrelate}$$

$$y_2 = 2x \qquad\qquad E(x) = E(w) = 0$$

$$\sigma_x^2 = \sigma_w^2 = 1$$

Determinare $\hat{x}$ stimatore lineare ottimo di Bayes utilizzando il vettore di osservazioni

$$\hat{\vartheta} = h^\circ(d) \longleftarrow d = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

Stavolta $\vartheta \in \mathbb{R}$ ma $d \in \mathbb{R}^2$

$$d = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \Rightarrow \Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} \sigma_{y_1}^2 & \sigma_{y_1 y_2} \\ \sigma_{y_1 y_2} & \sigma_{y_2}^2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{d\vartheta} = E[d\vartheta] = \begin{bmatrix} E(y_1 x) \\ E(y_2 x) \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{\vartheta d} = \Lambda_{d\vartheta}^T$$

$$d = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} \sigma^2_{y_1} & \sigma_{y_1 y_2} \\ \sigma_{y_2 y_1} & \sigma^2_{y_2} \end{bmatrix}$$

$y_1 = x + w$

$y_2 = 2x$

$\sigma^2_{y_1} = 2$ ← già calcolato in precedenza

$\sigma^2_{y_2} = E(y_2^2)$ ← infatti $E(y_2) = E(2x) = 2E(x) = 0$

$= E(4x^2) = 4E(x^2) = 4$

$\sigma_{y_1 y_2} = E[y_1 \cdot y_2] = E[(x+w)2x] = E[2x^2 + 2xw] =$

$= 2\underbrace{E(x^2)}_{=1} + 2\underbrace{E(xw)}_{=0} = 2$

Ovviamente $\sigma_{y_2 y_1} = \sigma_{y_1 y_2} = 2$

In definitiva:

$$\Lambda_{dd} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \qquad \Lambda^{-1}_{dd} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_{d\vartheta} = \begin{bmatrix} E(y_1 x) \\ E(y_2 x) \end{bmatrix}$$

$E(y_1 x) = 1$ ← già calcolato in precedenza

$E(y_2 x) = E(2x^2) = 2\underbrace{E(x^2)}_{=1} = 2$

Quindi

$$\Lambda_{d\vartheta} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \Lambda_{\vartheta d} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, lo stimatore è

$$\hat{\vartheta} = \Lambda_{\vartheta d} \cdot \Lambda_{dd}^{-1} \cdot d$$

cioè:

$$\hat{x} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 - \frac{1}{2} y_2 \\ -\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2 \end{bmatrix}$$

$$= y_1 - \frac{1}{2} y_2 + 2\left(-\frac{1}{2} y_1 + \frac{1}{2} y_2\right) = \frac{1}{2} y_2$$

La varianza della stima vale

$$\mathrm{var}\left(x - \hat{x}\right) = \Lambda_{xx} - \Lambda_{xd} \Lambda_{dd}^{-1} \Lambda_{dx}$$

$$= 1 - \begin{bmatrix} 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$= 1 - 1 = 0 \leftarrow \text{N3}$$