

ANOMALIA in $d=2$

Consideriamo $\mathcal{L} = i\bar{\Psi}\not{\partial}\Psi - m\bar{\Psi}\Psi$, ma in $d=2$.

$$\text{In } d=2 \quad \gamma^0 = \sigma^2 \quad \gamma^1 = -i\sigma^1 \quad \{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu}$$
$$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma^3 \quad \gamma_5^2 = \mathbb{1} \quad \gamma_5^\dagger = \gamma_5 \quad \{\gamma_5, \gamma^\mu\} = 0$$

C'è una simmetria $U(1)_V \times U(1)_A$
 \uparrow
simmetria solo se $m=0$

↳ (quando $m=0$) abbiamo le seguenti identità di Ward

$$\partial_\mu^x \langle j^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = 0$$

$$\partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x) j^\nu(0) \rangle = \partial_\mu^x \langle j^\mu(x) j_A^\nu(0) \rangle = 0 \quad (*)$$

$$\partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x) j_A^\nu(0) \rangle = 0$$

↳ verifichiamo queste relazioni calcolando esplicitamente i correlatori.

(le id. di Ward in tutti gli altri correlatori sono soddisfatte)

In $d=2$ i tre tipi di correlatori in (*) sono legati da una semplice relazione:

$$\gamma_5 \gamma^\mu = \begin{cases} \gamma^1 & \mu=0 \\ \gamma^0 & \mu=1 \end{cases} = -\epsilon^{\mu\nu} \gamma_\nu$$

$$-\epsilon_{01} = 1 = +\epsilon^{01}$$

$$-\epsilon_{10} = -1 = +\epsilon^{10}$$

$$\gamma^0 = \sigma^2 \quad \gamma^1 = -i\sigma^1$$

$$\gamma_5 = -\gamma^0\gamma^1 = \sigma^3$$

$$\epsilon^{\mu\nu} \epsilon_{\nu\sigma} = \delta^\mu_\sigma$$

$$\Rightarrow j_A^\mu = \bar{\Psi} \gamma^\mu \gamma_5 \Psi = \epsilon^{\mu\nu} \bar{\Psi} \gamma_\nu \Psi = \epsilon^{\mu\nu} j_\nu$$

$$\Rightarrow \langle j_A^\mu j^\nu \rangle = \epsilon^{\mu\sigma} \langle j_\sigma j^\nu \rangle$$

$$\langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle = \epsilon^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\sigma} \langle j_\sigma j_\sigma \rangle$$

→ ci basta calcolare il correl tra due correnti vettoriali.

$T^{\mu\nu} =$ Trasf. di Fourier di $\langle j^\mu(x) j^\nu(0) \rangle :$

(Reintroduciamo $m \neq 0$ in il momento, per prendere il lim $m \rightarrow 0$)

Diagram showing a fermion loop with external momenta q and q (incoming and outgoing), and internal momenta $p+q/2$ and $p-q/2$. The loop contains two fermion lines with vertices γ^μ and γ^ν .

$$\rightarrow T^{\mu\nu} = (-) i^2 \int \frac{d^2 p}{(2\pi)^2} \frac{\text{Tr}(\gamma^\mu (\not{p} + \frac{\not{q}}{2} + m) \gamma^\nu (\not{p} - \frac{\not{q}}{2} + m))}{((p+q/2)^2 - m^2 + i\epsilon)((p-q/2)^2 - m^2 + i\epsilon)}$$

Below the diagram, the propagator is shown as $\frac{i}{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} - m} = i \frac{\not{p} - \frac{\not{q}}{2} + m}{(p - \frac{q}{2})^2 - m^2}$.

-) c'è una divergenza logaritmica in $p \rightarrow \infty$
 \rightarrow c'è necessità di REGOLARIZZAZIONE

Si vede anche che se aggiungo un'altra inserzione di corrente, integrale converge \Rightarrow è soddisfatta

•) $\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu) = \frac{1}{2} \text{Tr}(2\eta^{\mu\nu} \mathbb{1}_2) = 2\eta^{\mu\nu}$

$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^s \gamma^\nu) = \text{Tr}(\gamma_s^2 \gamma^\mu \gamma^s \gamma^\nu) = -\text{Tr}(\gamma_s \gamma^\mu \gamma^s \gamma^\nu \gamma_s) =$
 $= -\text{Tr}(\gamma_s \gamma_s \gamma^\mu \gamma^s \gamma^\nu) \Rightarrow = 0$
cic. traccia

$\text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^s \gamma^\nu \gamma^0) = -\text{Tr} \gamma^\mu \gamma^s \gamma^0 \gamma^\nu + 2\eta^{\nu 0} \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^s) =$
 $= \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^0 \gamma^s \gamma^\nu - 2\eta^{s0} \text{Tr} \gamma^\mu \gamma^\nu + 2\eta^{\nu 0} 2\eta^{\mu s} =$
 $= -\text{Tr} \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^s \gamma^\nu + 4\eta^{\mu s} \eta^{\nu 0} - 4\eta^{s0} \eta^{\mu\nu} + 4\eta^{\nu 0} \eta^{\mu s}$
 $\Rightarrow \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^s \gamma^\nu \gamma^0) = 2\eta^{\mu s} \eta^{\nu 0} - 2\eta^{s0} \eta^{\mu\nu} + 2\eta^{\nu 0} \eta^{\mu s}$

$\rightarrow \text{Tr}(\gamma^\mu (\not{p} + \frac{\not{q}}{2} + m) \gamma^\nu (\not{p} - \frac{\not{q}}{2} + m)) = (p^s + \frac{q^s}{2})(p^\sigma - \frac{q^\sigma}{2}) \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^s \gamma^\nu \gamma^0) + m^2 \text{Tr}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$

$= \frac{1}{2} (2p^s + q^s)(2p^\sigma - q^\sigma) (\eta^{\mu s} \eta^{\nu 0} - \eta^{s0} \eta^{\mu\nu} + \eta^{\nu 0} \eta^{\mu s}) + 2m^2 \eta^{\mu\nu}$
 $= \frac{1}{2} \left\{ (2p^\nu + q^\nu)(2p^\mu - q^\mu) - \underbrace{(2p+q) \cdot (2p-q)}_{4p^2 - q^2} + (2p^\mu + q^\mu)(2p^\nu - q^\nu) \right\} + 2m^2 \eta^{\mu\nu}$

$$= 4p^\mu p^\nu - q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu} \left(-2p^2 + \frac{q^2}{2} + 2m^2 \right)$$

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 p \frac{2 \left(2p^\mu p^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu} \left(-p^2 + \frac{q^2}{4} + m^2 \right) \right)}{\left(\left(p + \frac{q}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right) \left(\left(p - \frac{q}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right)}$$

-) Uno potrebbe provare a moltiplicare per q_μ , portandolo dentro l'integrale. Con varie manipolazioni, incluso lo shift della variabile di integrazione, si può portare l'integrale nella forma $\int d^2 p f(p)$, con $f(-p) = -f(p)$. Qto porterebbe a concludere che $q_\mu T^{\mu\nu} = 0$. Tuttavia qte operazioni non sono lecite con un integrale divergente (sarebbe come dire $\infty - \infty = 0$).

Qte manipolazioni sono lecite se l'integrale è convergente; qto accade per $\langle j^1 \dots j^N \rangle$, il che permette di dimostrare che le WI sono soddisfatte per tali correlatori.

-) $T^{\mu\nu}$ è simmetrico in $\mu \leftrightarrow \nu$ e dip. da $\eta^{\mu\nu}$ e q^μ :

$$\rightarrow T^{\mu\nu} = q^\mu q^\nu T_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} T_2(q^2)$$

$$\text{def. } \tilde{q}^\mu \equiv \epsilon^{\mu s} q_s \quad \leftrightarrow \quad q_\rho \propto \epsilon_{s\rho} \tilde{q}^\sigma$$

$$\rightarrow T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2) \quad \epsilon_{s\rho} \tilde{q}^\sigma = \underbrace{\epsilon_{s\rho} \epsilon^{\sigma\alpha}}_{\delta_s^\alpha} q_\alpha$$

-) Mass-dim. $[T^{\mu\nu}] \stackrel{\uparrow \text{da def. } T^{\mu\nu}}{=} 0 \rightarrow [\tilde{T}_1] = -2 \quad [\tilde{T}_2] = 0$

Definiamo $T^{\mu\nu}$ usando le DISPERSION RELATIONS

$$E^{01} = 1$$

$$\tilde{q}^{\mu} \tilde{q}^{\nu} \tilde{T}_1 = \epsilon^{\mu s} q_s \epsilon^{\nu \sigma} q_{\sigma} \tilde{T}_1$$

$$\tilde{q}^{\mu} \tilde{q}^{\nu} = \begin{pmatrix} q_1 q_1 & -q_1 q_0 \\ -q_0 q_1 & q_0 q_0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \tilde{q}^2 &= \epsilon^{\mu s} q_s \epsilon^{\nu \sigma} q_{\sigma} \eta_{\mu\nu} \\ &= \epsilon^{\mu s} q_s \epsilon_{\mu\sigma} q^{\sigma} = -q^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \eta_{\mu\nu} T^{\mu\nu} &= q^2 T_1 + 2T_2 \\ &= \tilde{q}^2 \tilde{T}_1 + 2\tilde{T}_2 \\ &= -q^2 \tilde{T}_1 + 2\tilde{T}_2 \\ &= -q^2 \tilde{T}_1 + 2q^2 T_1 + 2T_2 \\ &\Rightarrow \tilde{T}_1 = T_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_{\mu} q_{\nu} T^{\mu\nu} &= (q^2)^2 T_1 + q^2 T_2 \\ &= q^2 \tilde{T}_2 \end{aligned}$$

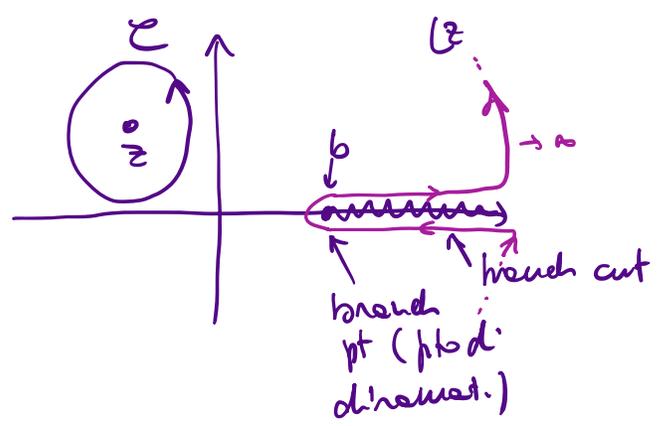
$$\rightarrow \tilde{T}_2 = q^2 T_1 + T_2$$

RELAZIONI DI DISPERSIONE

Prendiamo un'ampiezza T che sia analitica nella sua imboccatura
 ma con delle singolarità
 (poli, branch pt, ...)

$$T(q^2) \rightarrow T(z)$$

$q^2 \leftrightarrow z \in \mathbb{C}$



Consideriamo una funz. $T(z)$
 con un branch cut

Se uno vuole conoscere il valore di T in z , può usare Cauchy:

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{T(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

Deformiamo in maniera continua il contorno $C \rightarrow$ l'integrale non cambia

$$T(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{T(\zeta + i\epsilon) - T(\zeta - i\epsilon)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{T(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$$

\parallel
 $\frac{1}{2\pi i} \int_b^\infty \frac{\text{Disc } T(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad \leftrightarrow \text{ (legato a } \text{Im} T(z) \text{)}$

$\int_0^{2\pi} R d\theta \frac{T(Re^{i\theta})}{Re^{i\theta} - z}$
 $\zeta = Re^{i\theta} \quad R \rightarrow \infty$
 $R \rightarrow \infty$

questo integrale $\rightarrow 0$ se $T(R) \rightarrow 0$ per $R \rightarrow \infty$

Se $T(z) \rightarrow 0$ per $z \rightarrow \infty$, allora $T(z)$ è determinato dalla
 sue DISCONTINUITA' (cioè diff. tra $T(z)$ sopra il taglio e
 $T(z)$ sotto il taglio)

Se invece $T(z) \not\rightarrow 0$ μ $z \rightarrow \infty$, prendiamo la differenza

$$T(z) - T(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} d\zeta \text{Disc} T(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_\infty} d\zeta T(\zeta) \left(\frac{1}{\zeta - z} - \frac{1}{\zeta - z_0} \right)$$

$\frac{\zeta - z_0 - \zeta + z}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)}$

$$T(z) = T(z_0) + \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \int \frac{\text{Disc} T(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta + \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \oint_{C_\infty} \frac{T(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

\nearrow ora denominatore va come ζ^2 (invece di ζ)
 $\rightarrow 0$ μ $R \rightarrow \infty$
 se $\frac{T(R)}{R} \rightarrow 0$ μ $R \rightarrow \infty$

Se $\frac{T(R)}{R} \rightarrow 0$ μ $R \rightarrow \infty$

$$T(z) = T(z_0) + \frac{(z - z_0)}{2\pi i} \int \frac{\text{Disc} T(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

$T(z)$ è ancora determinato dalle sue Disc, una ora a meno di una COST. ARBITRARIA (regolarizzazione)

[ \rightarrow calcolo Disc \rightarrow ampiezza
 \uparrow $T(R) \neq 0$ $R \rightarrow \infty$ ma $\frac{T(R)}{R} \rightarrow 0$ $R \rightarrow \infty$
 \rightarrow cost. arbitraria \rightarrow λ]

\Rightarrow Se abbiamo un metodo per calcolare la disc. dell'ampiezza (senza calcolare prima l'ampiezza), allora siamo in grado di ricostruire l'ampiezza (a meno di cost. di normaliz.)



↳ Qto metodo è dato dalle regole di CUTKOWSKI:

prendere l'espressione dell'ampiezza (dopo aver applicato le regole di Feynman) e sostituzione di propagatori

$$\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \longrightarrow -2\pi i \delta(p^2 - m^2) \theta(p^0)$$

("mettere on-shell i propag.")

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 p \frac{2 \left(2p^\mu p^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu} \left(-p^2 + \frac{q^2}{4} + m^2 \right) \right)}{\left(\left(p + \frac{q}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right) \left(\left(p - \frac{q}{2} \right)^2 - m^2 + i\epsilon \right)} \equiv (\text{NUM})$$

$$\text{Disc } T^{\mu\nu} = \frac{1}{4\pi^2} \int d^2 p (\text{NUM}) (-2\pi i)^2 \delta\left(\left(p + \frac{q}{2}\right)^2 - m^2\right) \delta\left(\left(p - \frac{q}{2}\right)^2 - m^2\right) \cdot \theta\left(p^0 + \frac{q^0}{2}\right) \theta\left(p^0 - \frac{q^0}{2}\right)$$

Vediamo che condizioni impongono le δ -funct. su p^0 e p^1 .

→ Mettiamoci in comodità nel frame $q^\mu = (q, 0)$ ← $q \neq 0$

$$\begin{cases} \left(p^0 + \frac{q}{2}\right)^2 - (p^1)^2 - m^2 = 0 \\ \left(p^0 - \frac{q}{2}\right)^2 - (p^1)^2 - m^2 = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \left(p^0 + \frac{q}{2}\right)^2 - \left(p^0 - \frac{q}{2}\right)^2 = 0 \\ (p^1)^2 = (p^0)^2 + \frac{q^2}{4} - m^2 \end{cases} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{cases} p^0 q = 0 \\ p^1 = \pm \sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{4}} \end{cases} \leftarrow \text{due soluzioni}$$

in forma cov.

→

$$p^\mu = \pm \epsilon^{\mu\nu} q_\nu \sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{4}} = \pm \tilde{q}^\mu \sqrt{\frac{q^2 - 4m^2}{4}}$$

$$\int dp^0 dp^1 \delta(f_1(p)) \delta(f_2(p)) g(p) \neq g(p_i)$$

P_i sono soluz. di $\begin{cases} f_1(p) = 0 \\ f_2(p) = 0 \end{cases}$

$$\sum_i \frac{1}{\text{Jac}(p_i)} g(p_i)$$

↑ Jacobiano di transf. di coord da p^0, p^1 a l_1, l_2

Calcoliamo lo Jacobiano

$$(p + \frac{q}{2})^2 - u^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 + p^0 q^0 - p^1 q^1 + \frac{(q^0)^2}{4} - \frac{(q^1)^2}{4} - u^2 \leftarrow l_1$$

$$(p - \frac{q}{2})^2 - u^2 = (p^0)^2 - (p^1)^2 - p^0 q^0 + p^1 q^1 + \frac{(q^0)^2}{4} - \frac{(q^1)^2}{4} - u^2 \leftarrow l_2$$

$$\text{Jac} = \left| \det \begin{pmatrix} \frac{\partial l_1}{\partial p^0} & \frac{\partial l_1}{\partial p^1} \\ \frac{\partial l_2}{\partial p^0} & \frac{\partial l_2}{\partial p^1} \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 2p^0 + q^0 & -2p^1 - q^1 \\ 2p^0 - q^0 & -2p^1 + q^1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= \left| \det \begin{pmatrix} 4p^0 & -4p^1 \\ 2p^0 - q^0 & -2p^1 + q^1 \end{pmatrix} \right| = \left| \det \begin{pmatrix} 4p^0 & -4p^1 \\ -q^0 & q^1 \end{pmatrix} \right| =$$

$$= 4 |p^0 q^1 - p^1 q^0| = 4 |p \cdot \tilde{q}| \Rightarrow \text{Jac}(p_i) = 4 |\tilde{q} \cdot \tilde{q}| \sqrt{\frac{q^2 - 4u^2}{4q^2}}$$

sostituisco

$$p^\mu = p_i^\mu = \pm \tilde{q}^\mu \sqrt{\frac{q^2 - 4u^2}{4q^2}}$$

$$\tilde{q}^2 = -q^2 \quad (\text{vedi prossima pagina})$$

$$\text{Jac}(p_i) = 4 |q^2| \sqrt{\frac{q^2 - 4u^2}{4q^2}} =$$

$$= 2 \sqrt{4q^2 \cdot q^2 \frac{(q^2 - 4u^2)}{4q^2}} = 2 \sqrt{q^2 (q^2 - 4u^2)}$$

$$\text{NUM}(p_i) = 2 \left(2 p_i^\mu p_i^\nu - \frac{q^\mu q^\nu}{2} + \eta^{\mu\nu} \left(-p_i^2 + \frac{q^2}{4} + m^2 \right) \right) =$$

$$= 4 \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \left(\frac{q^2 - 4m^2}{4q^2} \right) - q^\mu q^\nu + 2\eta^{\mu\nu} \left(-\tilde{q}^2 \left(\frac{q^2 - 4m^2}{4q^2} \right) + \frac{q^2}{4} + m^2 \right)$$

$$\tilde{q}^2 = \tilde{q}^\mu \tilde{q}_\mu = q_\nu \underbrace{\epsilon^{\mu\nu} \epsilon_{\mu\rho}}_{=-\delta^\nu_\rho} q^\rho = -q^2$$

$$= \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \left(1 - 4 \frac{m^2}{q^2} \right) - q^\mu q^\nu + \eta^{\mu\nu} \left(\frac{q^2}{2} - 2m^2 + \frac{q^2}{2} + 2m^2 \right)$$

$$= \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu - \frac{4m^2}{q^2} \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu + \underbrace{\eta^{\mu\nu} q^2 - q^\mu q^\nu}$$

$$= \begin{pmatrix} q^0^2 - q^1^2 - q^2^2 & -q^0 q^1 \\ -q^0 q^1 & -q^0^2 + q^1^2 - q^2^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -q^1^2 & -q^0 q^1 \\ -q^0 q^1 & -q^0^2 \end{pmatrix} = -\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \quad \epsilon^{01} = -1$$

$$\tilde{q}^\mu = \epsilon^{\mu\nu} q_\nu = (+q^1, +q^0)$$

$$\text{NUM}(p_i) = \cancel{\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu} - \frac{4m^2}{q^2} \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu - \cancel{\tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu} = -\frac{4m^2}{q^2} \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu$$

per $q^2 < 4m^2$ non
 ci sono solut. p_i

$$\text{Disc } T^{\mu\nu} = - \left(-\frac{4m^2}{q^2} \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \right) \frac{1}{2\sqrt{q^2(q^2 - 4m^2)}} \cdot 2 \theta(q^2 - 4m^2)$$

$$= \frac{4m^2}{q^2} \frac{1}{\sqrt{q^2(q^2 - 4m^2)}} \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \theta(q^2 - 4m^2)$$

due solut. p_i
 $\left(\begin{array}{l} \text{NUM}(p_1) = \text{NUM}(p_2) \\ \text{Jac}(p_1) = \text{Jac}(p_2) \end{array} \right)$