

$$T^{\mu\nu} = \tilde{T}_1(q^2) \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu + \tilde{T}_2(q^2) \eta^{\mu\nu} \rightarrow \text{Disc } T^{\mu\nu} \text{ ci dice le disc. di } T_1 \text{ e } T_2$$

$$\text{Disc } T^{\mu\nu} = \frac{4m^2}{q^2} \frac{1}{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}} \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \theta(q^2-4m^2) \Rightarrow \begin{cases} \text{Disc } \tilde{T}_1 = \frac{4m^2}{q^2} \frac{1}{\sqrt{q^2(q^2-4m^2)}} \theta(q^2-4m^2) \\ \text{Disc } \tilde{T}_2 = 0 \end{cases}$$

A noi interessa $m \rightarrow 0$:

• quando $m \rightarrow 0$, $\text{Disc } \tilde{T}_1(q^2) \rightarrow 0$ eccetto in $q^2=0$

• $\text{Disc } \tilde{T}_1$ è una DISTRIBUZIONE; per capire quale distrib. abbiamo, la applichiamo su una test-function f

$$\lim_{m \rightarrow 0} \int_{-\infty}^{\infty} dx \text{Disc } \tilde{T}_1(x) f(x) = \lim_{m \rightarrow 0} \int_{4m^2}^{\infty} dx \frac{4}{\sqrt{x(x-4m^2)}} \frac{m^2}{x} f(x) =$$

$$= \lim_{m \rightarrow 0} \int_1^{\infty} \frac{4m^2 dy}{4m^2 \sqrt{y(y-1)}} \frac{m^2}{4m^2 y} f(4m^2 y)$$

$x = 4m^2 y$

$$= f(0) \int_1^{\infty} \frac{dy}{y^{3/2} \sqrt{y-1}} = f(0) \int_0^1 \frac{dz}{z^2 \frac{1}{z^{3/2}} \sqrt{\frac{1}{z}-1}} =$$

$y = 1/z$

$$= f(0) \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z}} = f(0) \left(-2\sqrt{1-z} \Big|_0^1 \right) = 2f(0)$$

$$\Rightarrow \text{Disc } \tilde{T}_1(q^2) = 2\delta(q^2)$$

$$(\text{Disc } \tilde{T}_2(q^2) = 0)$$

Ci ricordiamo che le dim. in massa sono

$$[\tilde{T}_1] = -2 \quad [\tilde{T}_2] = 0$$

inoltre \tilde{T}_1 e \tilde{T}_2 dip. solo da q^2

$$\rightsquigarrow \tilde{T}_1(q^2) \rightarrow \frac{1}{q^2} \quad \mu \quad q^2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \tilde{T}_1(z) \rightarrow 0 \quad \mu \quad z \rightarrow \infty$$

$$\tilde{T}_2(q^2) \rightarrow \text{cost.} \quad \mu \quad q^2 \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \quad \frac{\tilde{T}_2(z)}{z} \rightarrow 0 \quad \mu \quad z \rightarrow \infty$$

ma $\tilde{T}_2(z) \not\rightarrow 0$

Usiamo le regole di dispersione

$$\tilde{T}_1(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{0-i\epsilon}^{\infty} \frac{\text{Disc } \hat{T}_1(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\delta(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{\pi i z}$$

$$\tilde{T}_2(z) = b + \frac{1}{2\pi i} (z - z_0) \int \frac{\text{Disc } \hat{T}_2(\zeta)}{(\zeta - z)(\zeta - z_0)} d\zeta$$

$\tilde{T}_2(z_0)$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) + \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2) \quad \leftarrow \langle j^\mu j^\nu \rangle$$

$$T_A^{\mu\nu} = +\epsilon^{\mu s} \eta_{s\sigma} T^{\sigma\nu} = \leftarrow \langle j_A^\mu j^\nu \rangle$$

$$= +\epsilon^{\mu s} \eta_{s\sigma} (\tilde{q}^\sigma \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1 + \eta^{\sigma\nu} \tilde{T}_2) = \uparrow \epsilon^{\mu s} j_s^\nu = \epsilon^{\mu s} \eta_{s\sigma} j^\sigma$$

$$= +q^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1(q^2) + \epsilon^{\mu\nu} \tilde{T}_2(q^2)$$

$$\tilde{q}_\rho = \epsilon_{\rho\alpha} q^\alpha \rightarrow \epsilon^{\mu s} \tilde{q}_s = \epsilon^{\mu s} \epsilon_{s\alpha} q^\alpha = q^\mu$$

$$\Rightarrow T^{\mu\nu} = \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b \eta^{\mu\nu}$$

$$T_A^{\mu\nu} = q^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b \epsilon^{\mu\nu}$$

\leftarrow scelta di b dipende dalla REGOLARIZZAZIONE scelta

Applichiamo ∂_μ a $\langle j^\mu j^\nu \rangle$ e $\langle j_A^\mu j^\nu \rangle$ per verificare le WI

Ci aspettiamo $\partial_\mu \langle j^\mu(x) j^\nu(b) \rangle = 0 \quad \forall \nu$

$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) j^\nu(b) \rangle = 0 \quad \forall \nu$

$$q_\mu \tilde{q}^\mu = \underbrace{q_\mu}_{\text{sym}} \underbrace{q^\mu}_{\text{antisym}} \epsilon^{\mu s} = 0$$

$$\partial_\mu \langle j^\mu(x) j^\nu(o) \rangle \rightarrow q_\mu T^{\mu\nu} = 0 + b q^\nu \quad \Rightarrow \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

Scegliere b t.c.

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) j^\nu(o) \rangle \rightarrow q_\mu T_A^{\mu\nu} = \frac{i}{\pi} \tilde{q}^\nu - b \tilde{q}^\nu$$

siamo soddisf. sia VWI che la AWI

↓
(L'ANOMALIA È INEVITABILE)

- Qualsiasi regolarizzazione venga scelta, almeno una delle id. d' Ward viene violata.
- Diverse scelte di regolarizzazione danno diverse teorie quantistiche (correlatori diversi, simmetrie preservate diverse) anomalie \mapsto ambiguità nel quantizzare la teoria.
- Una simmetria ANOMALA non può essere GAUGGIATA in modo consistente (vedi ANOMALIE e FUNZIONALI GENERATORI): nella teoria gauggiata la simm. diventa una RIDONDANZA; se non è più valida, alcune configurazioni che dovrebbero essere equivalenti, che invece presentano una dinamica diversa; detto diversam., abbiamo costruito la teoria per descrivere sist. con N d.o.f., ma nella teoria quantistica ce ne sono di più in quanto si può avere equivalenze.

Scegliamo di preservare $U(1)_V \rightsquigarrow U(1)_A$ è anomala

$$\rightarrow b=0 \rightarrow q_\mu T_A^{\mu\nu} = \frac{i}{\pi} \tilde{q}^\nu$$

$$\begin{aligned} \partial_\mu \langle j_A^\mu(x) j^\nu(0) \rangle &= \partial_\mu \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} T_A^{\mu\nu}(q^2) e^{iqx} = \\ &= \frac{i}{\pi} \int \frac{d^2 q}{(2\pi)^2} \epsilon^{\nu\rho} i q_\rho e^{iqx} = \frac{i}{\pi} \epsilon^{\nu\rho} \partial_\rho \delta(x) \end{aligned}$$

Accoppiamo la corrente preservata j^μ (vech.) a un camp di gauge esterno ($e^{-i\int A_\mu j^\mu}$).

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) \rangle_A = \partial_\mu \langle j_A^\mu(x) e^{-i\int A_\nu j^\nu} \rangle_{\text{free}} \stackrel{\text{expansions exponent.}}{=} \text{com. d. } j_A^\mu \text{ quando camp gauge } A \text{ eccels}$$

$$\begin{aligned} &= \partial_\mu \langle j_A^\mu(x) \rangle_{\text{free}} - i \int d^2 y A_\nu(y) \partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x) j^\nu(y) \rangle + \\ &\quad - \frac{1}{2} \int d^2 y_1 d^2 y_2 A_{\nu_1}(y_1) A_{\nu_2}(y_2) \partial_\mu^x \langle j_A^\mu(x) j^{\nu_1}(y_1) j^{\nu_2}(y_2) \rangle + \dots \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi} \int d^2 y A_\nu(y) \epsilon^{\nu\rho} \partial_\rho \delta(x-y) \stackrel{\text{intep. part.}}{=} \frac{1}{\pi} \epsilon^{\nu\rho} \underbrace{\partial_\rho A_\nu(x)}_{\substack{\text{antisim.} \\ \frac{1}{2}(\partial_\rho A_\nu - \partial_\nu A_\rho)}}$$

$$\partial_\mu \langle j_A^\mu(x) \rangle_A = \frac{1}{2\pi} \epsilon^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$$

(Remember that we used convention $\epsilon^{01} = +1$.)

\downarrow
 $\partial_\mu \langle j_A^\mu \rangle_A \neq 0$: se gaugiamo $U(1)_V$, allora $\partial_\mu \hat{j}_A^\mu \neq 0$ (simul. rotta)

- Se c'è anomalie in correlatori $\langle j \dots j \rangle$ dove tutte le correnti NON sono accoppiate a campi di gauge, allora l'anomalia nelle id di Ward sarà data da derivate delle δ -funzioni:

$$\partial \langle j \dots j \rangle \sim \partial \delta - \partial \delta \dots$$

Si può dimostrare che in questo caso la rottura delle simm. (o meglio la violazione delle Id. di Ward) non è visibile fisicamente. In particolare, le Regole di Selezione non sono violate.

Si dice che la teoria ha una 't Hooft Anomaly. In particolare la simmetria relativa alle correnti J^μ con anomalie in $\partial_\mu^x \langle J^\mu(x) \dots \rangle$ ha una 't Hooft Anomaly.

- Una 't Hooft anomaly è un' OSTRUZIONE a GAUGIARE la simmetria.

• Nel caso studiato, abbiamo due simmetrie che non possono essere gaugeate entrambe. Inoltre, se una delle due è gaugeata (es. $U(1)_V$), l'altra è ROTTA nel senso che $\langle D_\mu J_A^\mu \rangle \neq 0$.
Esse si dicono avere una MIXED 't HOOFT ANOMALY.

Si può dimostrare che 1 fermione chirale non può essere consistentemente accoppiato a un campo di gauge U(1).

(Cioè, nel linguaggio appena introdotto, tale simmetria U(1) ha una 't Hooft anomaly.)

$$\begin{aligned}
 \langle j^\mu j^\nu \rangle &= \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1 + \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2 &= \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b \eta^{\mu\nu} \\
 \langle j_A^\mu j^\nu \rangle &= \epsilon^{\mu\sigma} \langle j_\sigma j^\nu \rangle = q^\mu \tilde{q}^\nu \tilde{T}_1 + \epsilon^{\mu\nu} \tilde{T}_2 &= q^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b \epsilon^{\mu\nu} \\
 \langle j^\mu j_A^\nu \rangle &= \epsilon^{\nu\sigma} \langle j^\mu j_\sigma \rangle = \tilde{q}^\mu q^\nu \tilde{T}_1 - \epsilon^{\mu\nu} \tilde{T}_2 &= \tilde{q}^\mu q^\nu \frac{i}{\pi q^2} - b \epsilon^{\mu\nu} \\
 \langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle &= \epsilon^{\mu\sigma} \epsilon^{\nu\tau} \langle j_\sigma j_\tau \rangle = q^\mu q^\nu \tilde{T}_1 - \eta^{\mu\nu} \tilde{T}_2 &= q^\mu q^\nu \frac{i}{\pi q^2} - b \eta^{\mu\nu}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 T^{\mu\nu} &= \tilde{q}^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b \eta^{\mu\nu} \\
 T_A^{\mu\nu} &= q^\mu \tilde{q}^\nu \frac{i}{\pi q^2} + b \epsilon^{\mu\nu} \\
 \tilde{q}^\mu &= \epsilon^{\mu\sigma} q_\sigma, \quad q^\mu = \epsilon^{\mu\sigma} \tilde{q}_\sigma
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 q_\mu \langle j^\mu j^\nu \rangle &= b q^\nu & q_\mu \langle j^\mu j_A^\nu \rangle &= b \tilde{q}^\nu \\
 q_\mu \langle j_A^\mu j^\nu \rangle &= \frac{i}{\pi} \tilde{q}^\nu - b \tilde{q}^\nu & q_\mu \langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle &= \frac{i}{\pi} q^\nu - b q^\nu
 \end{aligned}$$

$$j_L = \frac{1}{2}(j - j_A)$$

$$\begin{aligned}
 \langle j_L^\mu(x) j_L^\nu(0) \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ \langle j^\mu j^\nu \rangle - \langle j_A^\mu j^\nu \rangle - \langle j^\mu j_A^\nu \rangle + \langle j_A^\mu j_A^\nu \rangle \right\} \\
 q_\mu \langle j_L^\mu(x) j_L^\nu(0) \rangle &= \frac{1}{4} \left\{ \cancel{b q^\nu} - \frac{i}{\pi} \tilde{q}^\nu + \cancel{b \tilde{q}^\nu} - \cancel{b \tilde{q}^\nu} + \frac{i}{\pi} q^\nu - \cancel{b q^\nu} \right\} = \\
 &= \frac{i}{4\pi} (q^\nu - \tilde{q}^\nu) \neq 0 \quad \forall b! \quad \supset
 \end{aligned}$$

U(1)_L ha una 't Hooft ANOMALY

Facendo analogo conto introducendo $j_R = \frac{1}{2}(j + j_A)$, otteniamo

$$q_\mu \langle j_R^\mu(x) j_R^\nu(0) \rangle = \frac{i}{4\pi} (q^\nu + \tilde{q}^\nu) \neq 0 \quad \forall b$$

$$q_\mu \langle j_L^\mu(x) j_R^\nu(0) \rangle = \left(\frac{b}{2} - \frac{i}{4\pi} \right) (q^\nu + \tilde{q}^\nu)$$

$$q_\mu \langle j_R^\mu(x) j_L^\nu(0) \rangle = \left(\frac{b}{2} - \frac{i}{4\pi} \right) (q^\nu - \tilde{q}^\nu)$$