Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2023-2024, Primo esame invernale

COGNOME MAIUSCOLO **NOME** LEGGIBILE

N. Matricola ________ **Anno di corso** ________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

- si calcoli $\lim_{x\to+\infty}\left(x^2-\sqrt{x^2-2}\sqrt{x^2+3}\right)$. Abbiamo $x^2-\sqrt{x^4+x^2-6}=$

$$=\left(x^2-\sqrt{x^4+x^2-6}\right)\frac{x^2+\sqrt{x^4+x^2-6}}{x^2+\sqrt{x^4+x^2-6}}=\frac{\cancel{x^4}-(\cancel{x^4}+x^2-6)}{x^2+\sqrt{x^4+x^2-6}}$$

$$=\frac{-x^2+6}{x^2\left(1+\sqrt{1+x^{-2}-6x^{-4}}\right)}\xrightarrow{x\to+\infty}-\frac{1}{2}$$

- si calcoli $\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$; $\int_x^{2x}\frac{1}{t^{\frac12}(1+t^{-\frac12})}=\int_x^{2x}t^{-\frac12}\left(1-t^{-\frac12}+o(t^{-\frac12})\right)dt$

$$=\int_x^{2x}t^{-\frac12}dt-\int_x^{2x}t^{-1}dt+\int_x^{2x}t^{-1}o(1)\,dt=-2\,t^{\frac12}\Big]_x^{2x}-\lg 2+o(1)=$$

$$=2\sqrt{x}\left(\sqrt{2}-1\right)-\lg 2+o(1)\xrightarrow{x\to+\infty}+\infty,\ \text{dove}$$

$$\left|\int_x^{2x}t^{-1}o(1)\,dt\right|=\left|x\ \frac{1}{c_x}\ o(1)|_{c_x}\right|\le\left|o(1)|_{c_x}\right|\xrightarrow{x\to+\infty}0\qquad \text{dc } x\le c_x\le 2x$$

- si calcoli $f'(x)$ per $f(x):=\int_x^{2x}\frac{1}{1+\sqrt{t}}dt$;

$$f'(x)=\frac{2}{1+\sqrt{2x}}-\frac{1}{1+\sqrt{x}}$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione $e^{2x}+(e^{x}-1)^2>0\ \forall x$

$$f(x)=\log\left(2e^{2x}-2e^{x}+1\right)$$

- si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio; dom$(f)=\mathbb{R}$

$\lim_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, $\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lg(1)=0$

Noto che $f(x)=\lg\left(2e^{2x}\left(1-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)\right)=$

$=2x+\lg 2+\lg\left(1-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right))$

- si calcoli $f'(x)$ e si trovi il numero dei punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

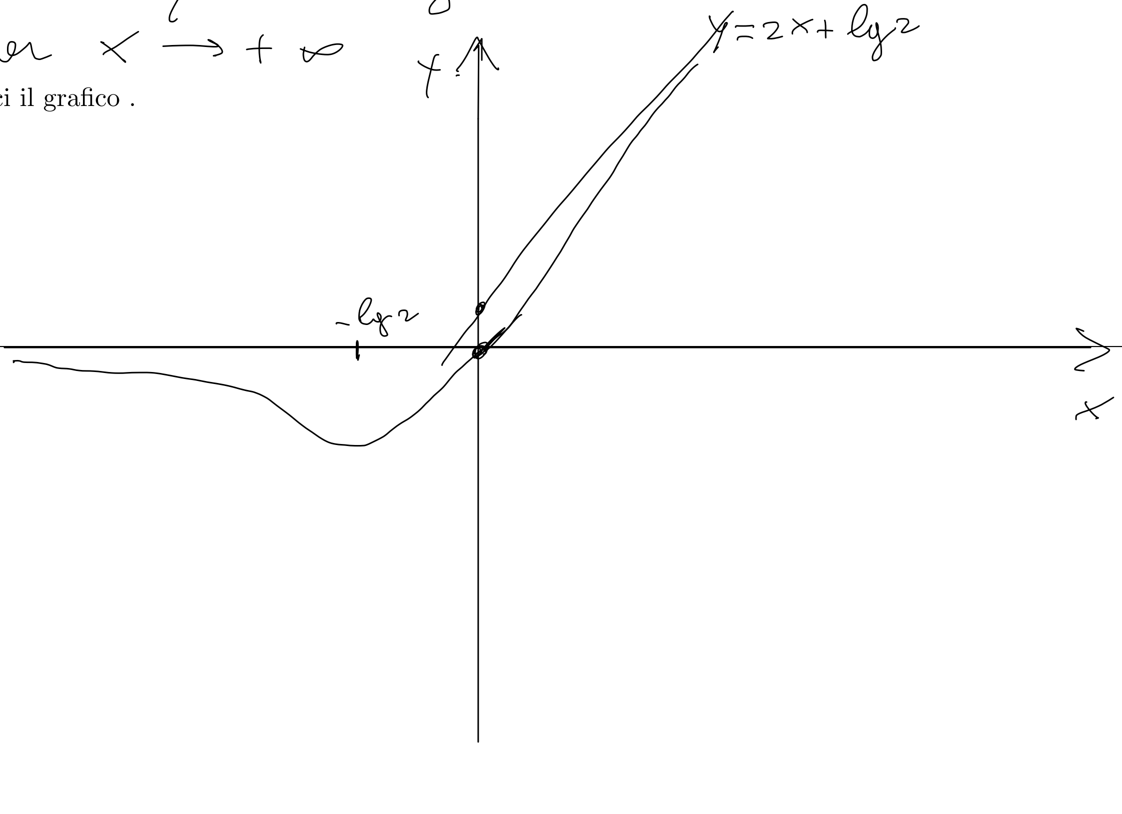
$f'(x)=\frac{4e^{2x}-2e^{x}}{2e^{2x}-2e^{x}+1}=\frac{4e^{x}\left(e^{x}-\frac{1}{2}\right)}{2e^{2x}-2e^{x}+1}=0$ per $x=\lg\frac{1}{2}=-\lg 2$

e siccome $f'(x)<0$ per $x<-\lg 2$ e $f'(x)>0$ per $x>-\lg 2$, risulta che $x=-\lg 2$ è il punto di minimo assoluto

- si stabilisca se vi sono rette asintotiche; Noto che $y=0$ è la retta asintotica per $x\to-\infty$.

Noto che, siccome $\lim_{x\to+\infty}\lg\left(1-e^{-x}+\frac{1}{2}e^{-2x}\right)=0$ segue che $y=2x+\lg 2$ è la retta asintotica per $x\to+\infty$

- si tracci il grafico .



COGNOME e NOME ________________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3.

- si calcoli $\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{(x+2)(x+3)^2} dx$

$\frac{1+x}{(x+2)(x+3)^2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x+3} + \frac{C}{(x+3)^2}$, $A = \frac{1+x}{(x+3)^2}\Big|_{x=-2} = -1$

$B = 1$ (perché $A+B=0$) $\quad C = \frac{1+x}{x+2}\Big|_{x=-3} = \frac{-2}{-1} = 2$

$\int_1^{+\infty} \left(\frac{-1}{x+2} + \frac{1}{x+3} + \frac{2}{(x+3)^2}\right)dx = \lg \frac{x+3}{x+2}\Big]_1^{+\infty} - \frac{2}{x+3}\Big]_1^{+\infty} =$

$= -\lg\frac{4}{3} + \frac{1}{2}$. Notare che l'integrale deve essere positivo, cioè deve essere $\frac{1}{2} > \lg\frac{4}{3}$ $\quad e^{\frac{1}{2}} > 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} > \frac{4}{3}$

- si calcoli le primitive $\int x\log^2(x)dx$; $=$

$y = \lg x \quad dy = \frac{1}{x}dx \quad dx = e^y dy$

$\int e^{2y} y^2 dy = \frac{1}{2}e^{2y}y^2 - \int e^{2y} y\, dy = \frac{1}{2}e^{2y}y^2 - \frac{1}{2}e^{2y}y + \frac{1}{4}e^{2y} + C$

$= \frac{1}{2}x^2\lg^2 x - \frac{1}{2}x^2 \lg x + \frac{1}{4}x^2 + C$

- si stabilisca se $x\sin(x^3)$ e' integrabile in $[2, +\infty)$; $\quad y = x^3 \quad dy = 3x^2dx \quad dx = \frac{1}{3}\frac{1}{y^{\frac{2}{3}}}dy$

$\int_2^R x\sin(x^3)\,dx = \frac{1}{3}\int_8^{R^3} \frac{\sin(y)}{y^{\frac{1}{3}}}dy \xrightarrow{R\to+\infty}$ esiste finito per un teorema dimostrato.

- si stabilisca se $\log(x) \in L(0, 1]$. $\quad \lg(x) \in L_{loc}(0,1]$. Siccome

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\lg(x)}{\frac{1}{\sqrt{x}}} = 0 \implies$ per confronto asintotico $\lg(x) \in L_{loc}(0,1]$

ESERCIZIO N. 4. Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 4 di $f(x) = \log\left(1 + 2x + x^2\right)$.

$$f(x) = 2\lg(1+x) = 2\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + o(x^4)\right]$$

$$= \underbrace{2x - x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{x^4}{2}}_{\text{il polinomio cercato}} + o(x^4)$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale $\overbrace{y'' + y' + y}^{L[y]} = \sin(2x)$.

$y_g = y_h + y_p$. Per calcolare y_h considero l'equazione caratteristica $\overbrace{r^2+r+1}^{p(r)} = 0$ $\quad r_{1,2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{i\sqrt{3}}{2}$

$$\Rightarrow y_h = e^{-\frac{x}{2}}\left(A\cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)\right)$$

Poiché $p(2i) \neq 0$ cerco $y_p = \alpha\cos(2x) + \beta\sin(2x)$

$$L[y_p] = \alpha L[\cos(2x)] + \beta L[\sin(2x)] =$$

$$= \alpha\left(-4\cos(2x) - 2\sin(2x) + \cos(2x)\right) + \beta\left(-4\sin(2x) + 2\cos(2x) + \sin(2x)\right)$$

$= \sin(2x)$ cioè

$$\cos 2(x)\left(-3\alpha + 2\beta\right) + \sin(2x)\left(-2\alpha - 3\beta\right) = \sin(2x)$$

$$\begin{cases} -3\alpha + 2\beta = 0 \\ 2\alpha + 3\beta = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \alpha = \frac{2}{3}\beta \\ \left(\frac{4}{3} + 3\right)\beta = -1 \end{cases}$$

$$\beta = -\frac{3}{13} \qquad \alpha = -\frac{2}{13}$$