Corso di GEOMETRIA 1 - Prova scritta
A.A. 2023/2024 - 16 gennaio 2024
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea

(1) **(6 punti)** Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \alpha x - y = -1 \\ x + 2y - z = 1 \\ 2x - \alpha y + z = 1 - \alpha. \end{cases}$$

Si determinino i valori di α per cui il sistema lineare è compatibile e ha insieme delle soluzioni dipendente da un parametro.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 + x_3 \\ x_1 - x_3 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ e si determini il suo rango.

(b) **(3 punti)** Si determini una base ortonormale di $\mathrm{Im} f$ rispetto al prodotto scalare standard.

(c) **(3 punti)** Si determinino, motivando la risposta, delle equazioni cartesiane per il sottospazio ortogonale $(\mathrm{Im} f)^{\perp}$ e una sua base ortonormale.

(3) Si consideri la matrice

$$C_{a,b} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a & 2-b & -2+2b \\ a & 1-b & -1+2b \end{pmatrix}.$$

- **(4 punti)** Si determinino i valori di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ per cui $C_{a,b}$ è diagonalizzabile.

- **(4 punti)** Per tali coppie di valori di $a \in \mathbb{R}$ e $b \in \mathbb{R}$ si determini un base di autovettori per L_C.

(4) **(6 punti)** Sia V uno spazio vettoriale su un campo $\mathbb{K}$ e sia $f : V \to V$ un endomorfismo. Supponiamo che esistano due vettori non nulli $v, w \in V$, $v \neq 0_V$, $w \neq 0_V$, tali che

$$f(v) = w, \quad f(w) = v.$$

Si dimostri che f ammette un autovettore.

(5) **(6 punti)** Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita su un campo $\mathbb{K}$. Si dimostri che se $v_1, \ldots, v_k$ sono autovettori relativi a k autovalori distinti $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ ($\lambda_i \neq \lambda_j$ per $i \neq j$), allora $v_1, \ldots, v_k$ sono linearmente indipendenti.