Segnali elementari

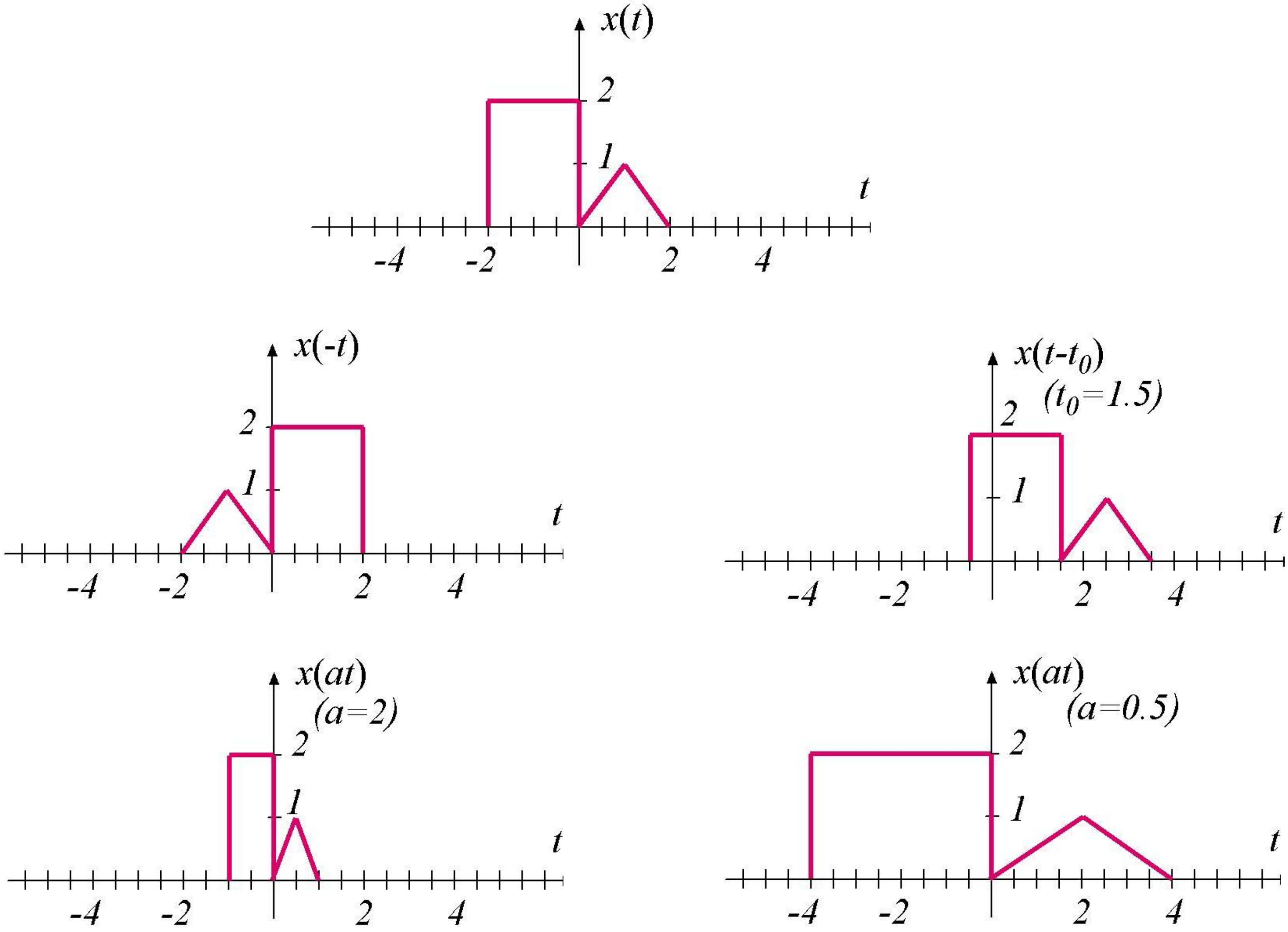
Prof. Fulvio Babich

babich@units.it

Sommario

- trasformazione sulla variabile tempo
- proprietà dei segnali
- segnali elementari
  - tempo continuo
  - tempo discreto
- energia e potenza

Trasformazioni di variabile

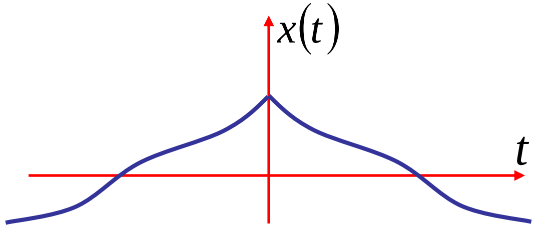


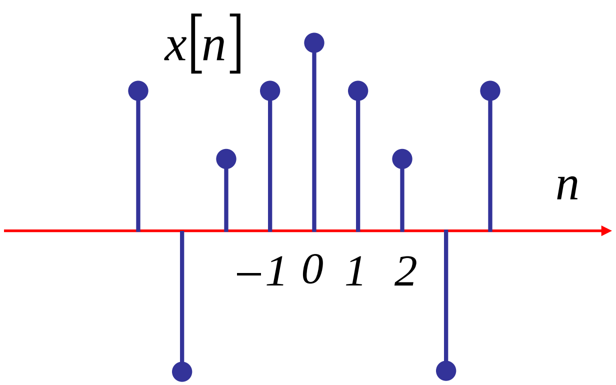
Parità

Un segnale è pari se:

$$x(t) = x(-t) \qquad \forall t$$

$$x[n] = x[-n] \qquad \forall n$$

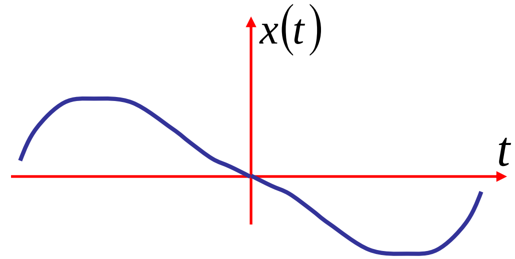


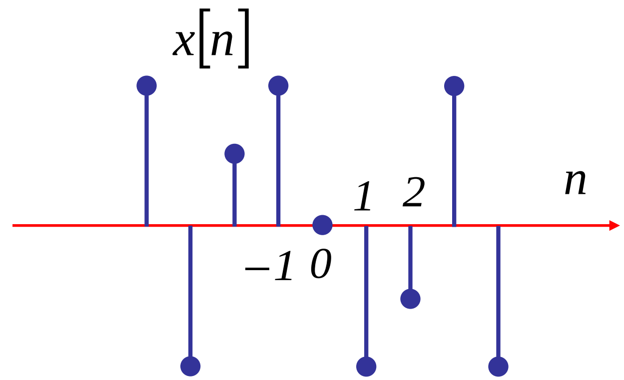


Un segnale è dispari se:

$$x(t) = -x(-t) \qquad \forall t$$

$$x[n] = -x[-n] \qquad \forall n$$





Ogni segnale può essere scomposto nella somma di un segnale pari e uno dispari

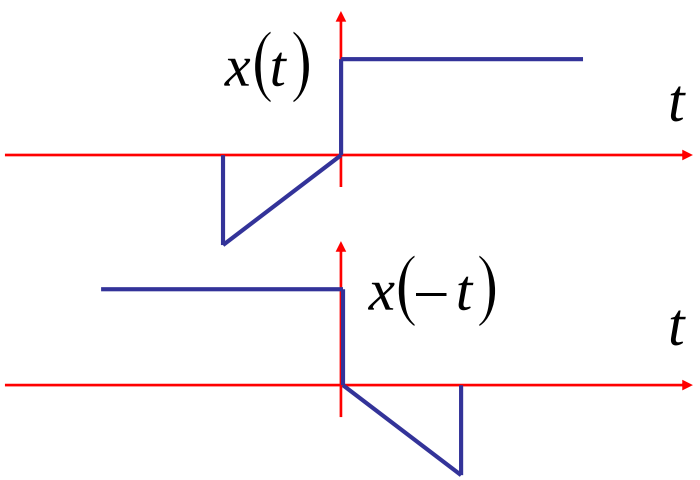
$$x(t) = x_p(t) + x_d(t)$$

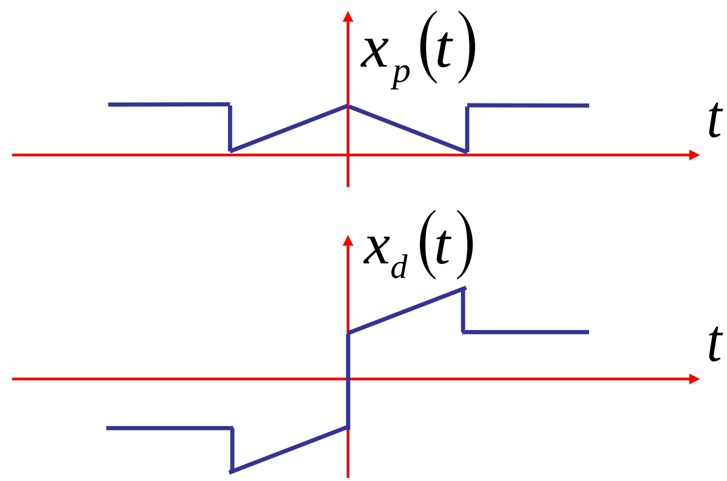
$$\boxed{\begin{aligned} x_p(t) &= \frac{x(t)+x(-t)}{2} \\ x_d(t) &= \frac{x(t)-x(-t)}{2} \end{aligned}}$$

La scomposizione è unica

$$x[n] = x_p[n] + x_d[n]$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_p[n] &= \frac{x[n]+x[-n]}{2} \\ x_d[n] &= \frac{x[n]-x[-n]}{2} \end{aligned}}$$

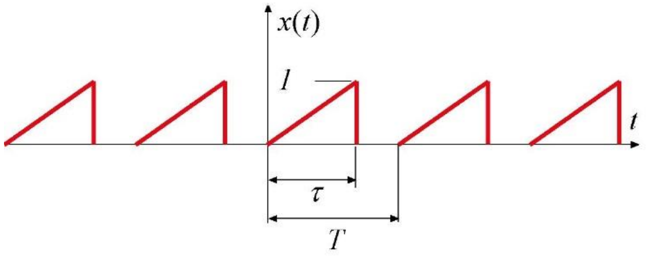




Periodicità

Un segnale $x(t)$ è periodico se esiste un numero reale $T \neq 0$ tale che:

$$x(t+T) = x(t) \qquad \forall t$$



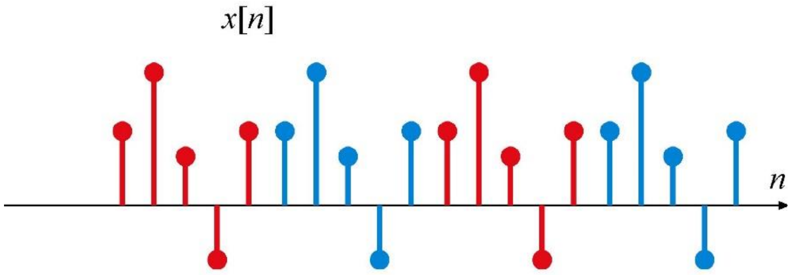
Periodo:

Il più piccolo valore di T per cui

$$x(t+T) = x(t) \qquad \forall t$$

Un segnale $x[n]$ è periodico se esiste un numero INTERO $N \neq 0$ tale che:

$$x[n+N] = x[n] \qquad \forall n$$



Periodo:

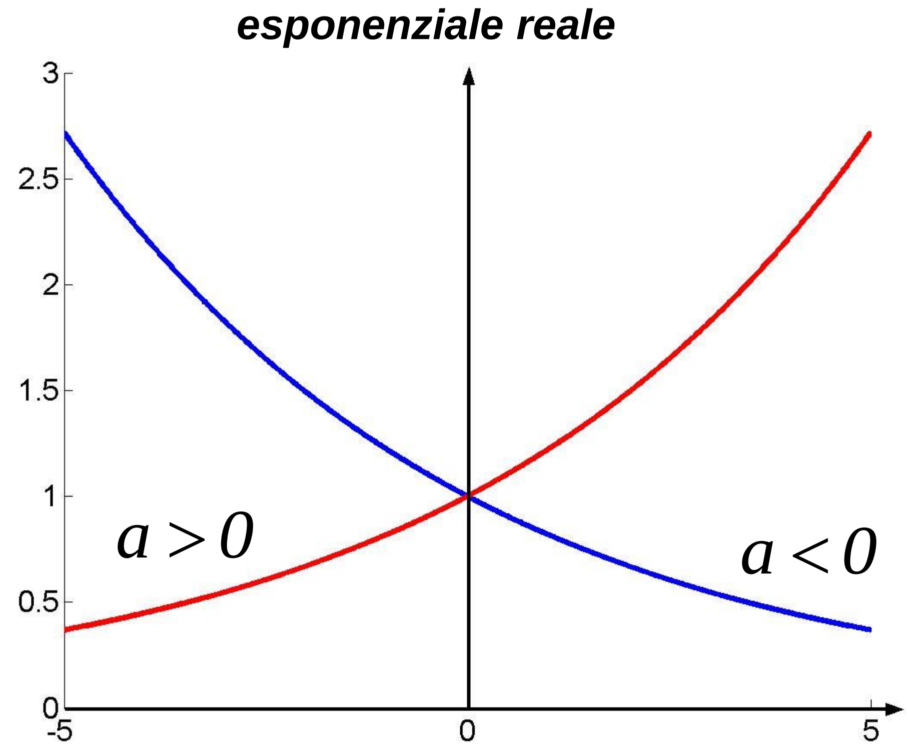
Il più piccolo valore di N per cui

$$x[n+N] = x[n] \qquad \forall n$$

Esponenziale complesso: $\boxed{x(t) = Ce^{at}}$ C e a complessi

Casi particolari:

$\boxed{C \text{ e } a \text{ reali}}$



C **reale**

a **immaginario** $= j\omega_0 = j2\pi f_0$

$$x(t) = e^{j\omega_0 t}$$

Segnale periodico di periodo $T = \dfrac{2\pi}{\omega_0} = \dfrac{1}{f_0}$

Formule di Eulero

$$e^{j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t + j\sin\omega_0 t$$

$$e^{-j\omega_0 t} = \cos\omega_0 t - j\sin\omega_0 t$$

$$\cos\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}$$

$$\sin\omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}$$

Proprietà del segnale $x(t) = e^{j\omega_0 t}$

I segnali $\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} = e^{jk2\pi f_0 t}$

con k intero sono **in relazione armonica tra loro**

$$\boxed{\varphi_k(t) = e^{jk\omega_0 t} \quad \Rightarrow \quad \text{periodico di periodo } \frac{2\pi}{k\omega_0} = \frac{1}{kf_0} \qquad \text{ma anche di periodo } \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}}$$

Pertanto:

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} C_k e^{jk\omega_0 t} \quad \text{segnale periodico di periodo } T = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{1}{f_0}$$

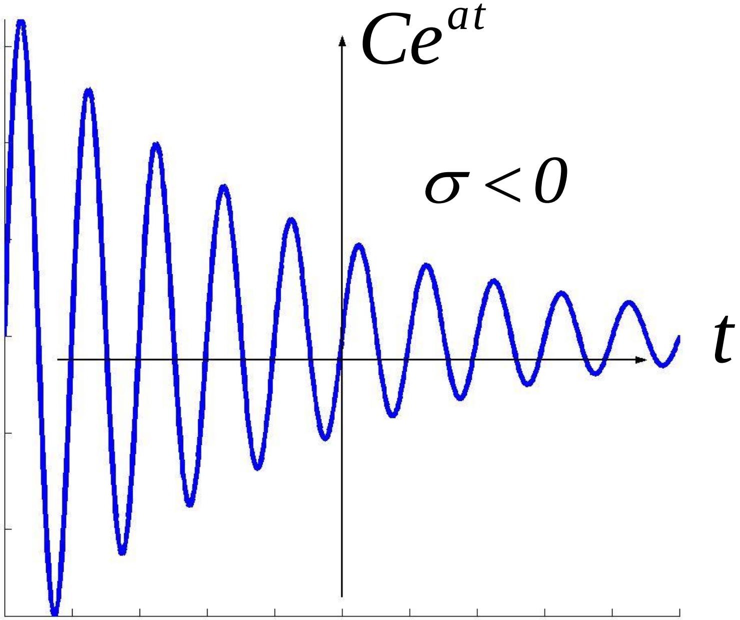
Esponenziale complesso: caso generale

C **complesso** $\Rightarrow$ $C = |C| e^{j\theta}$

a **complesso** $\Rightarrow$ $a = \sigma + j\omega_0$

$$Ce^{at} = |C| e^{\sigma t} \cos\left(\omega_0 t + \theta\right) + j |C| e^{\sigma t} \sin\left(\omega_0 t + \theta\right)$$

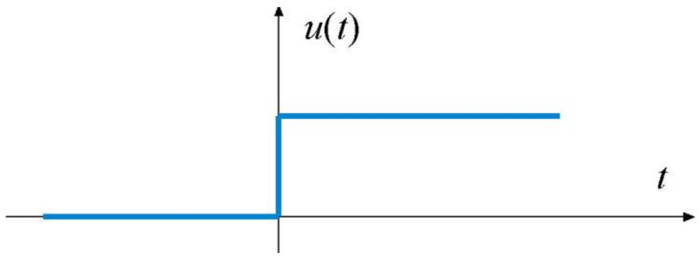
Tipico andamento della parte reale o immaginaria

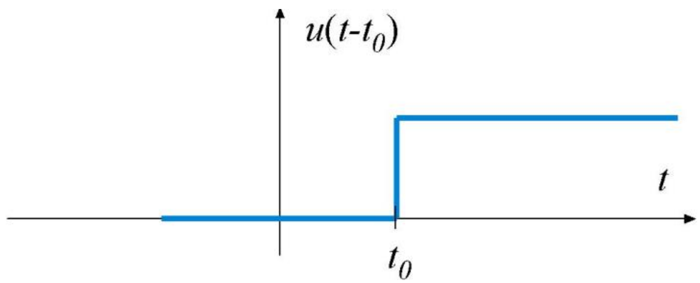


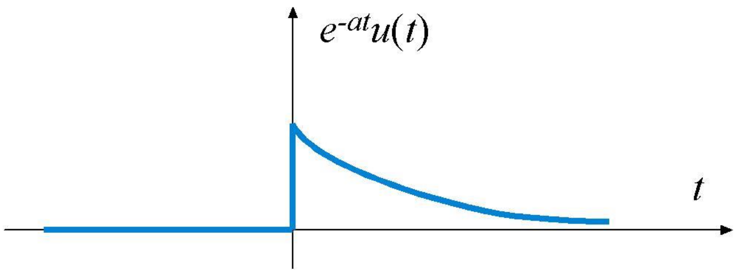
Gradino unitario

Heaviside step function

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$







altre definizioni

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t \le 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1, & t \ge 0 \end{cases}$$

$$u(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}, & t = 0 \\ 1, & t > 0 \end{cases}$$

Tipico impiego della funzione gradino

Impulso unitario ***(δ - Dirac)***

$$\boxed{x(t) = \delta(t)}$$

"funzione" che opera in maniera particolare sotto il segno di integrazione:

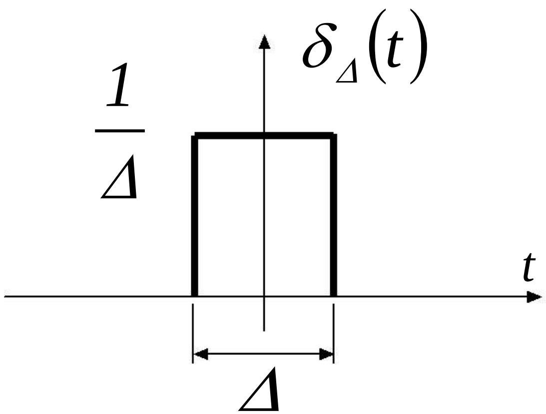
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)dt = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \delta(t)dt = \int_{\substack{a \\ (0 \in a)}} \delta(t)dt = 1$$

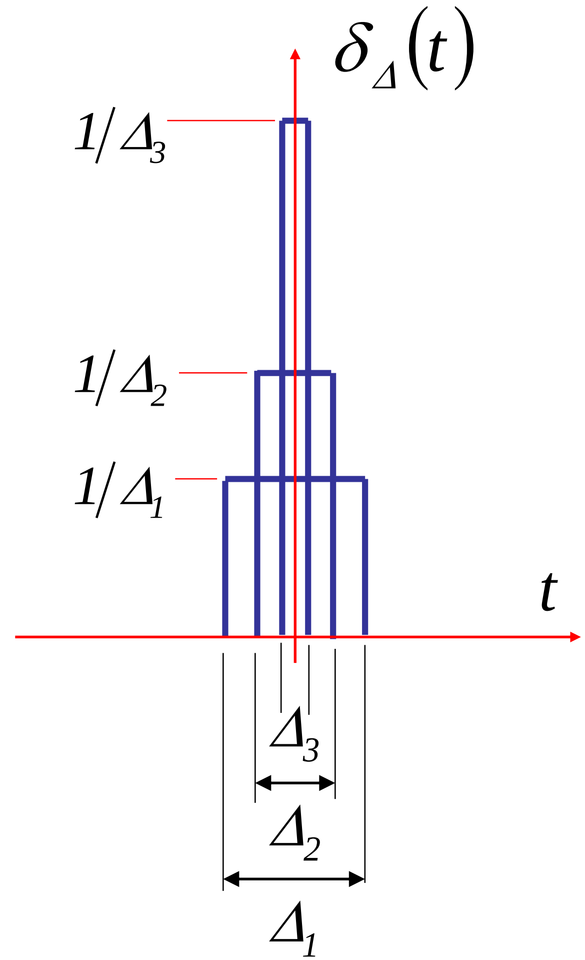
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t)dt = f(0)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\delta^n(t-t_0)dt = f^n(t_0)$$

$$f(t)\delta(t) = f(0)\delta(t) \qquad f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$$

Definizione della funzione $\delta(t)$ come limite di una successione di funzioni:





$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\Delta(t)\,dt = 1 \qquad \forall \Delta$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_\Delta(t) = \delta(t)$$

- Un impulso di utilizzo pratico

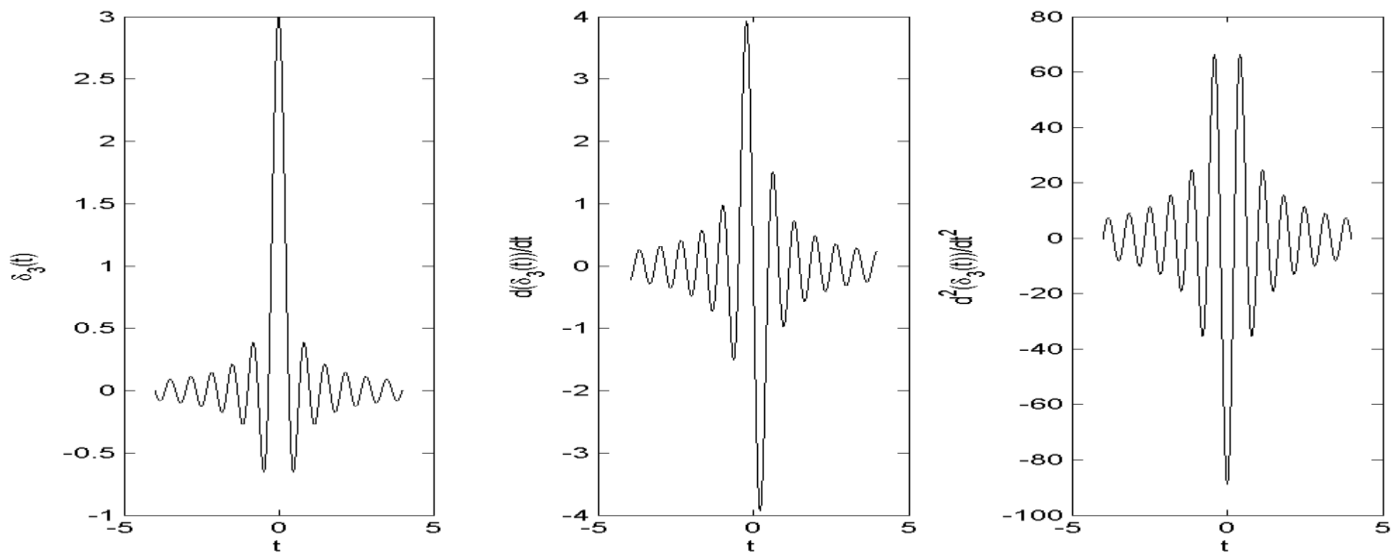
$$\delta_a(t) = \frac{\sin(a\pi t)}{\pi t}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta_a(t)dt = 1 \qquad \forall a$$

$$\lim_{a\to\infty} \delta_a(t) = \delta(t)$$

$$\delta_a^{'}(t) = \frac{a\pi t\cos(a\pi t) - \sin(a\pi t)}{\pi t^2}$$

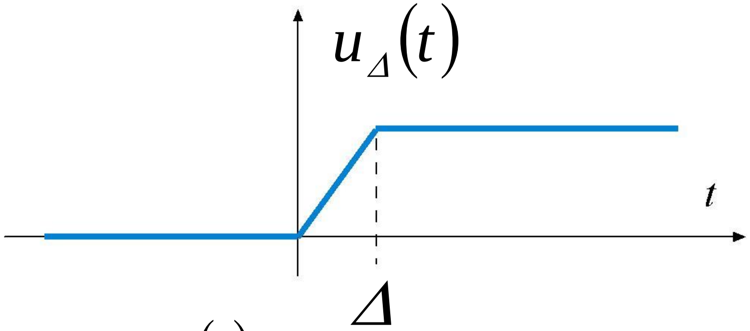
$$\delta_a^{''}(t) = \frac{\left(2-(a\pi t)^2\right)\sin(a\pi t) - 2a\pi t\cos(a\pi t)}{\pi t^3} \qquad \delta_a^{''}(0) = \frac{-a^3\pi^2}{3}$$



Relazioni tra $u(t)$ e $\delta(t)$

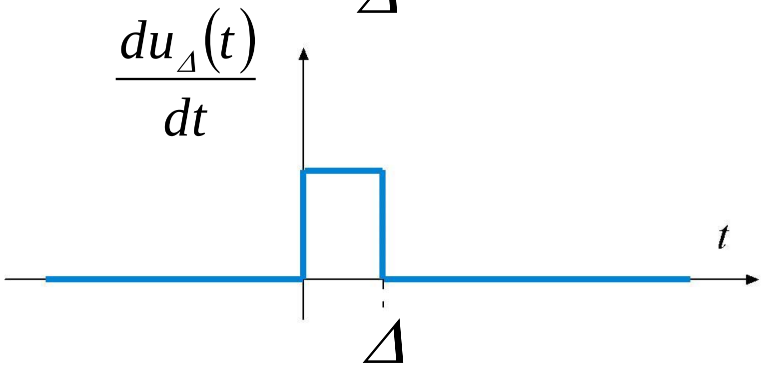
$$u(t) = \int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \qquad \delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} u_{\Delta}(t) = u(t)$$



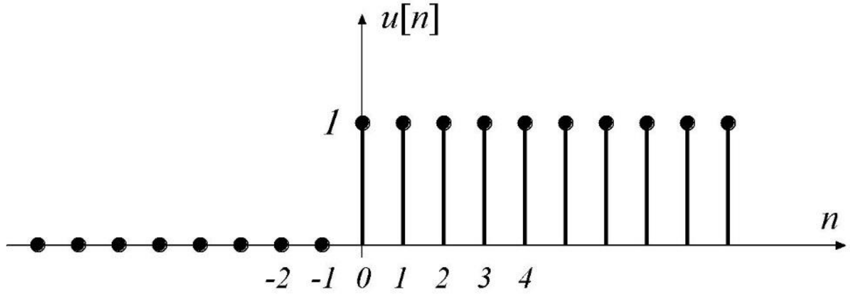
$$\delta_{\Delta}(t) = \frac{du_{\Delta}(t)}{dt}$$

$$\lim_{\Delta \to 0} \delta_{\Delta}(t) = \delta(t)$$



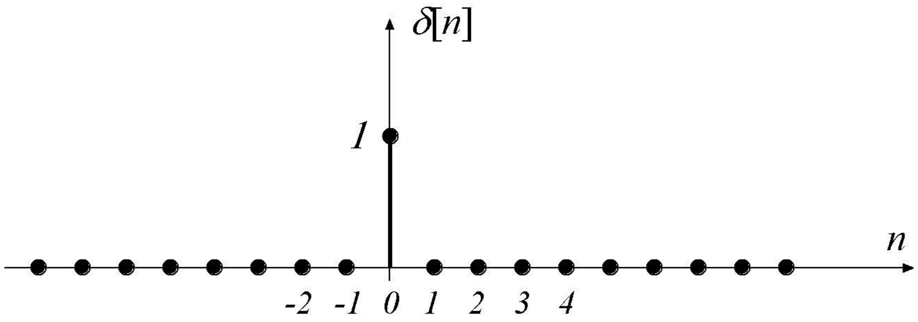
Gradino unitario

$$u[n]=\begin{cases}0, & n<0\\ 1, & n\geq 0\end{cases}$$



Impulso unitario

$$\delta[n]=\begin{cases}0, & n\neq 0\\ 1, & n=0\end{cases}$$



Relazioni tra

$\delta[n]$ e $u[n]$

$$\delta[n]=u[n]-u[n-1]$$

$$u[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\delta[k]$$

$$x[n]\delta[n]=x[0]\delta[n]$$

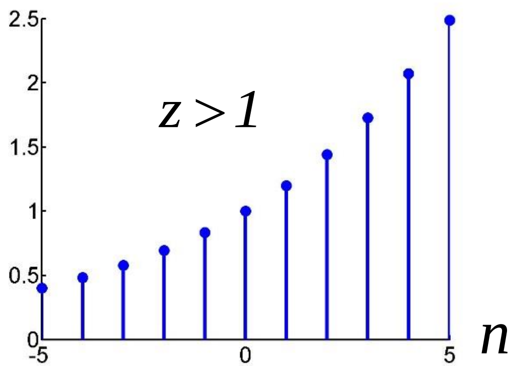
Esponenziale complesso

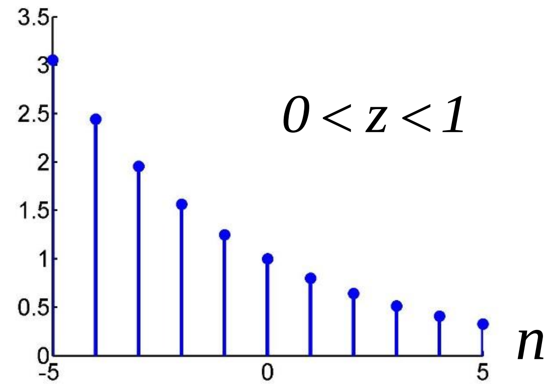
Forma generale: $$\begin{cases} x[n] = z^n \\ \end{cases}$$

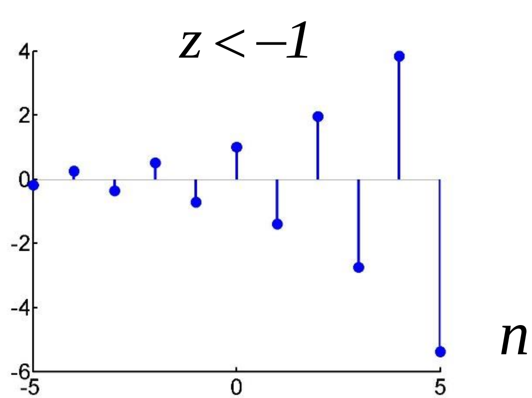
z **complesso**

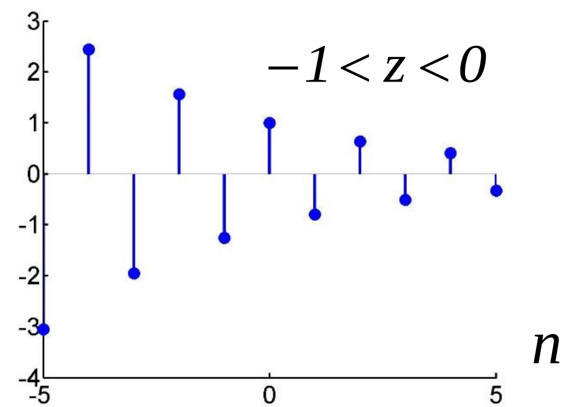
$$z = |z| e^{j\omega}$$

z reale









$$|z| = 1$$

$$z = e^{j\omega_0}$$

$$x[n] = z^n = e^{j\omega_0 n}$$

Proprietà:

a) **Valori ω_0 che differiscono per un multiplo di 2π danno luogo alla medesima funzione**

$$e^{j(\omega_0 + 2k\pi)n} = e^{j\omega_0 n} \underbrace{e^{j2k\pi n}}_{=1} = e^{j\omega_0 n}$$

I valori di ω_0 su un intervallo lungo 2π (es.: $0,2\pi$) generano tutte le possibili funzioni $e^{j\omega_0 n}$ distinte

b) In generale non esiste un intero N tale che: $e^{j\omega_0 n} = e^{j\omega_0 (n+N)}$

In generale $e^{j\omega_0 n}$ non è periodica

$$e^{j\omega_0 n} \text{ è periodica soltanto se } \quad \omega_0 = m\frac{2\pi}{N}$$

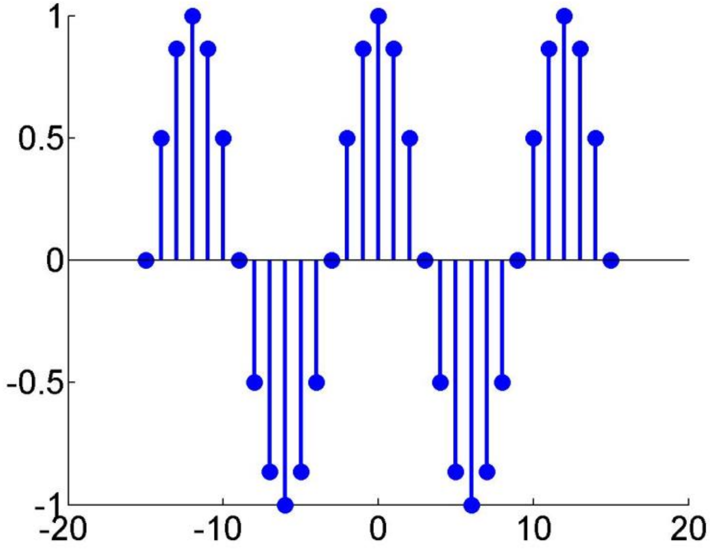
In questo caso:

$$e^{j\omega_0 n} = e^{jmn\frac{2\pi}{N}}$$

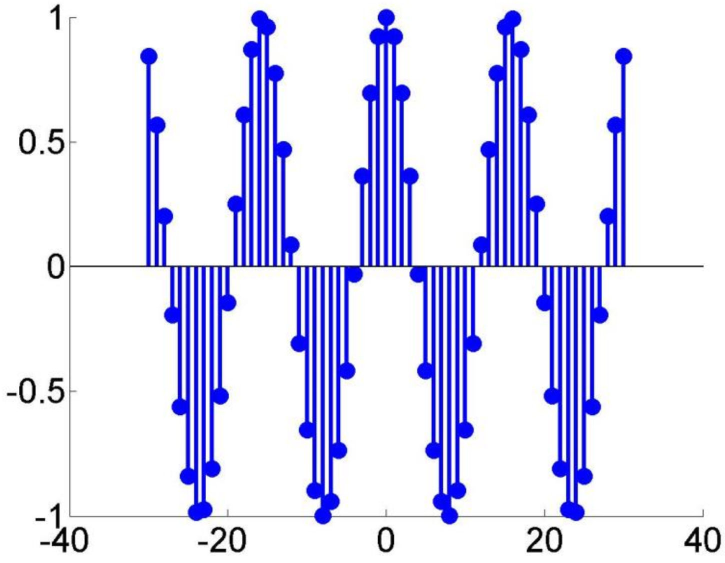
$$e^{j\omega_0 (n+N)} = e^{jmn\frac{2\pi}{N}} \underbrace{e^{jm2\pi}}_{=1} = e^{j\omega_0 n}$$

$\Rightarrow$ **Periodica di periodo** N

Esempio



$$\cos\left(\frac{2\pi}{12}n\right)$$



$$\cos(n/2.5)$$

c) I segnali:

$$\phi_k[n] = e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n} \qquad k = 0, \pm 1, \ldots$$

con k intero sono in relazione armonica tra loro

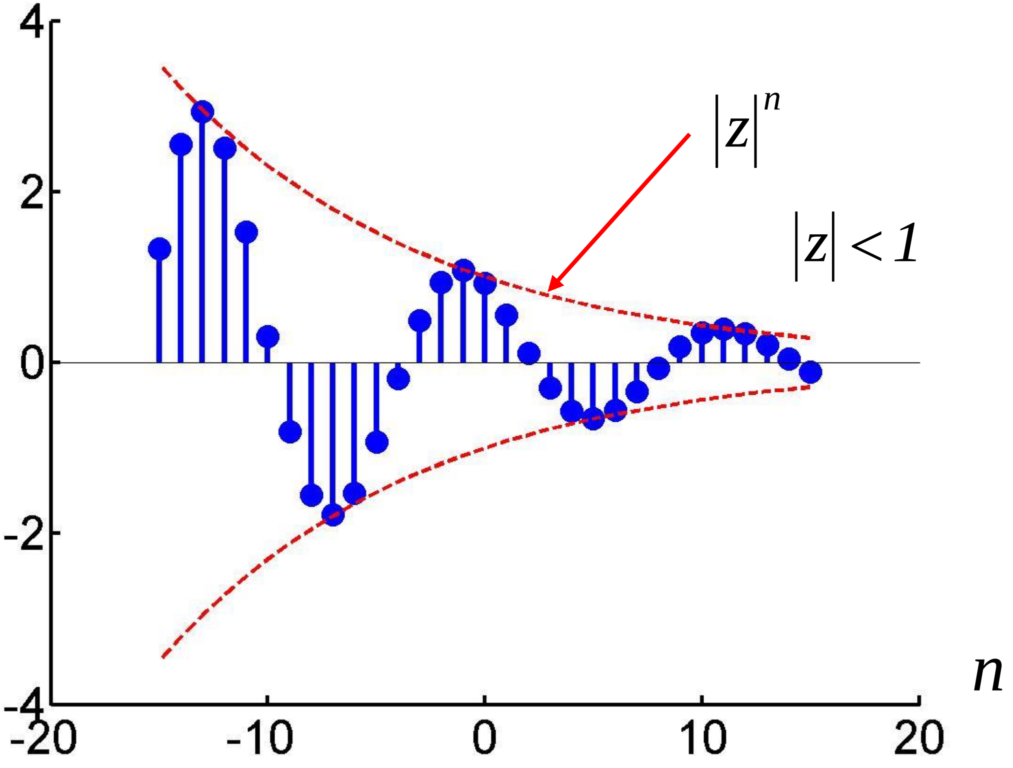
- **sono tutti periodici di periodo N**
- **ci sono soltanto N distinti segnali $\phi_k[n]$**

Caso generale:

$$x[n] = C\left(|z|e^{j\omega_0}\right)^n \quad con \quad C = |C|e^{j\theta}$$

$$\boxed{x[n] = |C|\,|z|^n \{\cos(\omega_0 n + \theta) + j\sin(\omega_0 n + \theta)\}}$$

Esempio:



Ipotesi:

il segnale $x(t)$ ($x[n]$) considerato rappresenti una tensione (o una corrente) applicata ad una resistenza di 1 ohm

$|x(t)|^2$ Potenza istantanea all'istante t

$\int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$ Energia sviluppata nell'intervallo t_2-t_1

$$T = t_2 - t_1$$

$\frac{1}{T} \int_{t_1}^{t_2} |x(t)|^2 \, dt$ Potenza media nell'intervallo T

$|x[n]|^2$ Potenza istantanea all'istante n

$\sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$ Energia sviluppata nell'intervallo n_1,n_2

$$N = n_2 - n_1 + 1$$

$\frac{1}{N} \sum_{n=n_1}^{n_2} |x[n]|^2$ Potenza media nell'intervallo N

Classificazione segnali

Segnali di energia

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = E < \infty$$

Segnali di potenza

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left|x(t)\right|^2 dt = \infty$$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} \left|x(t)\right|^2 dt = \mathrm{P} < \infty$$

Segnali di energia

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left|x[n]\right|^2 = E < \infty$$

Segnali di potenza

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|x[n]\right|^2 = \infty$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^{N} \left|x[n]\right|^2 = P < \infty$$

Riassunto

- trasformazioni di un segnale causate da trasformazioni della variabile tempo: $t \to -t, \quad t \to t\text{-}\ t_0\, ,\ t \to at$
- alcuni segnali possono essere: pari, dispari, periodici
- principali segnali elementari a tempo continuo
  - impulso ideale $\delta(t)$
  - gradino unitario $u(t)$
  - esponenziale complesso ($C\exp(\beta t)$, $\exp(j\omega t)$)
- principali segnali elementari a tempo discreto
  - impulso ideale $\delta[n]$
  - gradino unitario $u[n]$
  - esponenziale complesso ($C\, z^n$, $exp(j\Omega n)$)