Sistemi

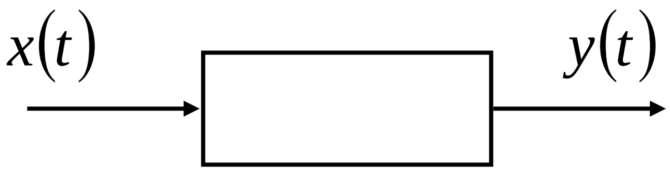
Prof. Fulvio Babich
babich@units.it

Sommario

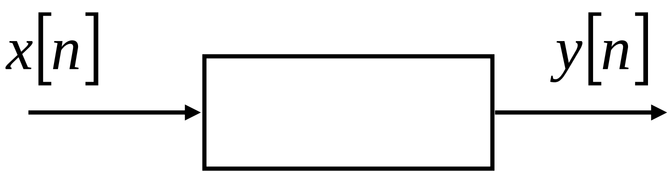
- sistemi a tempo continuo
- sistemi a tempo discreto
- proprietà dei sistemi
- analisi dei sistemi LTI (lineari tempo – invarianti)

Sistema

qualsiasi processo che trasforma un segnale in un altro segnale



Sistema tempo - continuo



Sistema tempo - discreto

a) memoria

Sistemi senza memoria:

$\forall t_0, \quad y(t_0)$ **dipende soltanto da** $x(t) \quad t = t_0$

$\forall n_0, \quad y[n_0]$ **dipende soltanto da** $x[n] \quad n = n_0$

Esempio:

Sistema N. 1 $$y[n] = \sin\left(\frac{\pi}{8} x[n]\right)$$

sistema senza memoria

Sistema N. 2 $$y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau) d\tau$$

sistema con memoria

b) causalità

Un sistema è causale se:

$$\forall t_0, \quad y(t_0) \quad \text{dipende soltanto da} \quad x(t) \quad t \le t_0$$

$$\forall n_0, \quad y[n_0] \quad \text{dipende soltanto da} \quad x[n] \quad n \le n_0$$

Esempio:

Sistema N. 1 $y[n] = \frac{1}{3}\{x[n-1] + x[n] + x[n+1]\}$

sistema non causale

Sistema N. 2 $y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau$

sistema causale

c) stabilità

Un sistema è stabile se:

$$\begin{cases} \forall t & |x(t)| < M \\ \forall n & |x[n]| < M \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \forall t & |y(t)| < B \\ \forall n & |y[n]| < B \end{cases}$$

Esempio:

Sistema N. 1 $$y(t) = x^2(t-2)$$

sistema stabile

Sistema N. 2 $$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

sistema instabile

d) tempo - invarianza

Un sistema è tempo – invariante se:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &\to y(t) \\ x[n] &\to y[n] \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} x(t-t_0) &\to y(t-t_0) \quad \forall t,\ \forall t_0 \\ x[n-n_0] &\to y[n-n_0] \quad \forall n,\ \forall n_0 \end{aligned}\right.$$

Esempi:

$$y(t) = \sin\left[x(t)\right]$$

$$\left.\begin{aligned} &x_1(t) \\ x_2(t) &= x_1(t-t_0) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} &y_1(t) = \sin\left[x_1(t)\right] \\ &y_2(t) = \sin\left[x_1(t-t_0)\right] \\ &= y_1(t-t_0) \end{aligned}\right.$$

tempo - invariante

$$y(t) = t\,x(t)$$

$$\left.\begin{aligned} &x_1(t) \\ x_2(t) &= x_1(t-t_0) \end{aligned}\right\} \longrightarrow \boxed{} \longrightarrow \left\{\begin{aligned} &y_1(t) = t\,x_1(t) \\ &y_2(t) = t x_1(t-t_0) \\ &\neq y_1(t-t_0) = (t-t_0)\,x_1(t-t_0) \end{aligned}\right.$$

tempo - variante

e) linearità

Un sistema è lineare se:

$$\left.\begin{array}{l} x_1(t) \to y_1(t) \\ x_2(t) \to y_2(t) \end{array}\right\} \Longrightarrow ax_1(t) + bx_2(t) \to ay_1(t) + by_2(t)$$

$$\forall a,\ b,\ x_1(t),\ x_2(t)$$

$$\left.\begin{array}{l} x_1[n] \to y_1[n] \\ x_2[n] \to y_2[n] \end{array}\right\} \Longrightarrow ax_1[n] + bx_2[n] \to ay_1[n] + by_2[n]$$

$$\forall a,\ b,\ x_1[n]\ ,\ x_2[n]$$

Proprietà di un sistema lineare: $x(t) = 0 \Longrightarrow y(t) = 0$

La linearità di un sistema suggerisce la seguente strategia per la sua analisi:

a) Rappresentazione del segnale di ingresso come **combinazione lineare** di N funzioni base $x_i(t)$,cui corrispondono **risposte note** $y_i(t)$

$$x(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i x_i(t)$$

b) La risposta del sistema a $x(t)$ corrisponderà a :

$$y(t) = \sum_{i=1}^{N} a_i y_i(t)$$

Scelte **"importanti"** per le funzioni base $x_i(t)$**:**

1a) $$x_i(t) = \delta(t - \tau_i) \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \right)$$

Analisi nel dominio del tempo per segnali e sistemi tempo - continuo

2a) $$x_i(t) = e^{j\omega_i t} = e^{j2\pi f_i t} \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} \right)$$

Analisi nel dominio della frequenza per segnali e sistemi tempo – continuo

Trasformata di Fourier

3a) $$x_i(t) = e^{s_i t} \qquad \left(\sum_{i=1}^{N} \Rightarrow \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} \right)$$

Analisi nel dominio della frequenza complessa per segnali e sistemi tempo – continuo

Trasformata di Laplace

Scelte **"importanti"** per le funzioni base $x_i[n]$

1b) $$x_i[n] = \delta[n-i]$$

Analisi nel dominio del tempo per segnali e sistemi tempo - discreto

2b) $$x_i[n] = e^{j\Omega_i n} \quad \left(\sum_{i=1}^{N} \Rightarrow \int_{\langle 2\pi \rangle} \right)$$

Analisi nel dominio della frequenza per segnali e sistemi tempo – discreto

Trasformata di Fourier

3b) $$x_i[n] = z_i^n \quad \left(\sum_{i=1}^{N} \Rightarrow \oint_{C} \right)$$

Analisi nel dominio della frequenza complessa per segnali e sistemi tempo – discreto

Trasformata Z

Riassunto

- principali proprietà dei sistemi
  - memoria
  - causalità
  - stabilità
  - linearità
  - tempo - invarianza
- analisi dei sistemi LTI:
  - nel dominio del tempo
  - nel dominio della frequenza