

## Campionamento di un segnale tempo-continuo



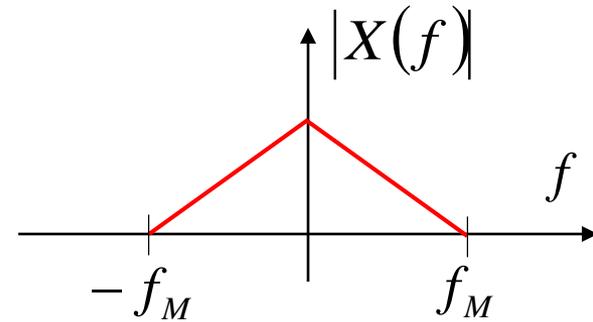
- Segnali a banda limitata
- Campionamento ideale
- Teorema del campionamento
- Conversione da tempo-continuo a tempo-discreto
- Elaborazione tempo-discreta di un segnale tempo-continuo



# Segnali a banda limitata

Sia  $x(t)$  un segnale a banda limitata:

$$X(f) = 0 \quad \text{per } |f| > f_M$$



Es.: segnale telefonico

$$\rightarrow f_M = 3.4 \text{ KHz}$$

segnale musicale in FM

$$\rightarrow f_M = 15 \text{ KHz}$$

segnale video PAL

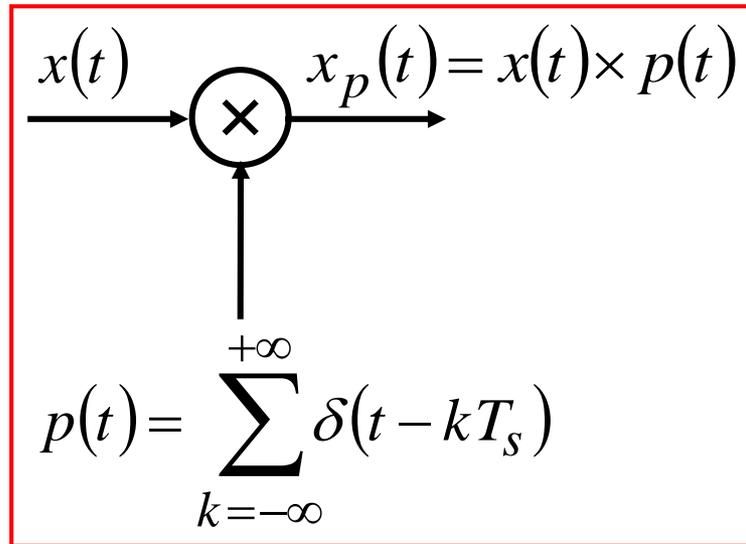
$$\rightarrow f_M = 5 \div 6 \text{ MHz}$$

**Nelle telecomunicazioni tutti i segnali sono a banda limitata (o rigorosamente, o praticamente)**



# Campionamento ideale

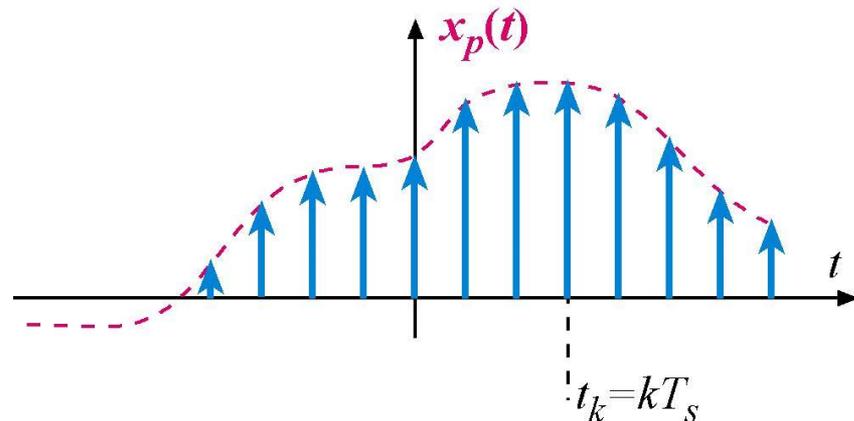
Si consideri l'operazione descritta dal seguente sistema:



$$x_p(t) = x(t)p(t) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

$$x_p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \delta(t - kT_s)$$

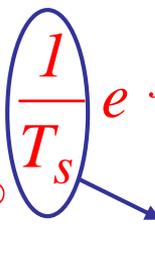
Il segnale  $x(t)$  risulta **“campionato”** con impulsi ideali



Valutazione dello spettro di  $x_p(t)$

$p(t)$  è un segnale periodico:

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{T_s} \right) e^{jk2\pi f_s t} \quad f_s = \frac{1}{T_s}$$



$$x_p(t) = x(t) p(t) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(t) e^{jk2\pi f_s t}$$

Spettro di  $x_p(t)$ :

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F \left\{ x(t) e^{j2\pi k f_s t} \right\} = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - k f_s)$$

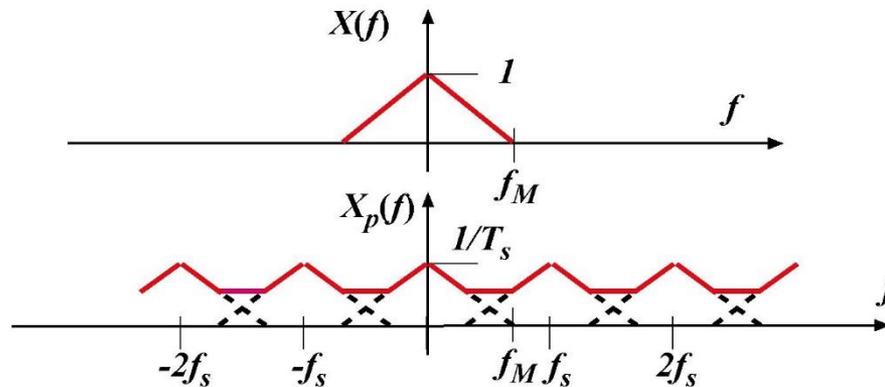
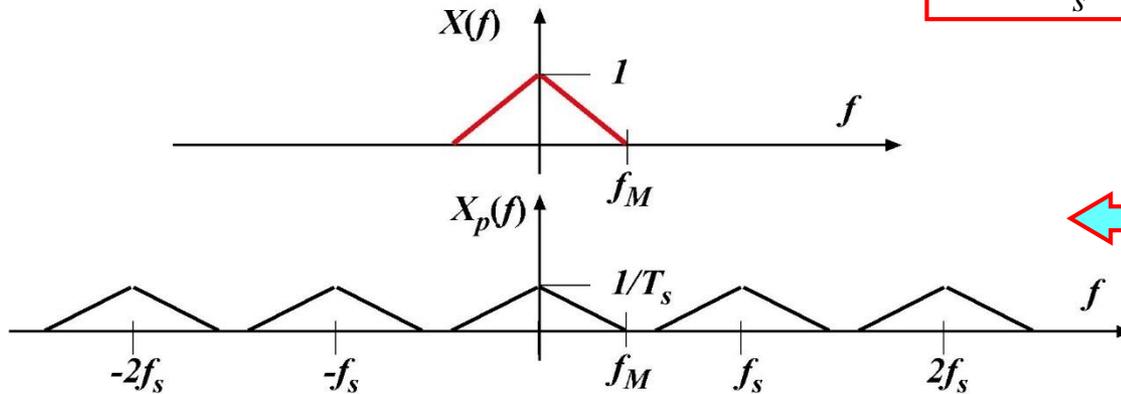




# Campionamento ideale

Spettro del segnale  
campionato

$$f_s = \frac{1}{T_s} = \text{frequenza di campionamento}$$

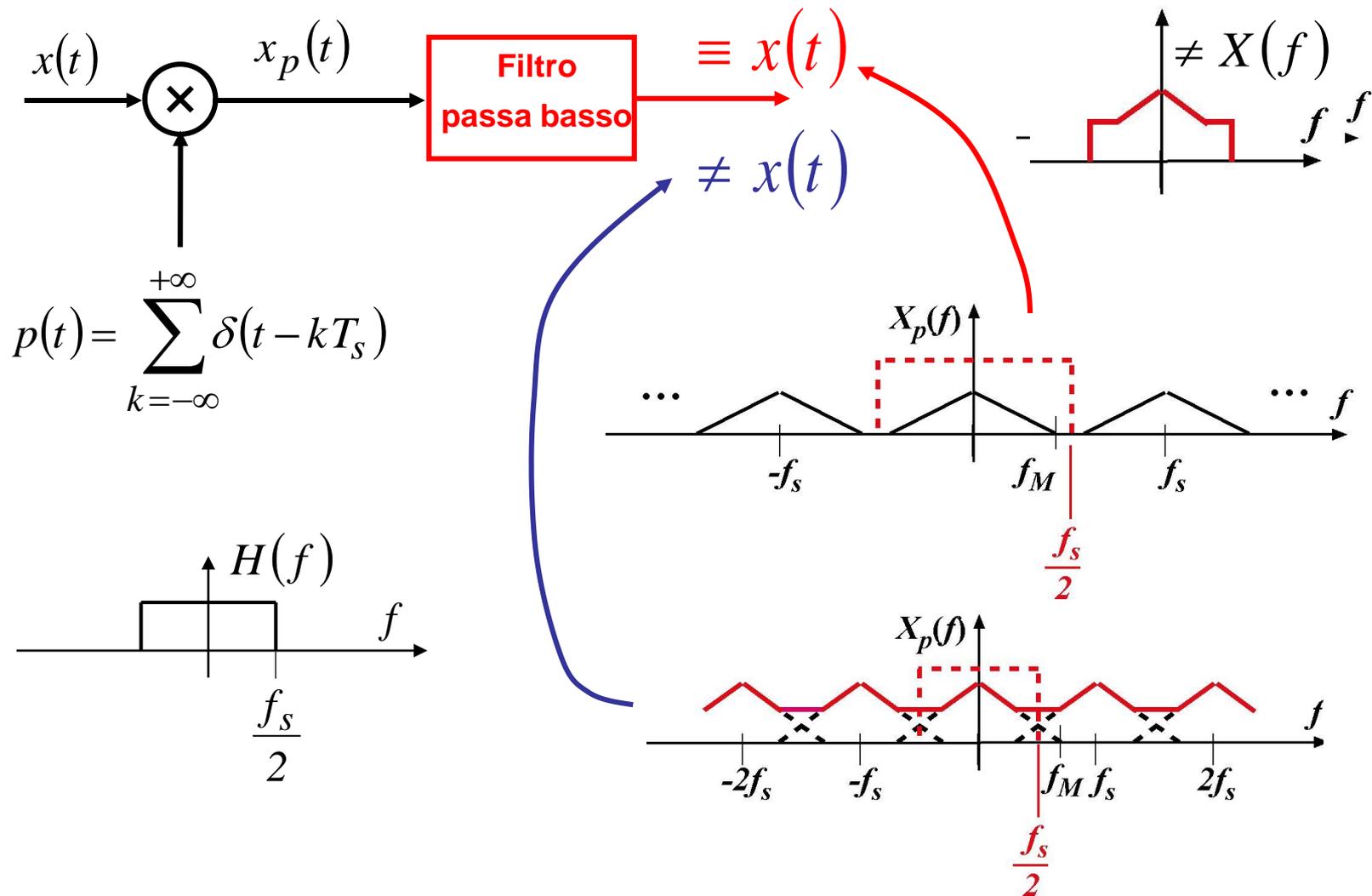


$f_s < 2f_M$

Distorsione (*aliasing*)



# Ricostruzione del segnale



# Teorema del campionamento

Un segnale a banda limitata è univocamente determinato dai suoi valori  $x(kT_s)$ ,  $k=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  se:

$$\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2 f_M$$

La sua **esatta** ricostruzione avviene facendo passare una successione di impulsi ideali pesati da  $x(kT_s)$  attraverso un filtro passa basso ideale, avente frequenza di taglio compresa tra

$$f_M \text{ e } (f_s - f_M)$$

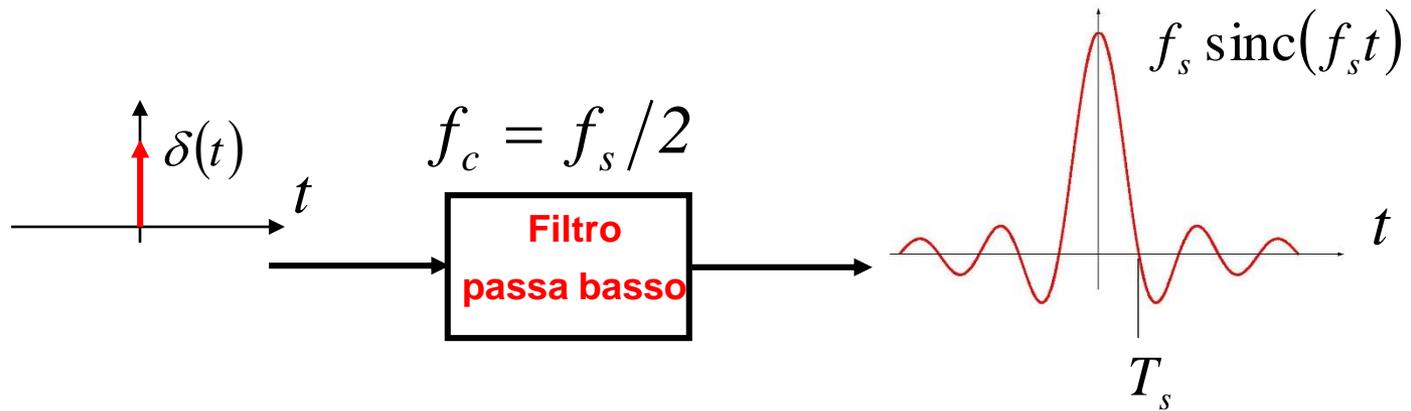
Attenzione:

se  $f_s < 2 f_M$ , non viene ricostruito **il segnale originario**, ma viene ricostruito un **“altro” (alias)** segnale

Fenomeno di “aliasing”

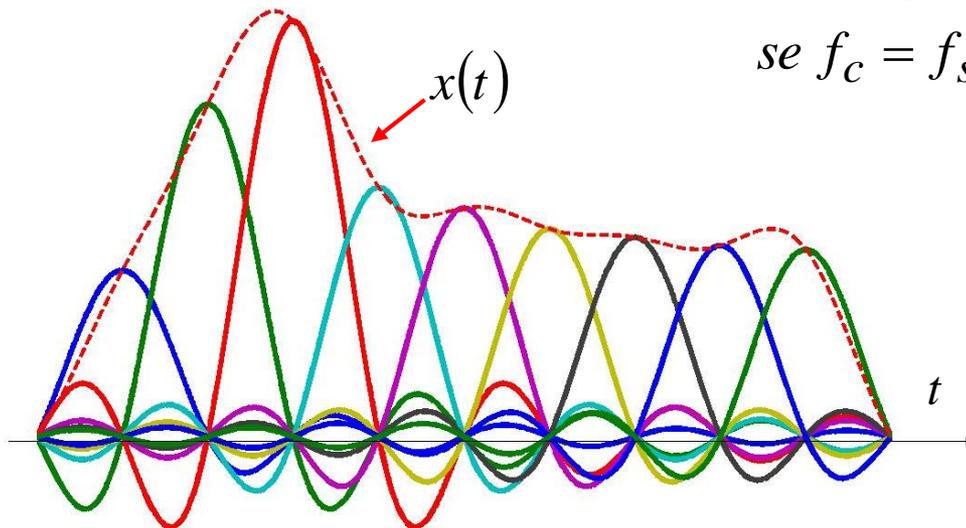


# Nel dominio del tempo



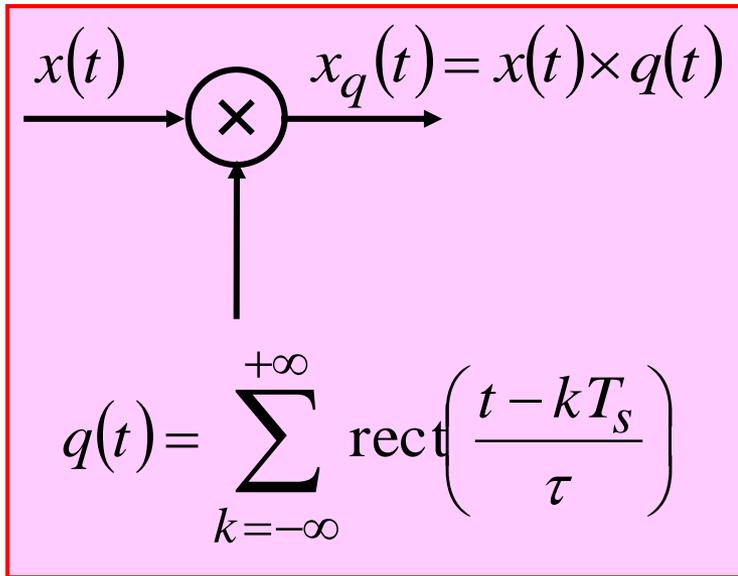
$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \text{sinc}[f_s(t - kT_s)]$$

se  $f_c = f_s/2$



# Campionamento naturale

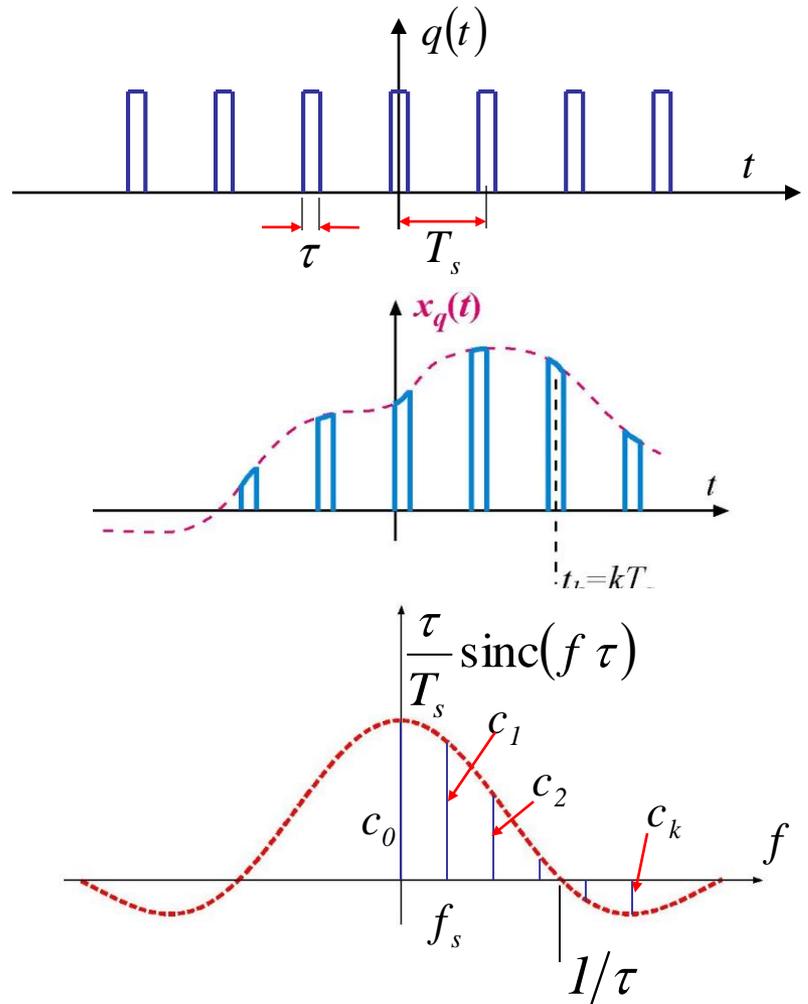
(per studenti volenterosi)



$$q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{jk2\pi f_s t}$$

$$c_k = \frac{\tau}{T_s} \text{sinc}(f \tau) \Big|_{f=k \frac{1}{T_s}}$$

Campionamento fatto con impulsi reali di durata  $\tau$  e ampiezza unitaria



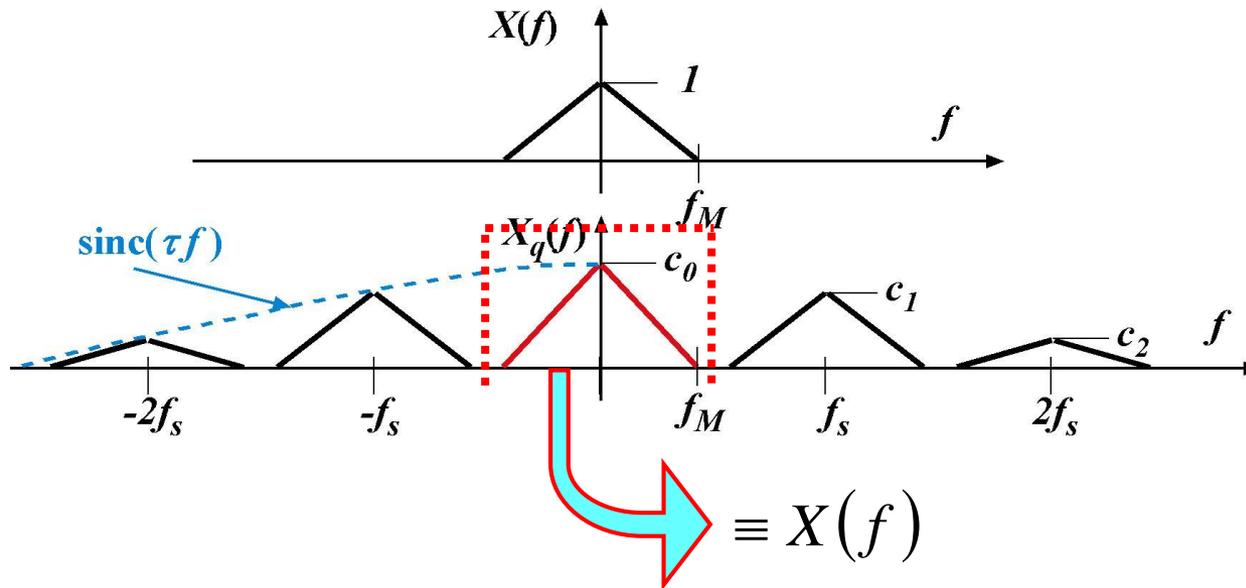
# Campionamento naturale

(per studenti volonterosi)

Valutazione dello spettro di  $x_q(t)$

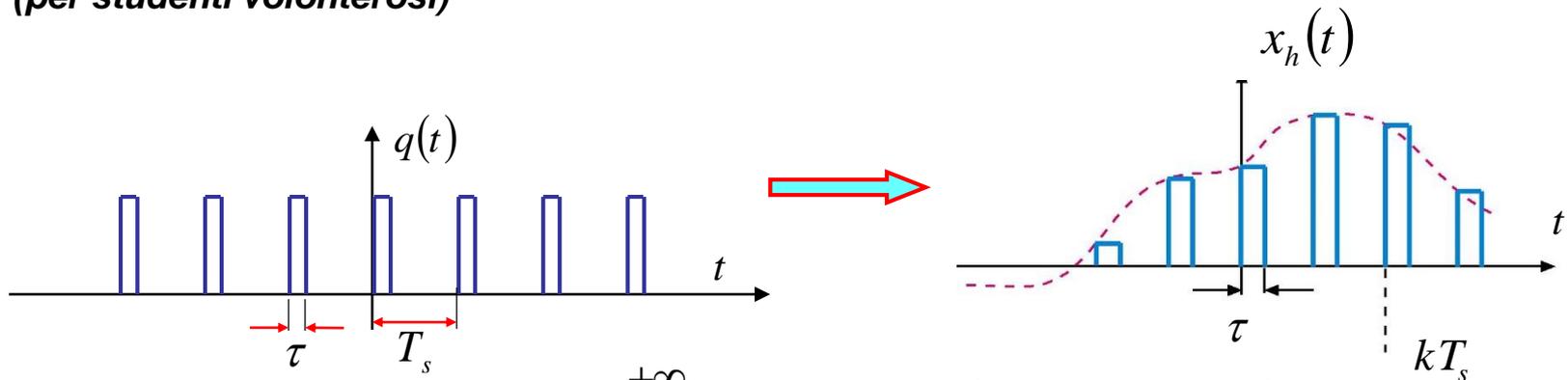
$$x_q(t) = x(t) \times q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k x(t) e^{j2k\pi f_s t}$$

$$X_q(f) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k \mathcal{F} \left\{ x(t) e^{j2\pi k f_s t} \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k X(f - k f_s)$$



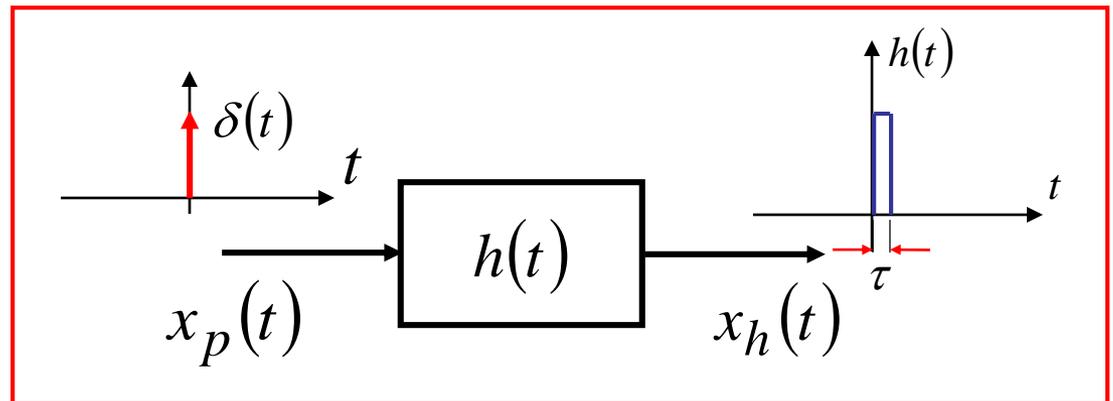
# Campionamento a tenuta

(per studenti volonterosi)



$$x_h(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(kT_s) \text{rect}\left(\frac{t - \tau/2 - kT_s}{\tau}\right)$$

$x_h(t)$  può essere ottenuto così:



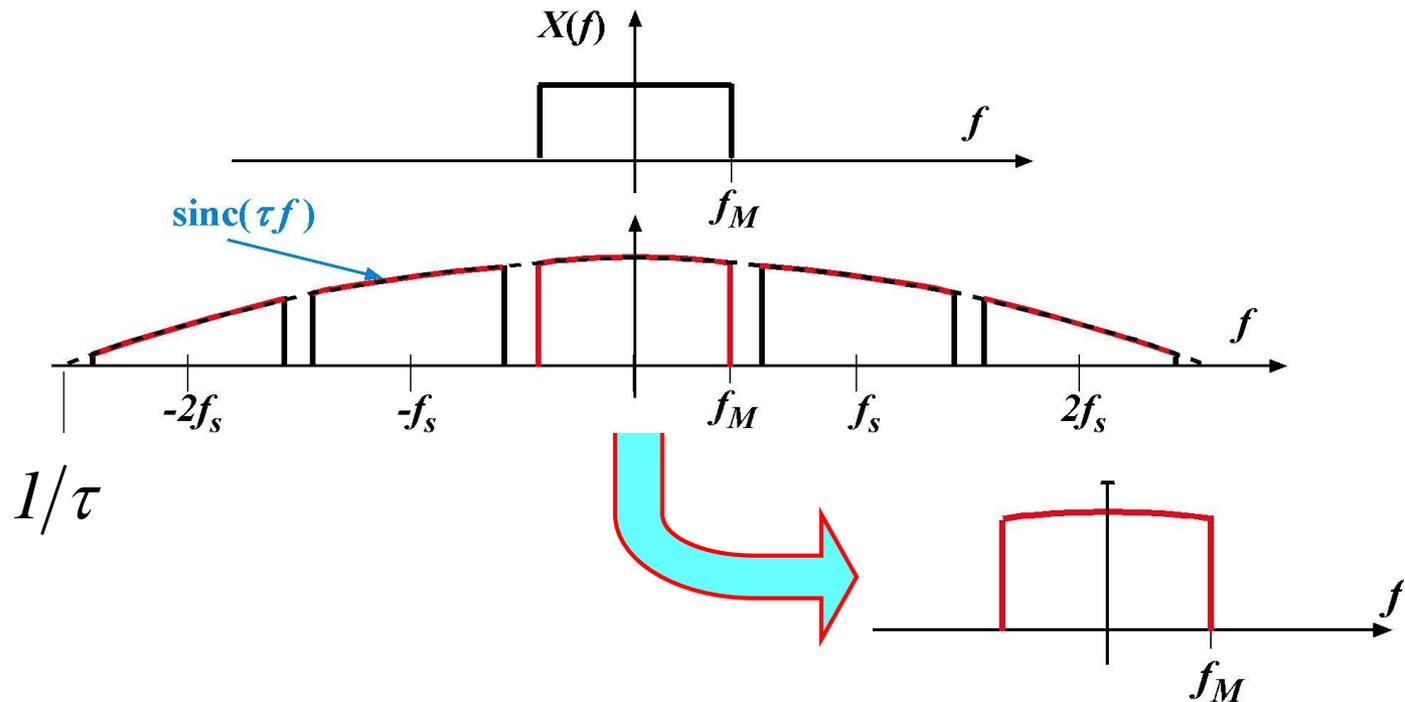
Pertanto: 
$$X_h(f) = X_p(f)H(f) = X_p(f)\tau \text{sinc}(f \tau)$$



# Campionamento a tenuta

(per studenti volonterosi)

Considerazioni sullo spettro



È presente una distorsione,  
tanto minore quanto minore è  $\tau$



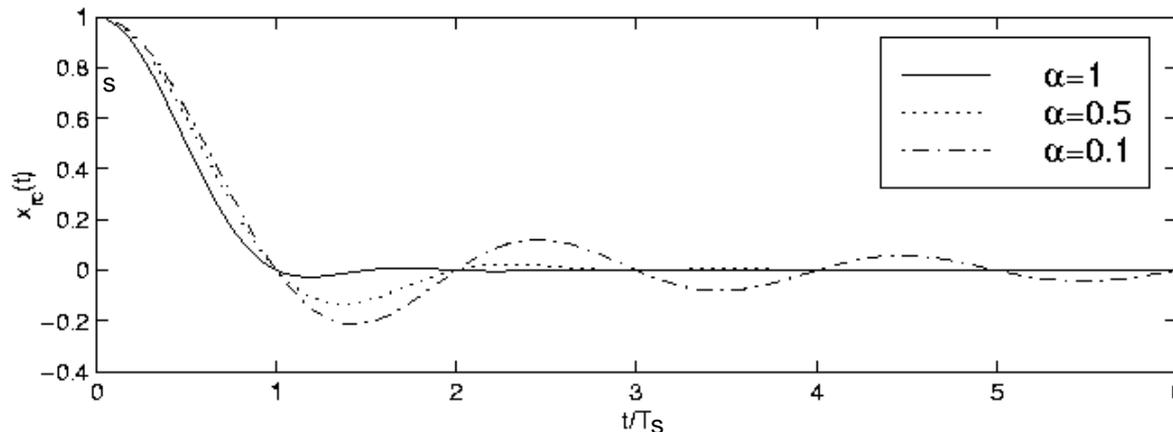
# Un filtro realistico: il coseno rialzato

Transizione sagomata di tipo sinusoidale ('coseno rialzato' o '*Raised Cosine*').

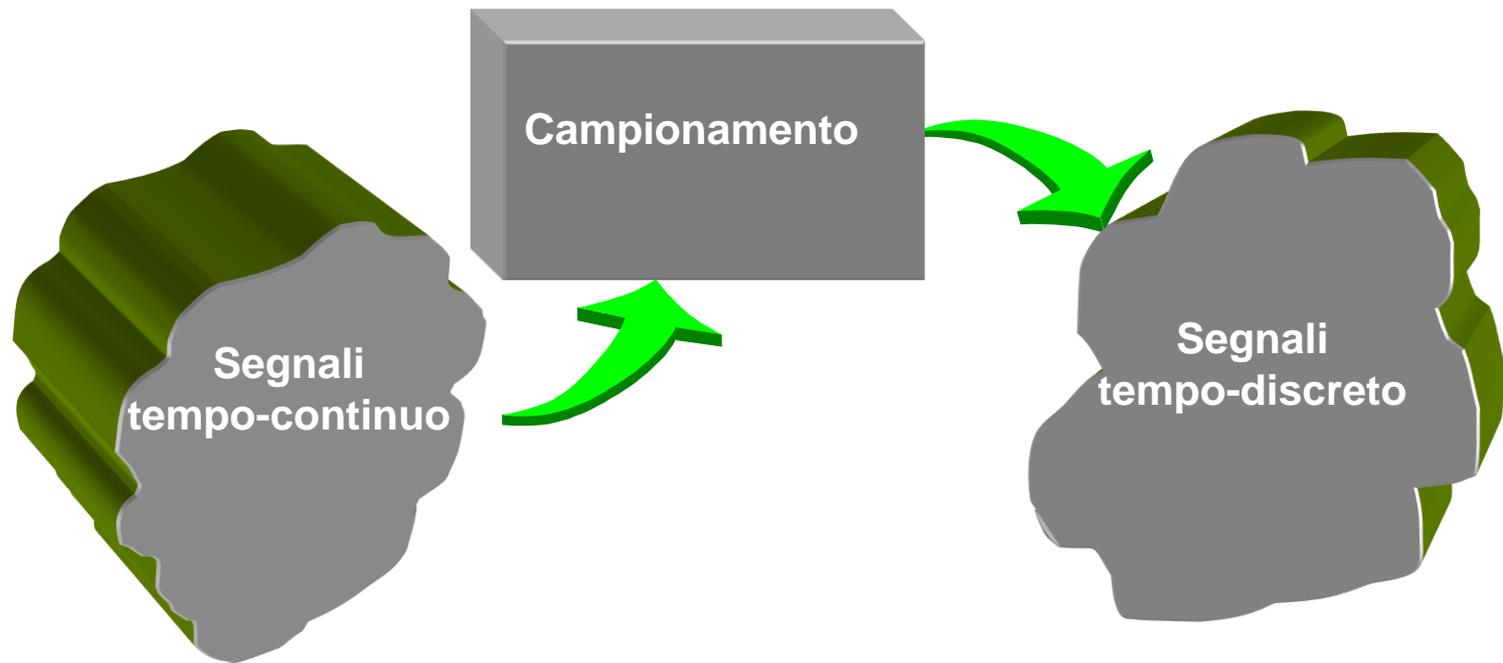
$$H_{RC}(f) = \begin{cases} T_s & |f| \leq (1-\alpha)/2T_s \\ \frac{T_s}{2} \left( 1 + \cos \left( \pi \frac{T_s}{\alpha} \left( |f| - \frac{1-\alpha}{2T_s} \right) \right) \right) & (1-\alpha)/2T_s \leq |f| \leq (1+\alpha)/2T_s \\ 0 & |f| \geq (1+\alpha)/2T_s \end{cases}$$

All'aumentare di  $\alpha$  aumenta la banda, ma aumenta anche la rapidità con cui si smorza la risposta impulsiva (e quindi diminuisce l'anticipo necessario). Con  $\alpha=0$  riotteniamo la funzione sampling.

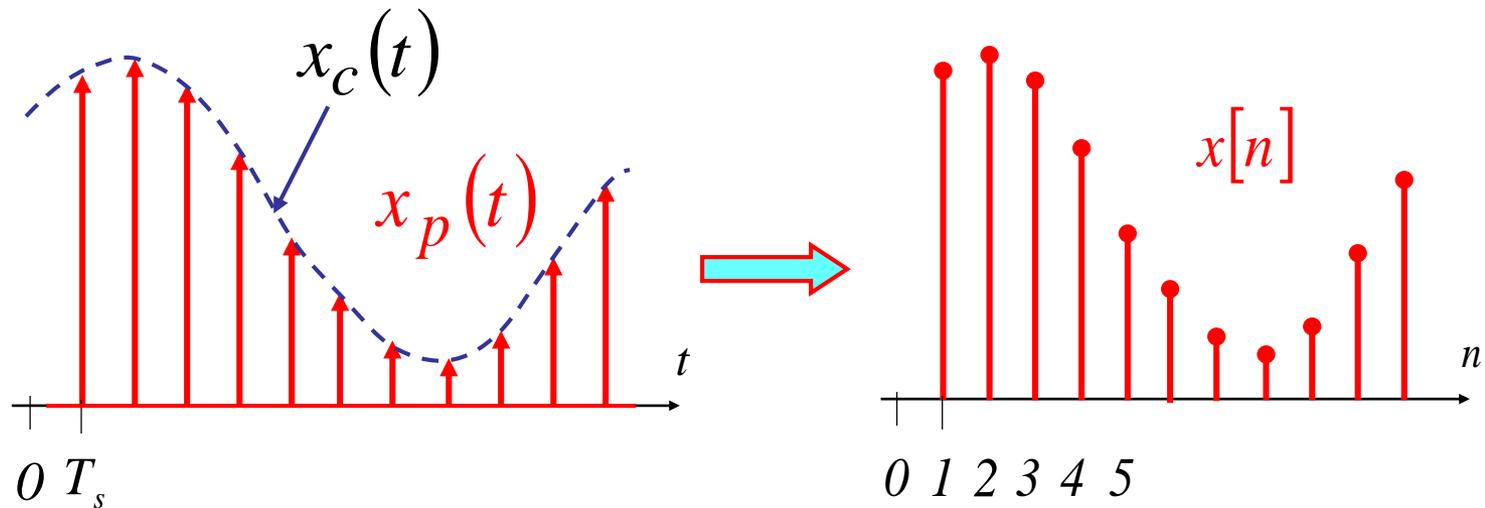
$$h_{RC}(t) = \text{sinc} \left( \frac{t}{T_s} \right) \frac{\cos(\alpha\pi t/T_s)}{1 - (2\alpha t/T_s)^2}$$



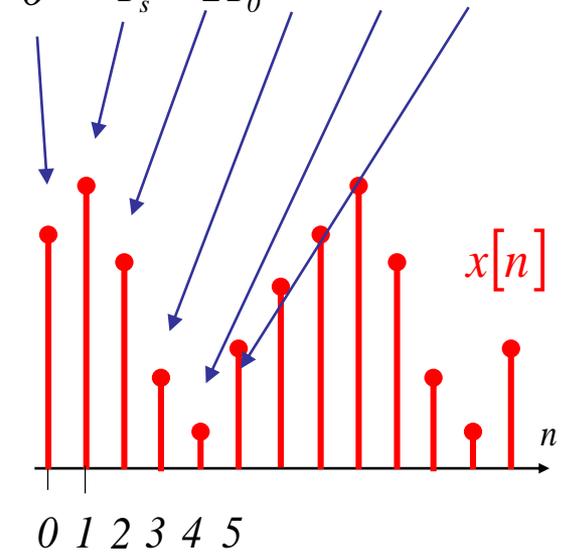
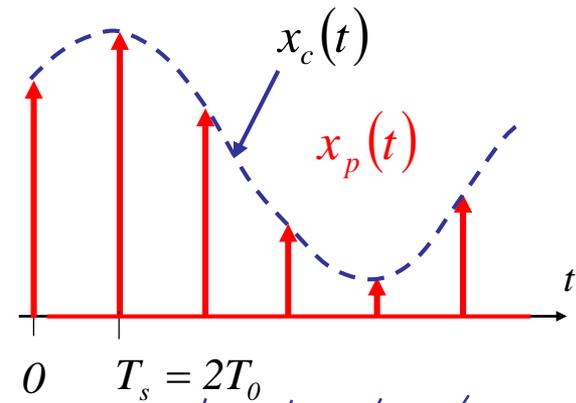
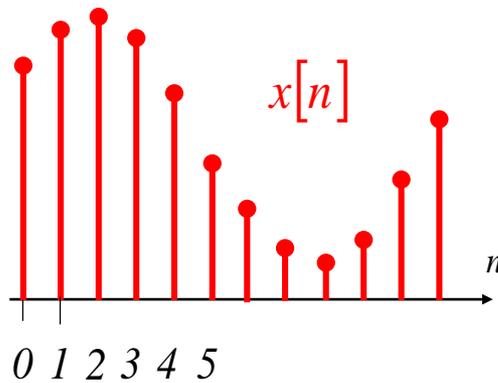
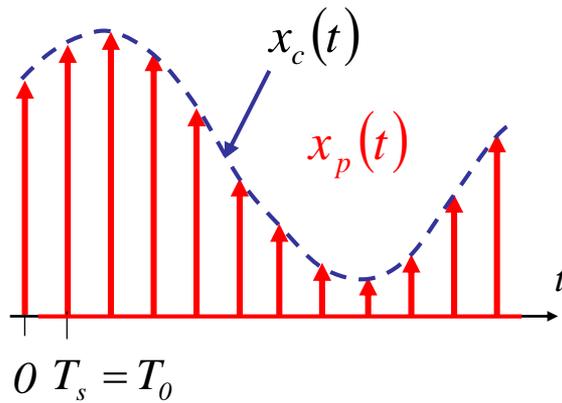
# Da tempo-continuo a tempo-discreto



# Conversione TC - TD



# Conversione TC - TD

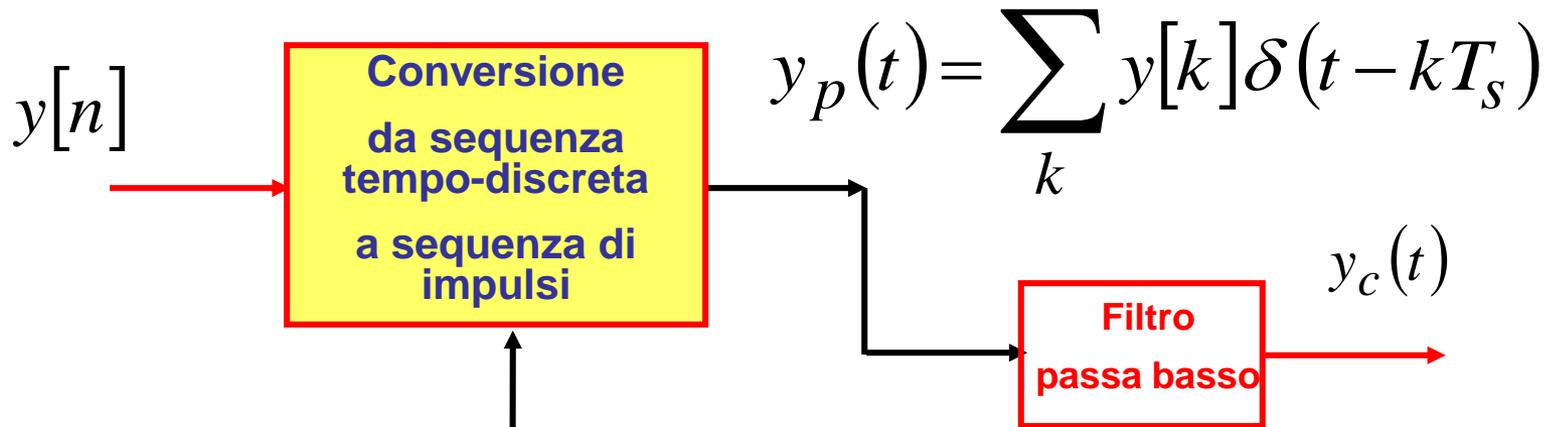


Il segnale tempo-discreto è una sequenza: il concetto di intervallo temporale non esiste più.



# Da tempo-discreto a tempo-continuo

## Conversione Discreto - Continuo

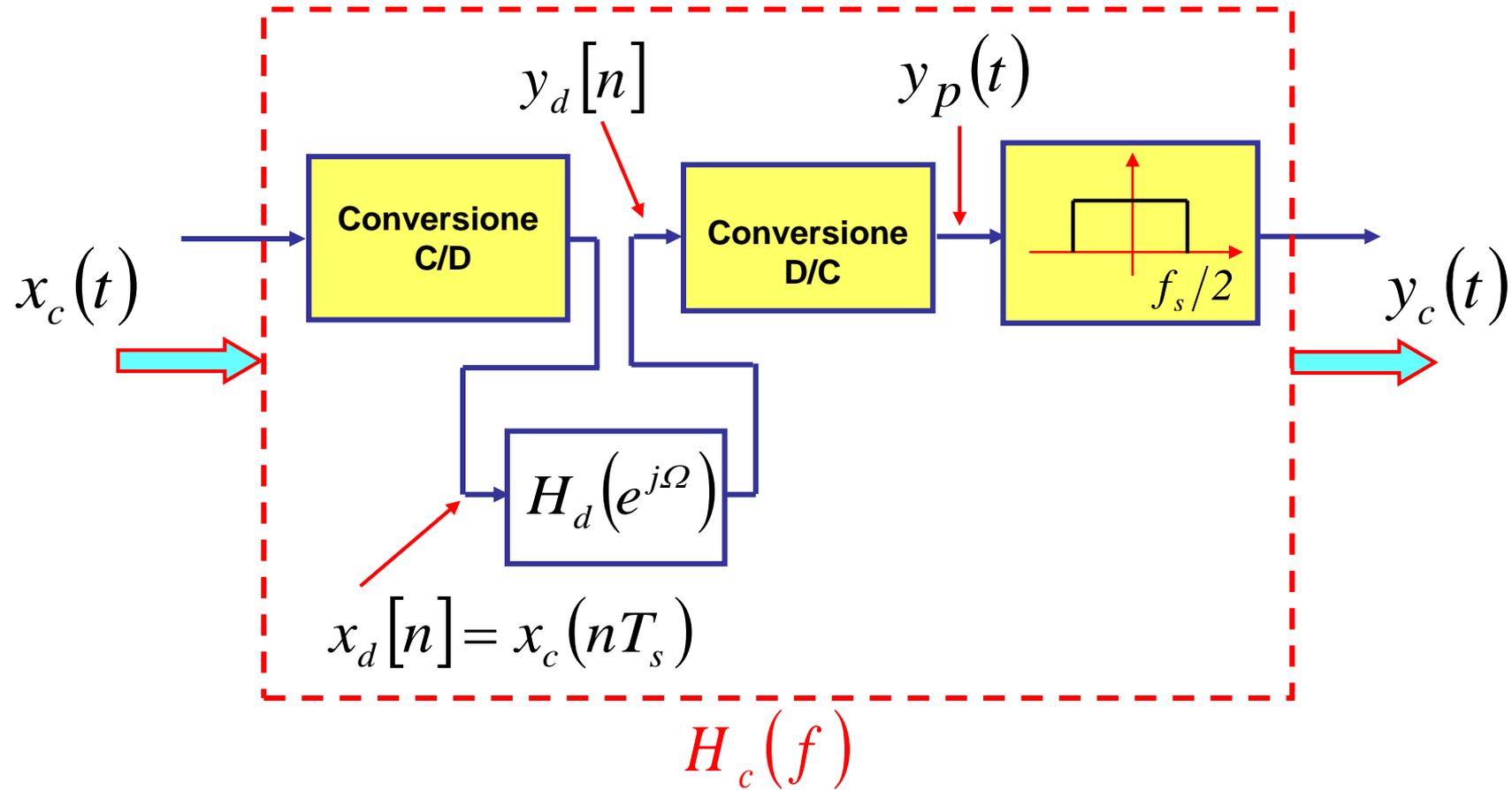


$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT_s)$$

Nella conversione **TD/TC** viene reintrodotta l'intervallo temporale  $T_s$



# Elaborazione tempo-discreta di un segnale tempo-continuo



## Analisi nel dominio della frequenza

Segnale campionato

$$x_p(t) = \sum_n x_c(nT_s) \delta(t - nT_s)$$

Ricordando che:  $\delta(t - nT_s) \xleftrightarrow{F} e^{-j2\pi f nT_s}$

$$X_p(f) = \sum_n x_c(nT_s) e^{-j2\pi f nT_s}$$

(altra forma dello spettro di  $x_p(t)$ )

Per il segnale  
tempo discreto:

$$X_d(e^{j\Omega}) = \sum_n x_d[n] e^{-j\Omega n} = \sum_n x_c(nT_s) e^{-j\Omega n}$$

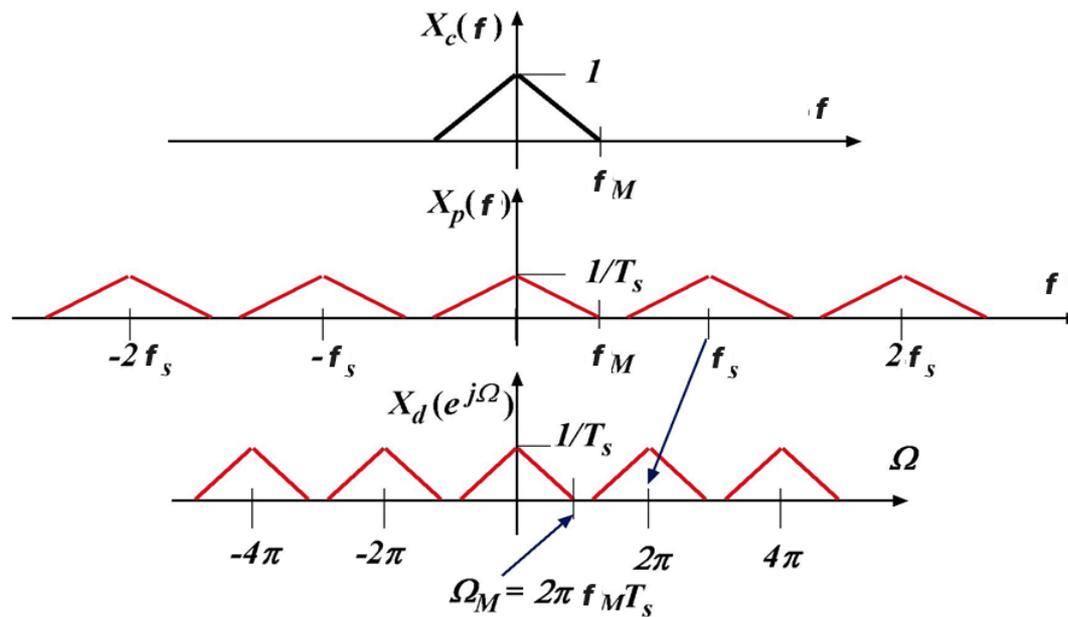
$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right)$$



# Esempio

$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right)$$

$$X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \Rightarrow X_d(e^{j\Omega}) = \frac{1}{T_s} \sum_k X_c\left(\frac{\Omega/2\pi - k}{T_s}\right)$$



# Da $y_d[n]$ a $y_c(t)$

In maniera analoga:

$$y_d[n] \xleftrightarrow{F} Y_d(e^{j\Omega}) = \sum_n y_d[n] e^{-j\Omega n}$$

Re-inserimento dell'intervallo di campionamento:

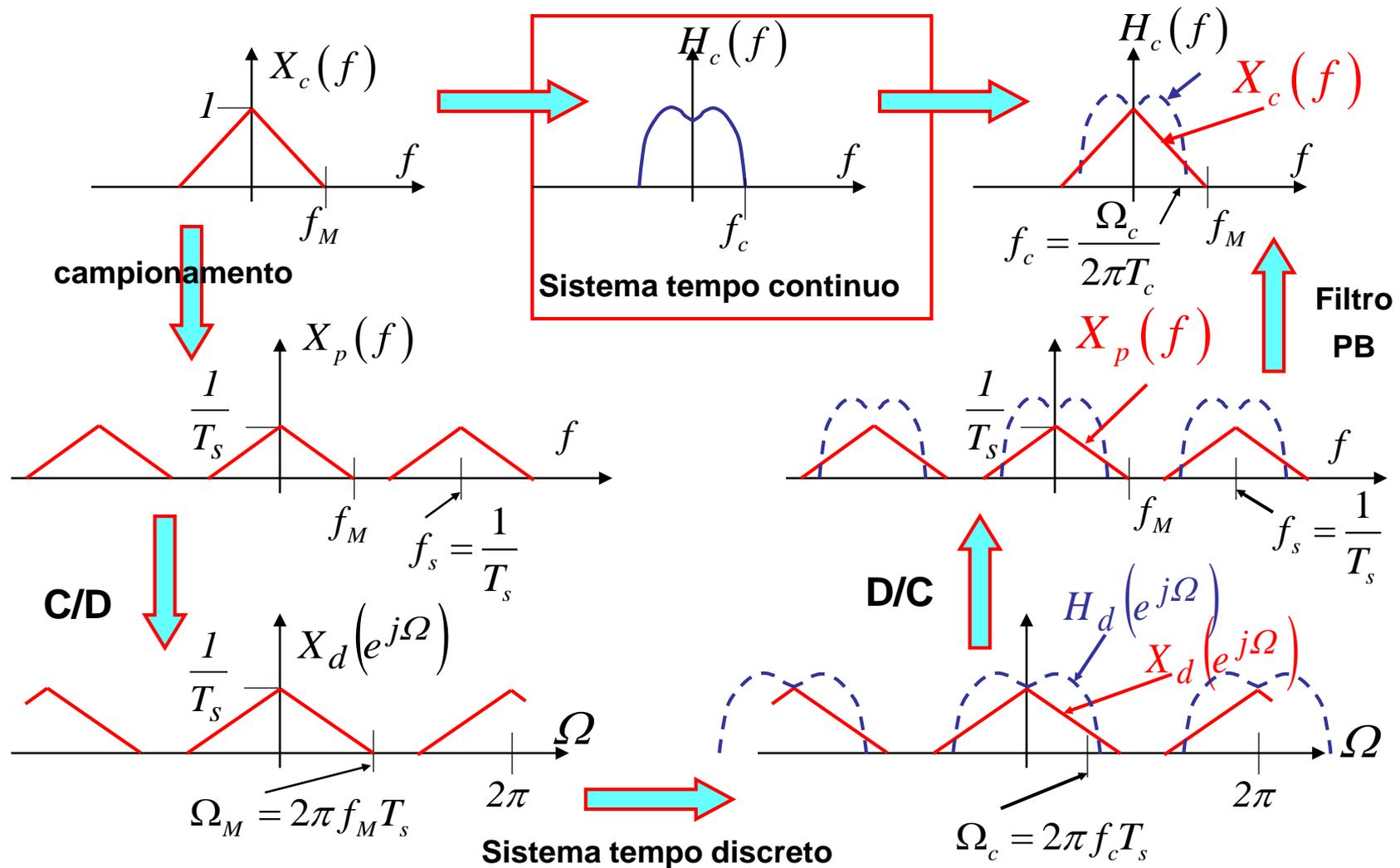
$$y_p(t) = \sum_n y_d[n] \delta(t - nT_s) \quad \rightarrow \quad Y_p(f) = \sum_n y_d[n] e^{-j2\pi f nT_s}$$

$$Y_p(f) = Y_d(e^{j2\pi f T_s})$$

$$Y_c(f) = \begin{cases} Y_p(f) = Y_d(e^{j2\pi f T_s}) & |f| < f_{\text{taglioFPB}} \\ 0 & |f| > f_{\text{taglioFPB}} \end{cases}$$



# Relazione tra $H_d(e^{j\Omega})$ e $H_c(f)$



# Campionamento della TF di un segnale tempo discreto

$$X_s(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X\left(f - \frac{n}{T_s}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j2\pi fnT_s}$$

Se :  $F_s = \frac{1}{T_s} \geq 2f_M$  si ha  $X(f) = \begin{cases} T_s X_s(f) & |f| \leq f_M \leq f_s/2 \\ 0 & |f| > f_M \end{cases}$

$$X_s(e^{j\Omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s) e^{-j\Omega n} = X_s(f) \Big|_{f=\frac{\Omega}{2\pi T_s}}$$

Ipotizzando che  $N$  sia la durata (approssimata) del segnale (ipotizziamo per semplicità che  $N$  sia pari)

$$X_k = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}kn} = X_s(e^{j\Omega}) \Big|_{\Omega=\frac{2\pi}{N}k} = \frac{1}{T_s} X(f) \Big|_{f=\frac{k}{NT_s}}, \quad k = -\frac{N}{2} : \frac{N}{2} - 1$$

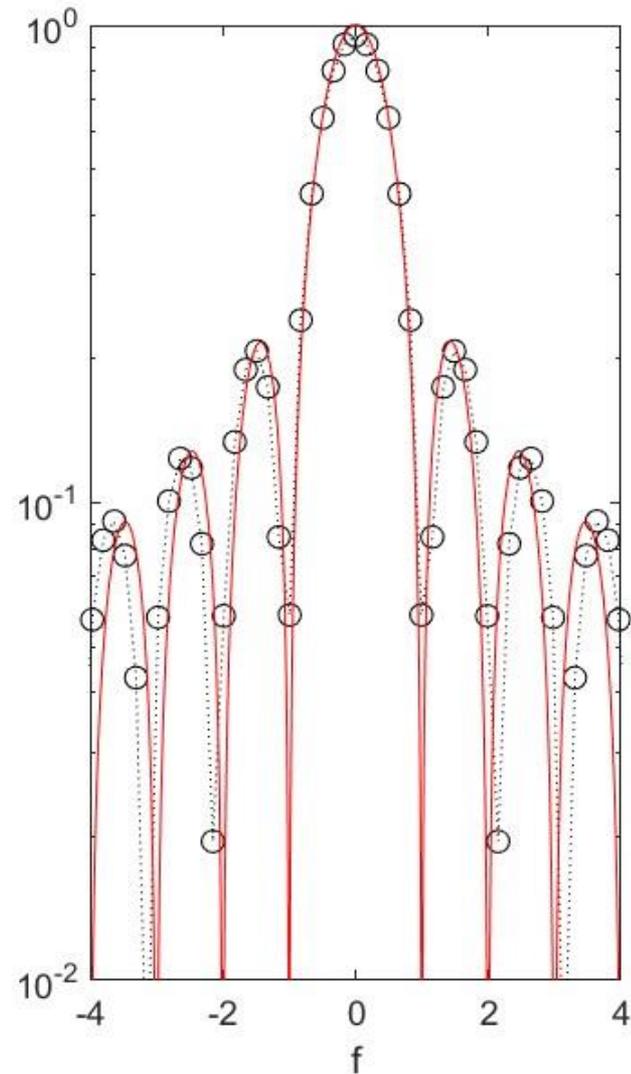
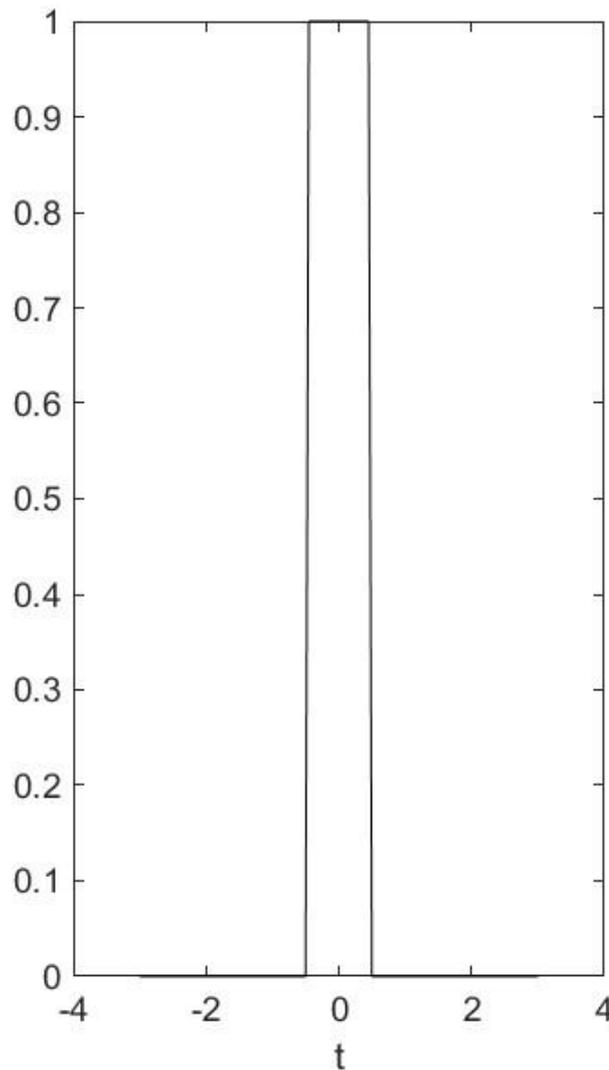


# Esempio: $\text{rect}(t/T)$ (S1)

```
clear;
T1=1;%durata rettangolo di cui calcoliamo la trasformata
T0=3;%segnale tra -T0 e T0
Ts=1/50;%intervallo di campionamento
fm=4;%visualizzazione fra -fm e fm
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
t=-T0:Ts:T0;%istanti campionamento
x=zeros(1,length(t));
x(abs(t)<T1/2)=1; subplot(1,2,1); plot(t,x,'k');xlabel('t');
Xt=T1*sinc(ft*T1);
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1;
om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); semilogy(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f');
hold on
semilogy(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]);set(gca,'Ylim',[.01,1]); hold off;
```



# rect(t/T)

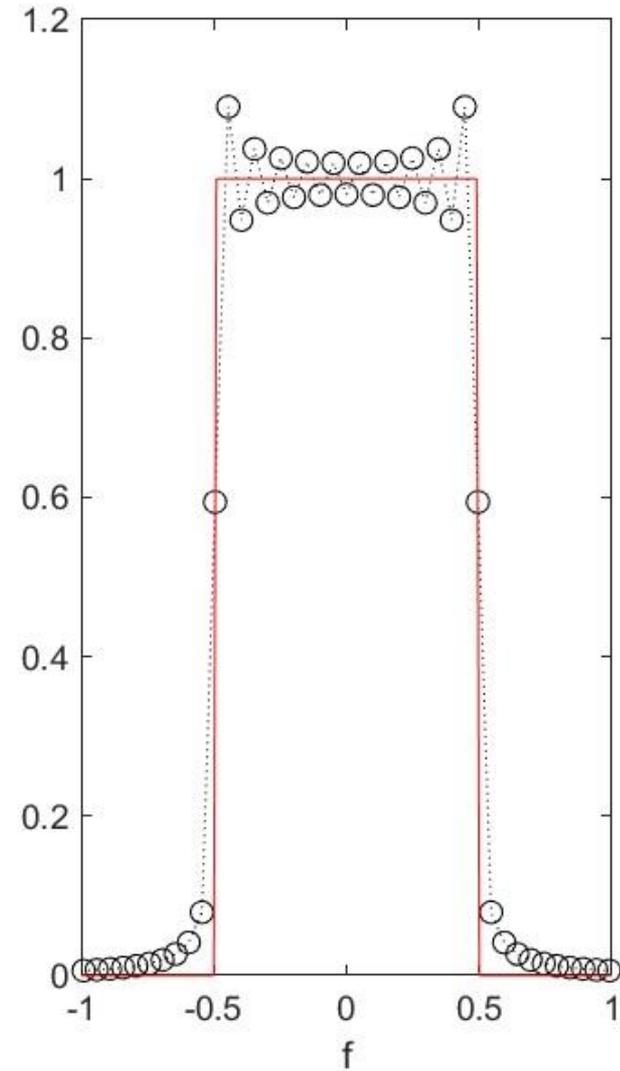
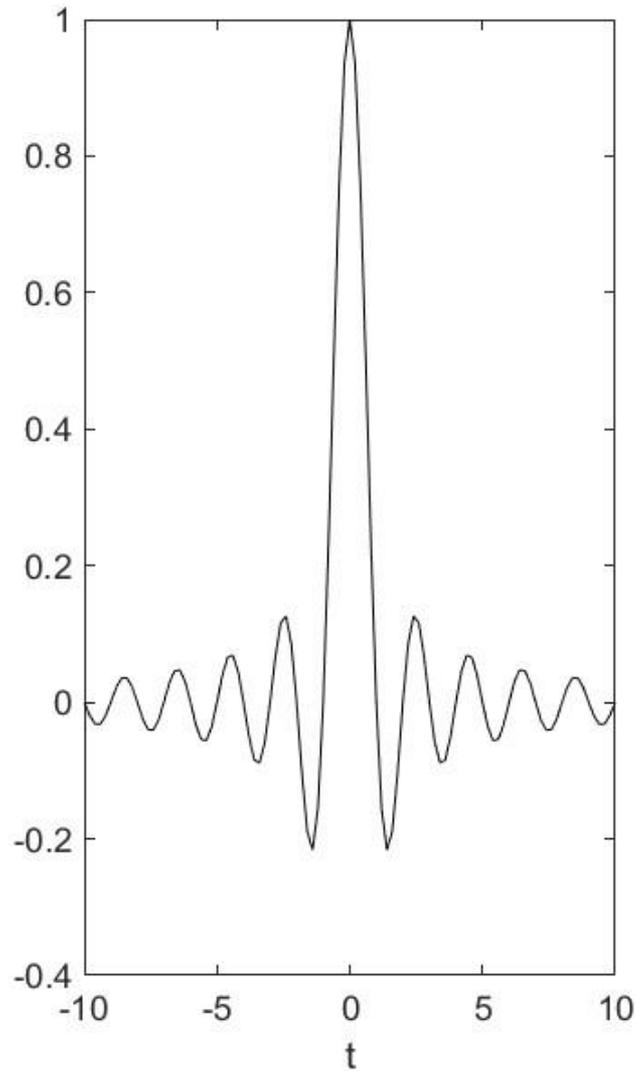


## Esempio: Bsinc(BT) (S2)

```
clear; %segnale di durata infinita e banda limitata sinc
B=1;%Banda sinc di cui calcoliamo la trasformata
T0=10;%massimo valore asse dei tempi
Ts=1/5;%intervallo di campionamento
fm=1;
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
t=-T0:Ts:T0;%istanti campionamento
x=B*sinc(B*t);subplot(1,2,1);plot(t,x,'k');xlabel('t');
Xt=zeros(1,length(ft));
Xt(abs(ft)<B/2)=1;
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1;
om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); plot(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f');
hold on
plot(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]); hold off;
```



# Bsinc(BT)

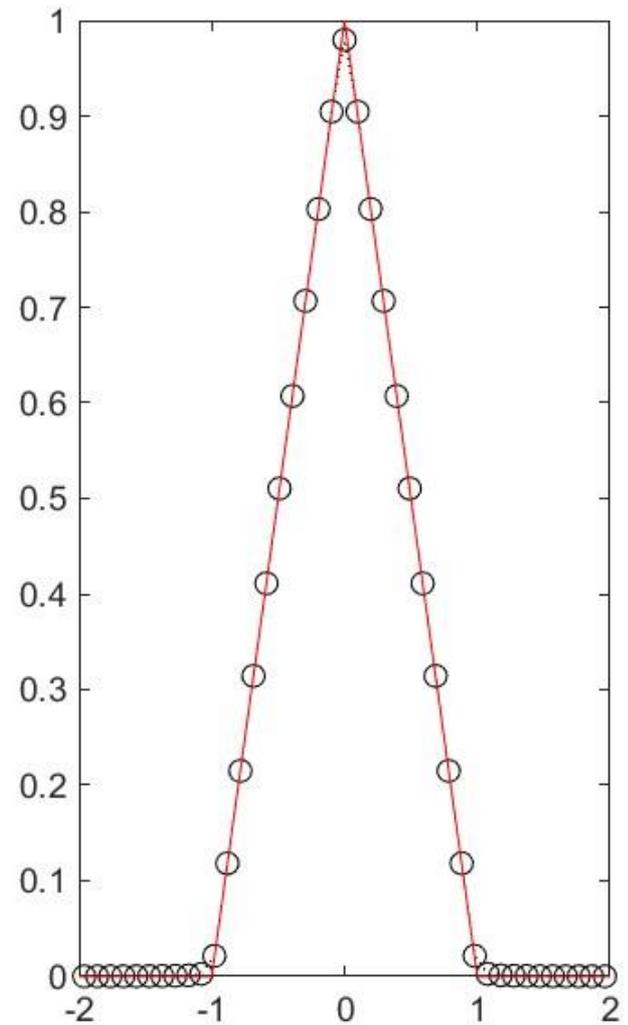
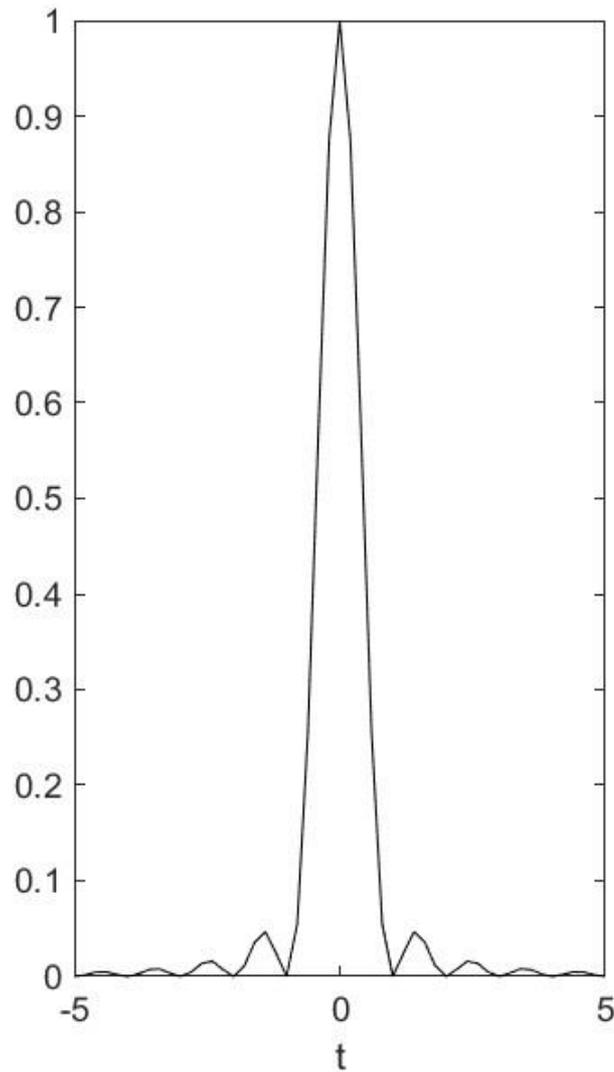


## Esempio: $(\text{Bsinc}(B/T))^2$ (S3)

```
clear; %(Bsinc(B/T))^2
B=1;%Banda sinc2 di cui calcoliamo la trasformata
T0=5;%massimo valore asse dei tempi
Ts=1/5;%intervallo di campionamento
fm=2;
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
t=-T0:Ts:T0;%istanti campionamento
x=(B*sinc(B*t)).^2; subplot(1,2,1);plot(t,x,'k');xlabel('t');
Xt=zeros(1,length(ft));
Xt(abs(ft)<B)=B-abs(ft(abs(ft)<B)/B);
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1;
om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); plot(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o');
hold on
plot(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]); hold off;
```



# Bsinc(BT)



# Riassunto

Un segnale tempo-continuo a banda limitata può essere ricostruito esattamente a partire dai suoi campioni se:

$$\frac{1}{T_s} = f_s \geq 2f_M$$

Spettro di un segnale campionato:  $X_p(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s)$

Conversione C – D:  $x[n] = x(nT_s)$

$F$


$$X_d(e^{j\Omega}) = X_p\left(\frac{\Omega}{2\pi T_s}\right)$$

Conversione D – C:  $Y_p(f) = Y_d(e^{j2\pi f T_s})$

$$Y_c(f) = \begin{cases} Y_p(f) = Y_d(e^{j2\pi f T_s}) & |f| < f_{\text{taglioFPB}} \\ 0 & |f| > f_{\text{taglioFPB}} \end{cases}$$

