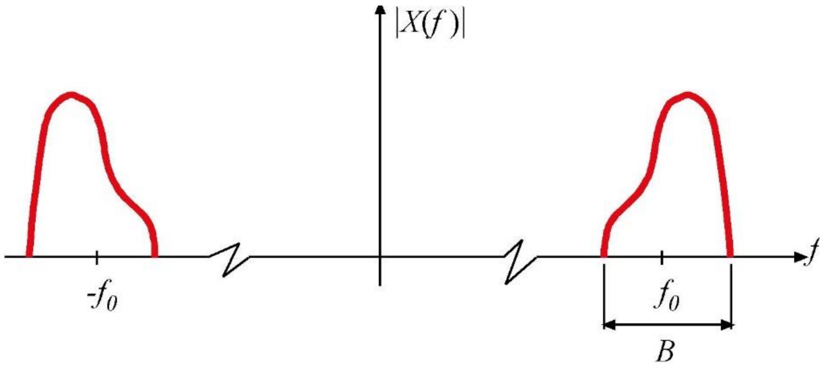
- Segnali passa-banda
- Inviluppo complesso
- Trasformata di Hilbert
- Segnale analitico
- Analisi dei sistemi LTI passa-banda
- Ritardo di fase, ritardo di gruppo

Segnale passa banda:

segnale il cui spettro $X(f)$ è nullo ovunque, tranne su un intervallo (usualmente piccolo) di frequenze attorno a una frequenza $f_0$ .

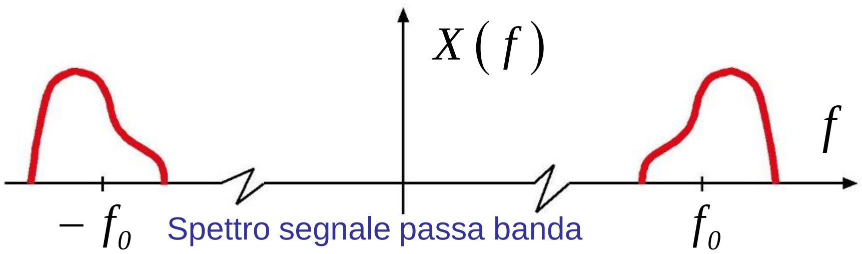
$$X(f)=0 \quad \text{sicuramente per } \left|f-f_0\right|>B \qquad B<f_0$$




Attenzione:

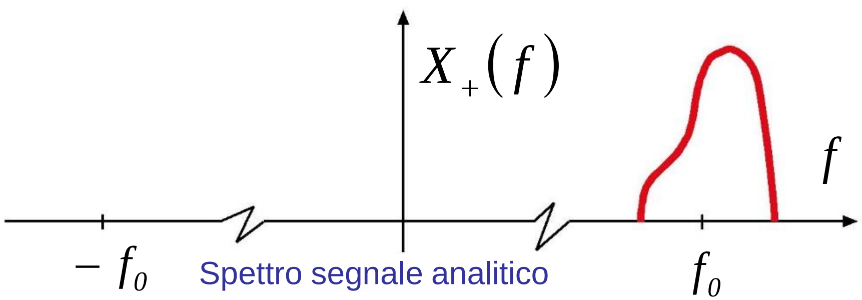
$f_0$ **potrebbe non essere** la frequenza al centro dell'intervallo $B$.

Associamo al segnale in banda traslata, un segnale (generalmente complesso) in banda base:



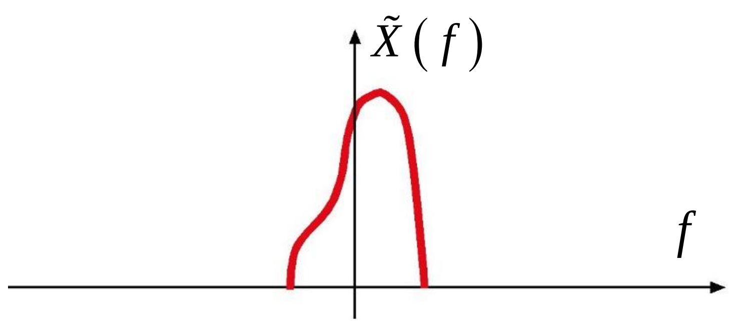

Spettro segnale passa banda

$$X_+(f) = 2X(f)U(f)$$




Spettro segnale analitico

$$x_+(t) = F^{-1}\{X_+(f)\}$$




Spettro inviluppo complesso

$$\boxed{\begin{aligned} \tilde{X}(f) &= X_+(f+f_0) \\ \tilde{x}(t) &= x_+(t)e^{-j2\pi f_0 t} \end{aligned}}$$

- Ricordando che: $F\{u(t)\} = \frac{1}{2}\left(\delta(f) + \frac{1}{j\pi f}\right)$

per dualità si ha: $F^{-1}\{F(f)\} = \frac{1}{2}\left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right)$

- Pertanto: $x_+(t) = F^{-1}\{2X(f)U(f)\} = x(t) \otimes \left(\delta(t) + \frac{j}{\pi t}\right) = x(t) + j\hat{x}(t)$

dove $\hat{x}(t)$ è detta trasformata di Hilbert di $x(t)$.

- Si ha: $x(t) = \Re e\{x_+(t)\}$

- Inoltre:

$$\boxed{\begin{aligned} &\tilde{X}(f) = X_+(f + f_0) \\ &\tilde{x}(t) = x_+(t)e^{-j2\pi f_0 t} = \left(x(t) + j\hat{x}(t)\right)e^{-j2\pi f_0 t} = x_c(t) + jx_s(t) \\ &x_+(t) = \tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t} = \left(x_c(t) + jx_s(t)\right)e^{j2\pi f_0 t} \end{aligned}}$$

dove $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono detti parte in fase e parte in quadratura del segnale (con riferimento alla frequenza $f_0$)

Da funzione di $t$ $\Rightarrow$ a funzione di $t$

Può essere considerata come un'operazione eseguita da un **opportuno** sistema **LTI**

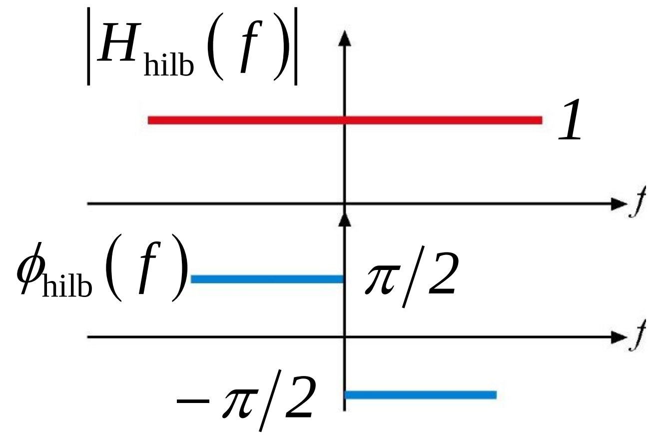
$$x(t) \longrightarrow \boxed{h_{\text{hilb}}(t)} \longrightarrow \hat{x}(t)$$

$$\boxed{h_{\text{hilb}}(t) = \frac{1}{\pi t}}$$

**Rem.:** $\operatorname{sgn}(t) \Leftrightarrow \dfrac{1}{j\pi f}$

Per dualità:

$$\boxed{H_{\text{hilb}}(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\} = -j\operatorname{sgn}(f)}$$

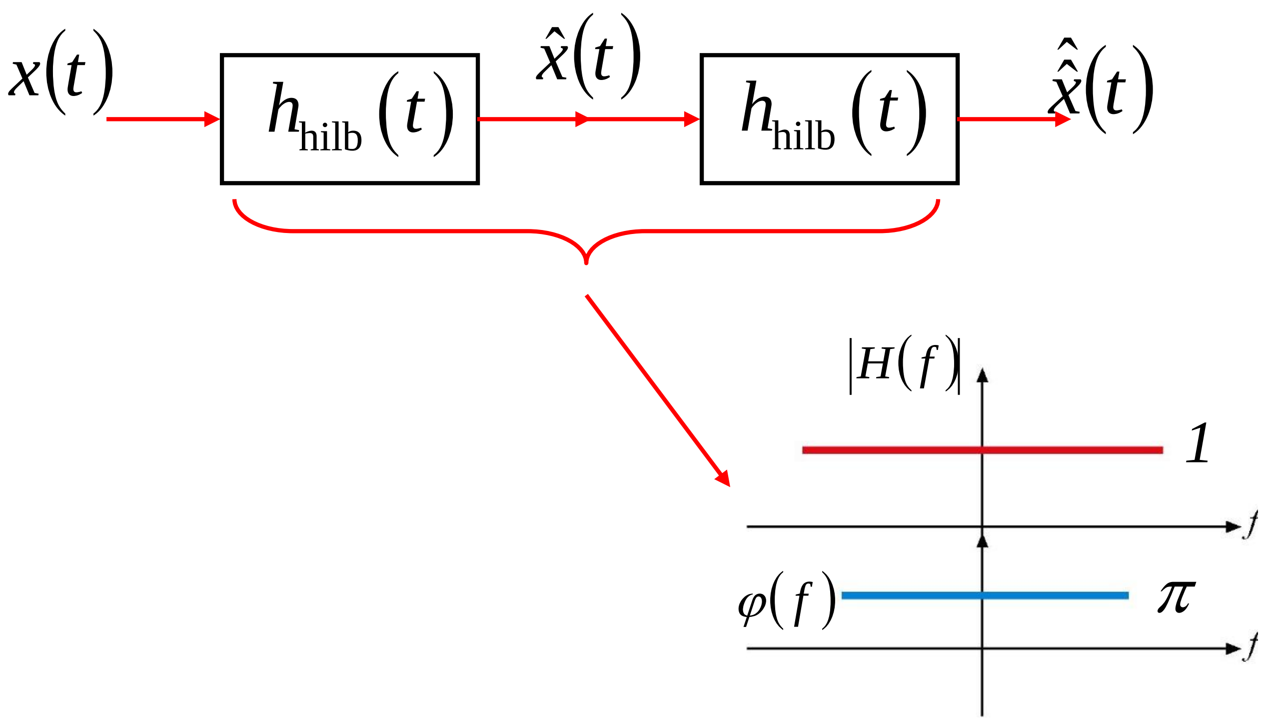


# Esempi e proprietà

$$x(t)=\cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow \hat{x}(t)=\sin(2\pi f_0 t)$$

$$x(t)=\sin(2\pi f_0 t) \Rightarrow \hat{x}(t)=-\cos(2\pi f_0 t)$$

(verifica per mezzo dei rispettivi spettri)

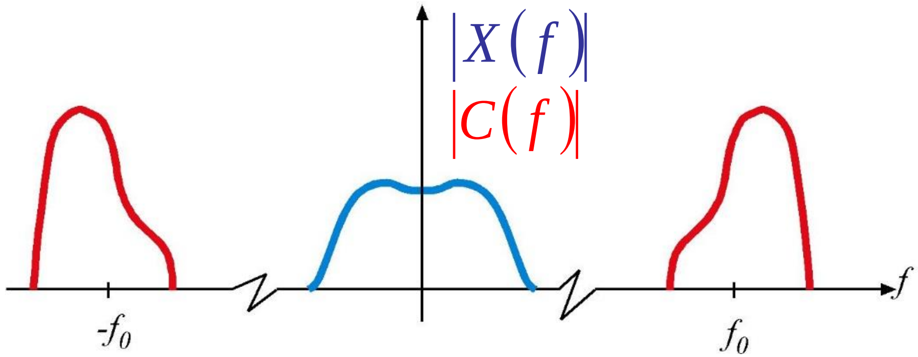



$$\hat{\hat{x}}(t)=-x(t)$$

Sia

$$y(t) = x(t)c(t)$$

con: $X(f) \times C(f) = 0$




Allora:

$$\boxed{\hat{y}(t) = x(t)\hat{c}(t)}$$

Esempio tipico:

$$y(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow \hat{y}(t) = m(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

Il segnale passa banda può essere posto quindi nella forma:

$$\boxed{x(t) = \Re e\left\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}}$$

Inoltre:

$$x(t) = \tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t)\cos(2\pi f_0 t) - \tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

(forma **canonica** di un segnale passa banda)

$\tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t) =$ **parte in fase** ($x_c(t)$)

$\tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t) =$ **parte in quadratura** ($x_s(t)$)

$$a(t) = |\tilde{x}(t)| = \sqrt{\tilde{x}_{\mathrm{Re}}^2(t) + \tilde{x}_{\mathrm{Im}}^2(t)}$$

**Inviluppo naturale** di $x(t)$

# Calcolo della parte in fase e in quadratura

$$x(t) = \Re e\left\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$x(t) = x_c(t)\cos(2\pi f_0 t) - x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$\hat{x}(t) = x_c(t)\sin(2\pi f_0 t) + x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$x_c(t) = \Re e\{\tilde{x}(t)\} \qquad = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_s(t) = \Im m\{\tilde{x}(t)\} \qquad = \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t) - x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{x}(t)$, $x_c(t)$, $x_s(t)$ **dipendono dalla scelta di** $f_0$

$a(t) = |\tilde{x}(t)| =$ **inviluppo naturale, non dipende dalla scelta di** $f_0$

## sistema passa banda

rappresentazione equivalente in banda base, seguendo le medesime regole viste per i segnali:

$$h(t) \rightarrow h_+(t) = \frac{1}{2}\left\{h(t) + j\hat{h}(t)\right\}$$ Segnale analitico associato a $h(t)$

per convenienza

$$\tilde{h}(t) = h_+(t)e^{-j2\pi f_0 t} = h_c(t) + jh_s(t)$$

$$\tilde{H}(f) = H(f+f_0)u(f+f_0)$$

$$h(t) = 2\Re e\left\{\tilde{h}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

a causa del fattore $1/2$

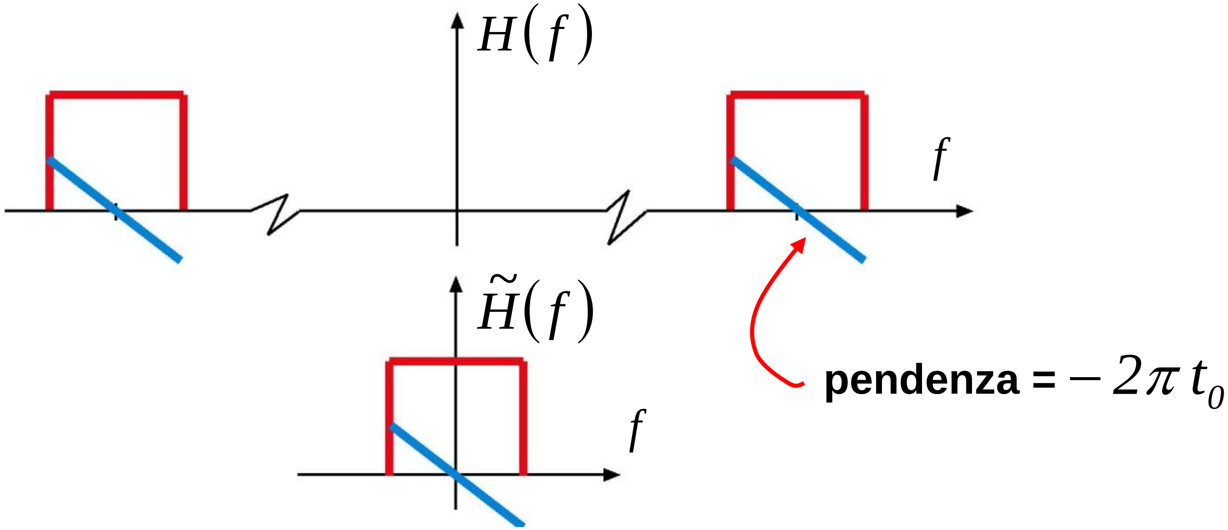
Con questa definizione risulta:

$$Y_+(f) = 2X(f)H(f)U(f) = 2Y(f)U(f)$$

$$\tilde{Y}(f) = Y_+(f + f_0) = \tilde{X}(f)\tilde{H}(f)$$

$$\tilde{y}(t) = \tilde{x}(t) \otimes \tilde{h}(t)$$

Esempio:



# Parte in fase e in quadratura della risposta

$$y(t) = \Re e\left\{ \tilde{y}(t) e^{j2\pi f_0 t} \right\} = \Re e\left\{ \left( y_c(t) + j y_s(t) \right) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$\Re e\left\{ \left( x_c(t) + j x_s(t) \right) \otimes \left( h_c(t) + j h_s(t) \right) e^{j2\pi f_0 t} \right\}$$

$$y_c(t) = x_c(t) \otimes h_c(t) - x_s(t) \otimes h_s(t)$$

$$y_s(t) = x_c(t) \otimes h_s(t) + x_s(t) \otimes h_c(t)$$

Inviluppo complesso $\tilde{x}(t)=\tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t)+j\tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t)$

$$\boxed{x(t)=\Re e\left\{\tilde{x}(t)e^{j2\pi f_0 t}\right\}}$$

forma **canonica** di un segnale passa banda:

$$x(t)=\tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t)\cos(2\pi f_0 t)-\tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$\tilde{x}_{\mathrm{Re}}(t)=$ **parte in fase** **(**$x_c(t)$**)**

$\tilde{x}_{\mathrm{Im}}(t)=$ **parte in quadratura** **(**$x_s(t)$**)**

$a(t)=|\tilde{x}(t)|=\sqrt{\tilde{x}^2_{\mathrm{Re}}(t)+\tilde{x}^2_{\mathrm{Im}}(t)}$ **Inviluppo naturale** di $x(t)$

Per un sistema passa basso

$$\tilde{y}(t)=\tilde{x}(t)\otimes\tilde{h}(t)$$
$$\tilde{Y}(f)=\tilde{X}(f)\tilde{H}(f)$$

Trasformata di Hilbert: $\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x(\tau)}{t-\tau}d\tau$

$$H_{hilb}(f)=\mathcal{F}\left\{\frac{1}{\pi t}\right\}=-j\,\mathrm{sgn}(f) \qquad \hat{X}(f)=-j\,\mathrm{sgn}(f)X(f)$$

Relazioni importanti:

$$x(t)=x_c(t)\cos(2\pi f_0 t)-x_s(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$\hat{x}(t)=x_c(t)\sin(2\pi f_0 t)+x_s(t)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$x_c(t)=\Re e\{\tilde{x}(t)\} \quad =x(t)\cos(2\pi f_0 t)+\hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$
$$x_s(t)=\Im m\{\tilde{x}(t)\} \quad =\hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t)-x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

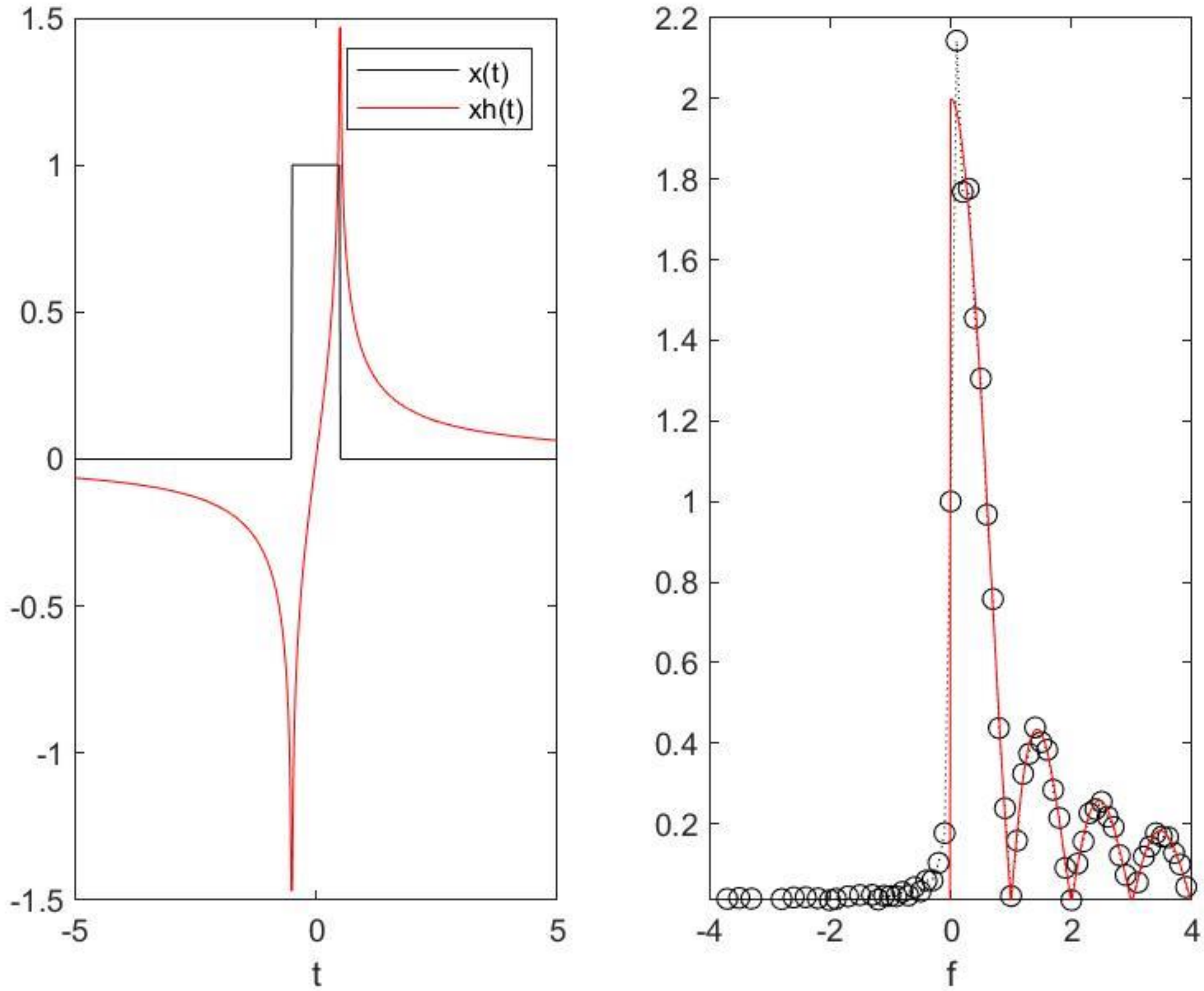
segnale analitico associato a $x(t)$ : $x_+(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$

# Esempio (S1)

$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right) + \frac{j}{\pi}\log\left|\frac{t+T/2}{t-T/2}\right|$$

```
clear;
T=1;%durata rettangolo
T0=5;%segnale tra -T0 e T0
Ts=1/50;%intervallo di campionamento
t=(-T0+Ts/2:Ts:T0);%istanti campionamento
fm=4;%visualizzazione fra -fm e fm
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
xr=zeros(1,length(t)); xr(abs(t)<=T/2)=1;
xh=log(abs((t+T/2)./(t-T/2)))/pi; x=xr+j*xh;
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
Xt=zeros(1,length(ft));
Xt(ft>=0)=2*T*sinc(ft(ft>=0)*T);
subplot(1,2,1);plot(t,xr,'k');xlabel('t');hold on;
plot(t,xh,'r'); legend('x(t)','xh(t)');hold off;
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1; om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell’origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell’origine
subplot(1,2,2); plot(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f'); hold on
plot(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]);set(gca,'Ylim',[.01,2.2*T]); hold off;
```

# Esempio 1

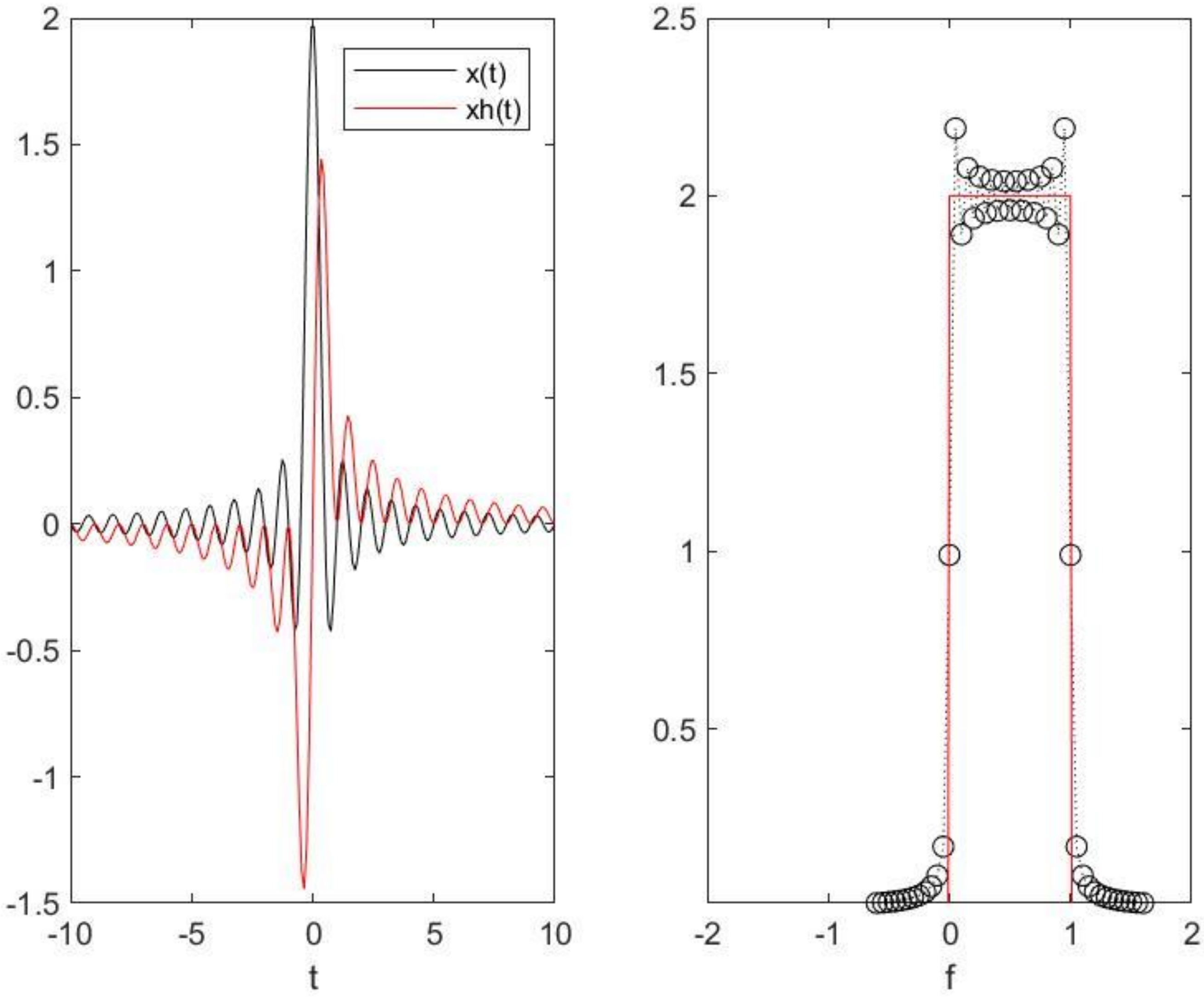


# Esempio 2

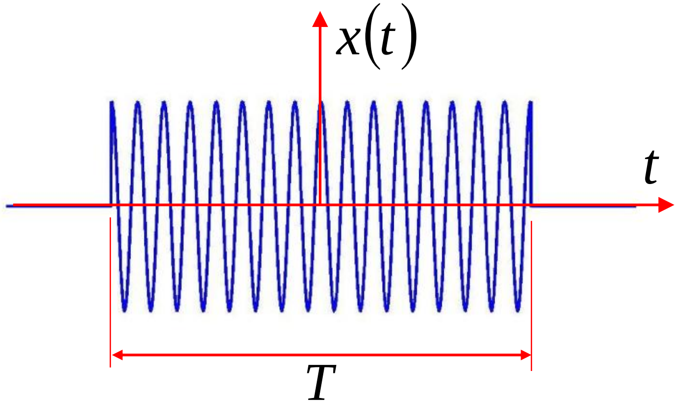
$$x(t) = B\operatorname{sinc}(Bt) + j\frac{1-\cos(\pi Bt)}{\pi t}$$

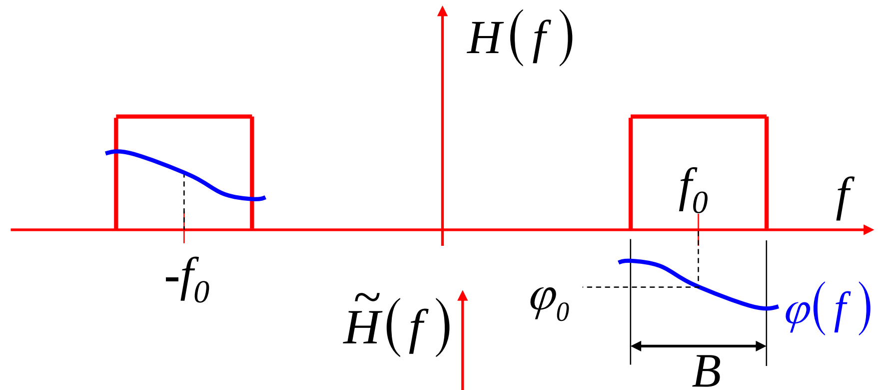
```
clear;
B=2;%Banda doppia
T0=10;%segnale tra -T0 e T0
Ts=1/10;%intervallo di campionamento
t=(-T0+Ts/2:Ts:T0);%istanti campionamento
fm=2;%visualizzazione fra -fm e fm
df=.01;%risoluzione frequenza per la visualizzazione
xr=B*sinc(t*B);
xh=(1-cos(pi*t*B))./(pi*t); xh(t==0)=0; x=xr+j*xh;
ft=-fm:df:fm;%frequenze visualizzazione trasformata teorica
Xt=zeros(1,length(ft));
Xt(ft>=0&ft<=B/2)=2;
subplot(1,2,1);plot(t,xr,'k');xlabel('t');hold on;
plot(t,xh,'r'); legend('x(t)','xh(t)');hold off;
N=length(t);%numero campioni
k=0:N-1; om=2*pi*k/N;%angoli TFTD
oms=fftshift(om);
oms(oms>=pi)=oms(oms>=pi)-2*pi;%angoli centrati nell'origine
fs=oms/(2*pi*Ts); %frequenze corrispondenti
Xf=fft(x);
Xs=fftshift(Xf); %trasformata centrata nell'origine
subplot(1,2,2); plot(fs,abs(Xs)*Ts,'k:o'); xlabel('f'); hold on
plot(ft,abs(Xt),'r'); %trasformata teorica
set(gca,'Xlim',[-fm,fm]);set(gca,'Ylim',[.01,2.5]); hold off;
```

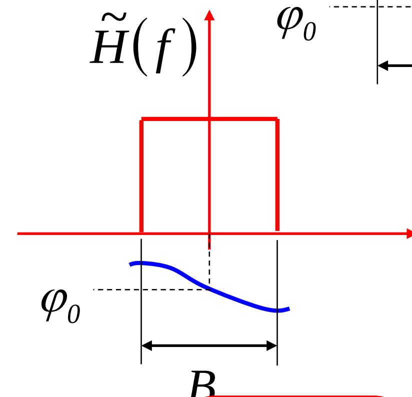
# Esempio 2



# Esempio




$$x(t) = \mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t)$$

$$\tilde{H}(f) = \begin{cases} e^{j\phi(f+f_0)} & |f| < \dfrac{B}{2} \\ 0 & |f| > \dfrac{B}{2} \end{cases}$$

$$\varphi(f) \cong \varphi_0 + \boxed{\left.\frac{d\varphi}{df}\right|_{f=f_0}}(f - f_0)$$

$$-2\pi t_g$$

$$\boxed{\tilde{H}(f) \cong e^{j\varphi_0} e^{-j2\pi t_g f}}$$

$$x(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\cos(2\pi f_0 t) \Rightarrow \tilde{x}(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)$$

$$\tilde{H}(f)\cong e^{j\varphi_0}e^{-j2\pi t_g f} \Rightarrow \tilde{h}(t)=B\,\mathrm{sinc}\left(B\left(t-t_g\right)\right)e^{j\varphi_0}$$

$$\tilde{y}(t)=\tilde{x}(t)\otimes\tilde{h}(t)\;=B\,e^{j\varphi_0}\int_{-T/2}^{+T/2}\frac{\sin\left[\pi B\left(t-t_g-\tau\right)\right]}{\pi B\left(t-t_g-\tau\right)}d\tau$$

$$posto\;\;\lambda=\pi B\left(t-t_g-\tau\right)$$

$$\mathrm{Si}(u)=\int_0^u\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

*(seno integrale)*

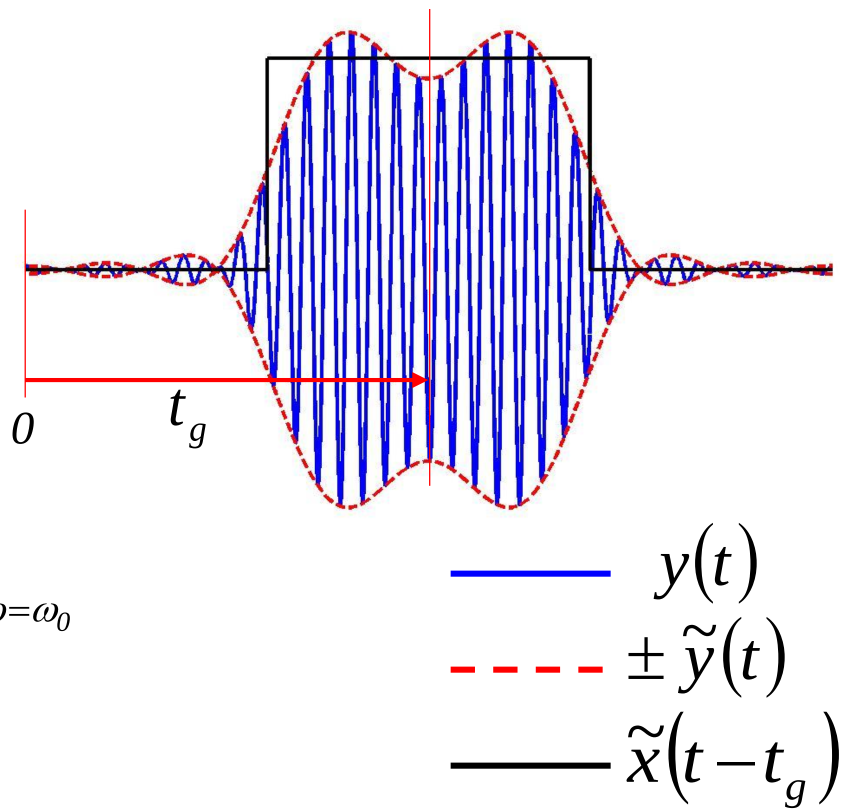
$$\tilde{y}(t)=\frac{e^{j\varphi_0}}{\pi}\int_{\pi B\left(t-t_g-T/2\right)}^{\pi B\left(t-t_g+T/2\right)}\frac{\sin\lambda}{\lambda}d\lambda$$

$$=\frac{e^{j\varphi_0}}{\pi}\left\{\mathrm{Si}\left[\pi B\left(t-t_g+T/2\right)\right]-\mathrm{Si}\left[\pi B\left(t-t_g-T/2\right)\right]\right\}$$

$$y(t) = \Re e\left\{\tilde{y}(t)\, e^{j2\pi f_0 t}\right\}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left\{\mathrm{Si}\left[\pi B\left(t - t_g + T/2\right)\right] - \mathrm{Si}\left[\pi B\left(t - t_g - T/2\right)\right]\right\}\cos\left[2\pi f_0 \left(t - t_0\right)\right]$$

$$t_0 = -\frac{\varphi_0}{\omega_0} = \text{ritardo di fase}$$




$$t_g = -\frac{1}{2\pi}\left.\frac{d\varphi}{df}\right|_{f=f_0} = -\left.\frac{d\varphi}{d\omega}\right|_{\omega=\omega_0}$$

ritardo di gruppo