Analisi dei sistemi LTI con la trasformata Z

Sommario

- Definizione della Trasformata Z
- Regioni di convergenza
- Proprietà della Trasformata Z
- Analisi dei sistemi LTI con la Trasformata Z
- Regole di antitrasformazione

Motivazioni

- Estendere il campo di applicazione della DTFT
- Soluzione equazioni alle differenze
- Analisi sistemi LTI con condizioni iniziali non nulle

Come già visto:

Per un sistema LTI tempo discreto il segnale:

$$x[n] = z^n \qquad con \quad z = |z|e^{j\Omega}$$

è un **autofunzione**

$$\underset{z^n}{x[n]} \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow \underset{H(z)z^n}{y[n]}$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]x[n-k] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{n-k} = z^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]z^{-k}$$

$$= H(z)z^n$$

$$\boxed{H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]z^{-n}}$$

Definizione

Dato un segnale $x[n]$, l'operazione:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

definisce **la trasformata Z** di $x[n]$.

Osservazione:

$X(z)$ è una funzione **complessa** di variabile **complessa** ed è definita tramite una serie di potenze

$$X(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}} + \boxed{\sum_{n=-1}^{-\infty} x[n] z^{-n}}$$

Converge in una regione esterna ad una circonferenza

$$|z| > r_1$$

Converge in una regione interna ad una circonferenza

$$|z| < r_2$$

Dato un segnale $x[n]$, l'operazione:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

definisce **la trasformata Z** di $x[n]$.

Osservazione:

$X(z)$ è una funzione **complessa** di variabile **complessa** ed è definita tramite una serie di potenze

$$X(z) = \boxed{\sum_{n=0}^{+\infty} x[n] z^{-n}} + \boxed{\sum_{n=-1}^{-\infty} x[n] z^{-n}}$$

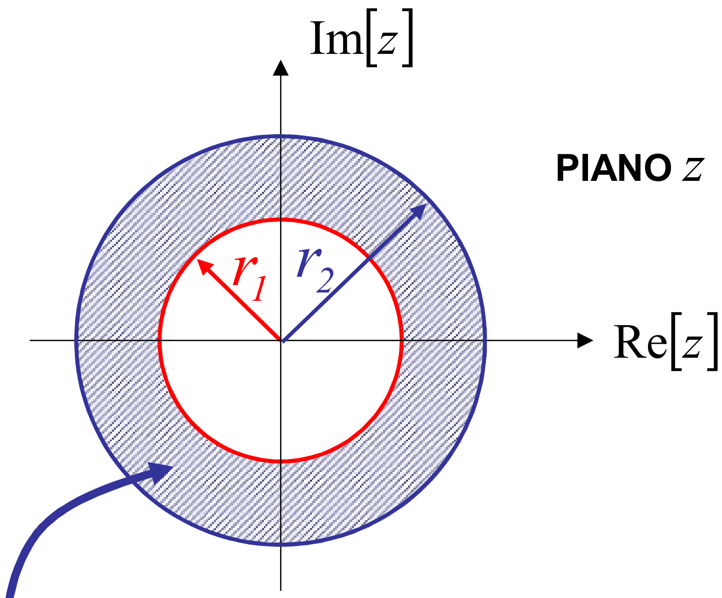
Converge in una regione esterna ad una circonferenza

$$|z| > r_1$$

Converge in una regione interna ad una circonferenza

$$|z| < r_2$$

Convergenza

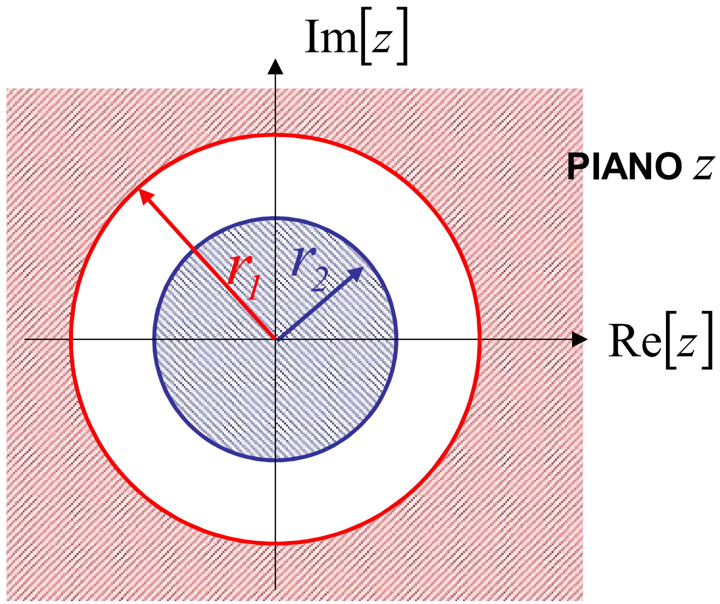


$r_1 < r_2$

Esiste una regione
di convergenza

⇩

Esiste la trasformata Z



$r_1 > r_2$

Non esiste una regione
di convergenza

⇩

Non esiste la trasformata Z

Osservazione

Ponendo $z = re^{j\Omega}$ si ha che:

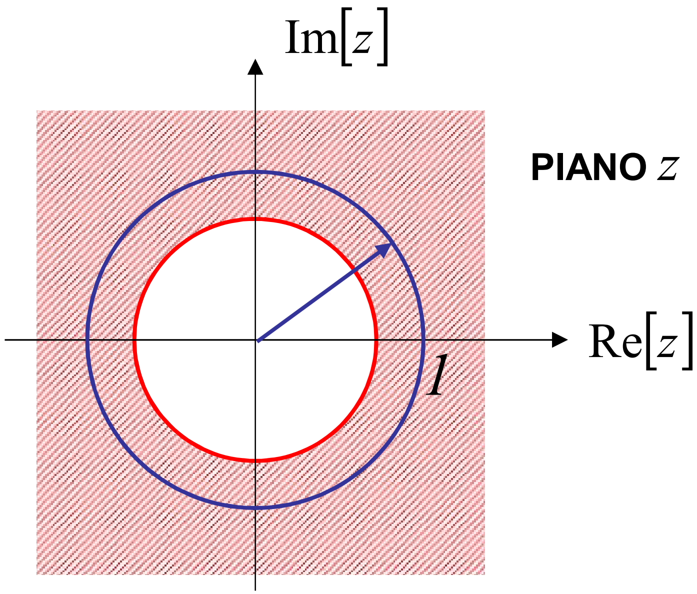
$$X\left(re^{j\Omega}\right) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n]\, r^{-n}\right) e^{-j\Omega n}$$

Questa relazione mostra che:

$$X(z) = Z\{\, x[n] \,\} = F\left\{ x[n]\, r^{-n} \right\}$$

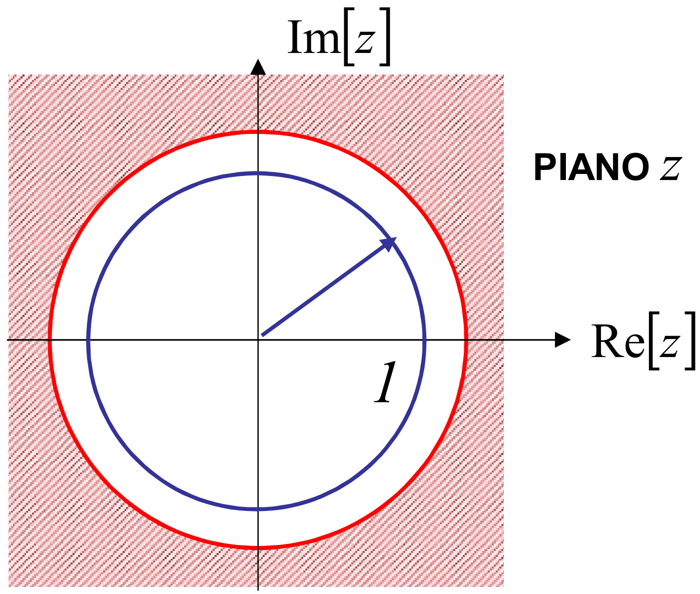
$$\boxed{F\{\, x[n] \,\} = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}}$$

(ammesso che $X(z)$ converga in $z = e^{j\Omega}$)



La circonferenza di raggio unitario appartiene alla regione di convergenza

Esiste la trasformata di Fourier



La circonferenza di raggio non unitario appartiene alla regione di convergenza

Non esiste la trasformata di Fourier

Quindi:

La trasformata di Fourier di un segnale coincide con la sua trasformata Z *calcolata sulla circonferenza di raggio unitario del piano complesso* z

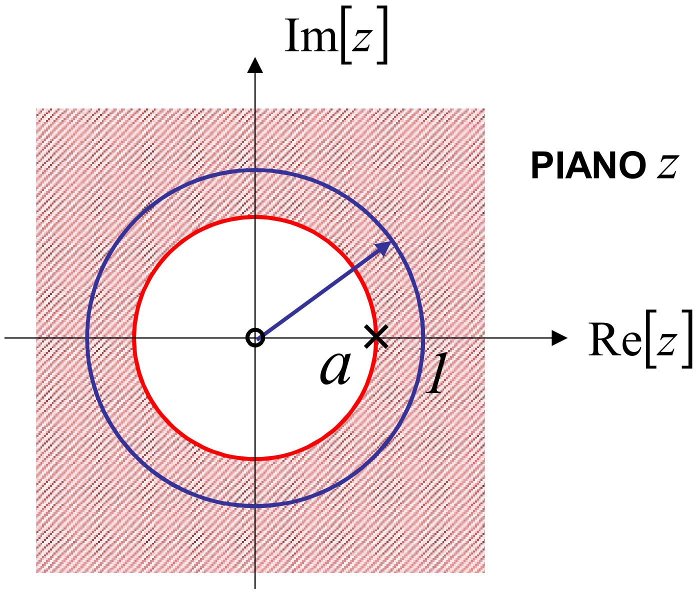
(purché questa circonferenza appartenga alla regione di convergenza di $X(z)$*).*

$$\boxed{x[n] = a^n\, u[n]}$$

$$X(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a\, z^{-1}\right)^n = \frac{1}{1 - a\, z^{-1}} = \frac{z}{z-a}$$

$$per \quad \left|a\, z^{-1}\right| < 1 \Rightarrow |z| > |a|$$

Funzione razionale,
caratterizzata da zeri e poli

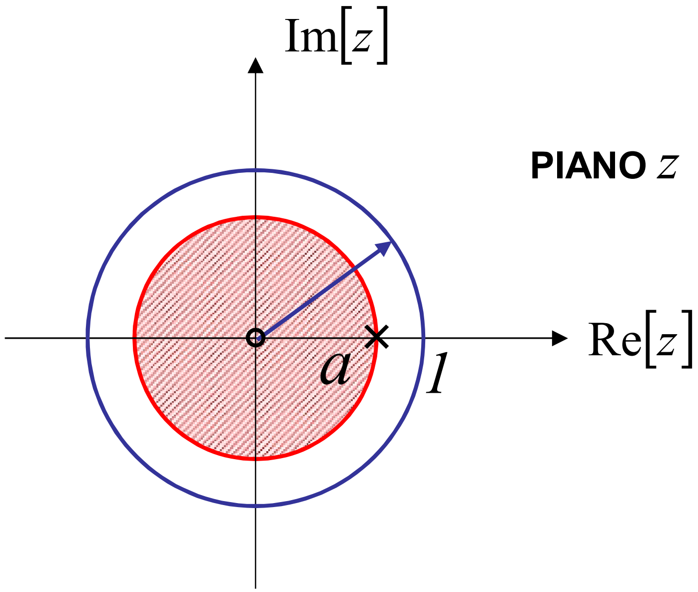


$$\boxed{x[n] = -a^n\, u[-n-1]}$$

$$X(z) = -\sum_{n=-\infty}^{-1} a^n z^{-n} = -\sum_{n=1}^{+\infty} a^{-n} z^n = 1 - \sum_{n=0}^{+\infty} \left(a^{-1} z\right)^n$$

$$= 1 - \frac{1}{1 - a^{-1} z} = \frac{-a^{-1} z}{1 - a^{-1} z} = \frac{1}{1 - a z^{-1}} = \frac{z}{z - a}$$

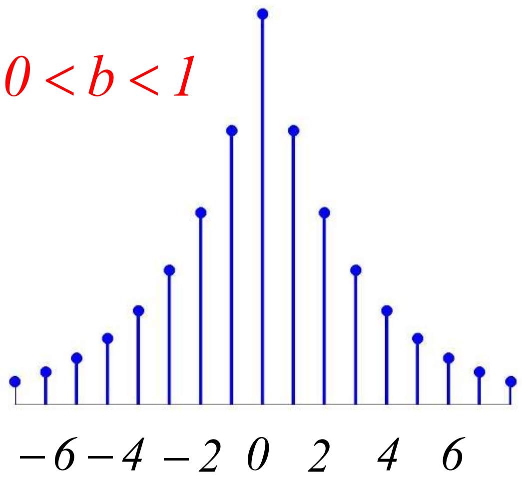
$$per\ \left|a^{-1} z\right| < 1 \Rightarrow |z| < |a|$$

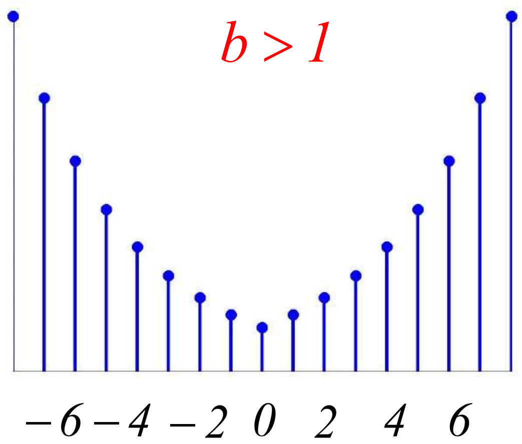


Attenzione:

stessa espressione analitica, differente regione di convergenza!

$$\boxed{x[n] = b^{|n|}}$$





$$x[n] = b^n u[n] + b^{-n} u[-n-1]$$

$$b^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1 - bz^{-1}} \qquad |z| > b$$

$$b^{-n} u[-n-1] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{-1}{1 - b^{-1}z^{-1}} \qquad |z| < \frac{1}{b}$$

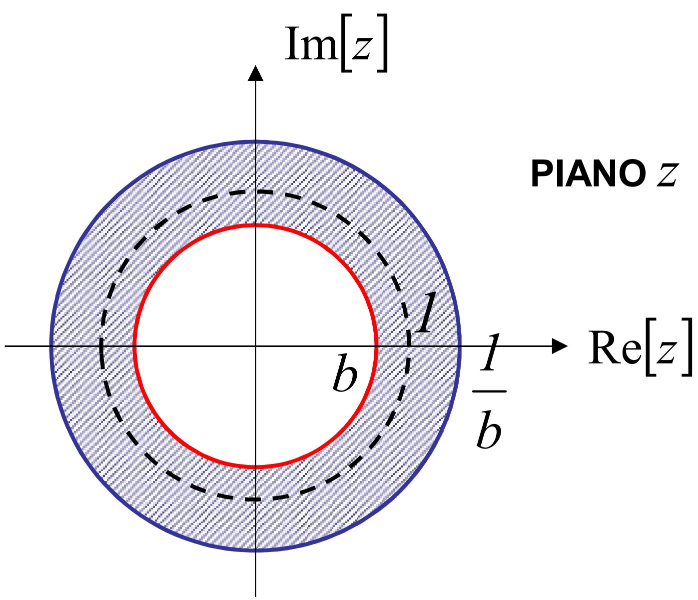
$$\boxed{X(z) = \frac{1}{1 - bz^{-1}} - \frac{1}{1 - b^{-1}z^{-1}}}$$

$$\left(|b| < |z| < \left|\frac{1}{b}\right| \right) \quad se\ |b| < 1$$

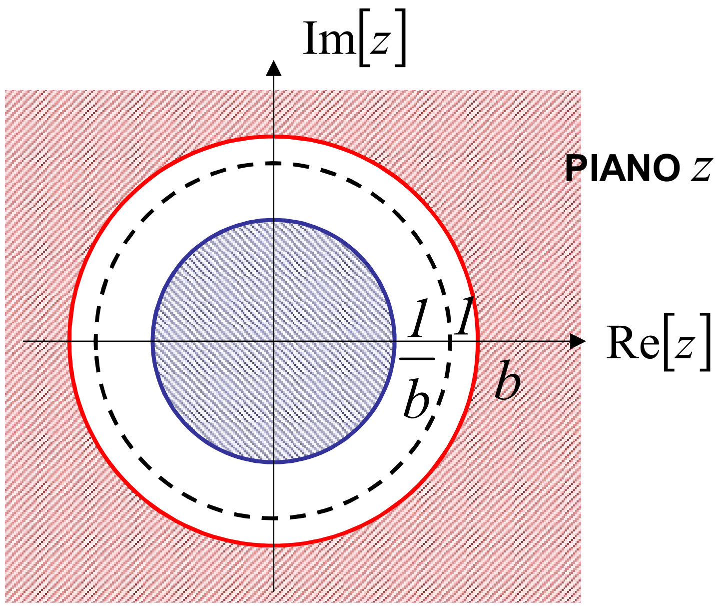
$$non\ \ esiste\ \ se\ |b| \geq 1$$

$$\boxed{x[n] = b^{|n|}}$$

$$|b| < 1$$

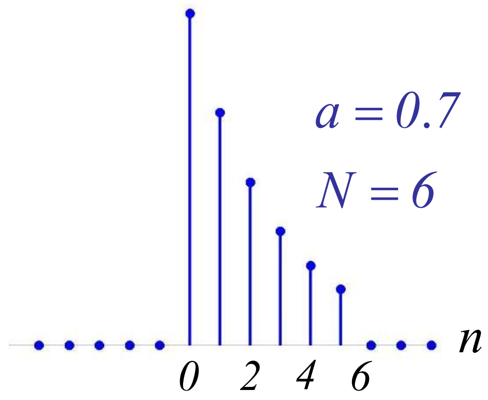


$$|b| > 1$$



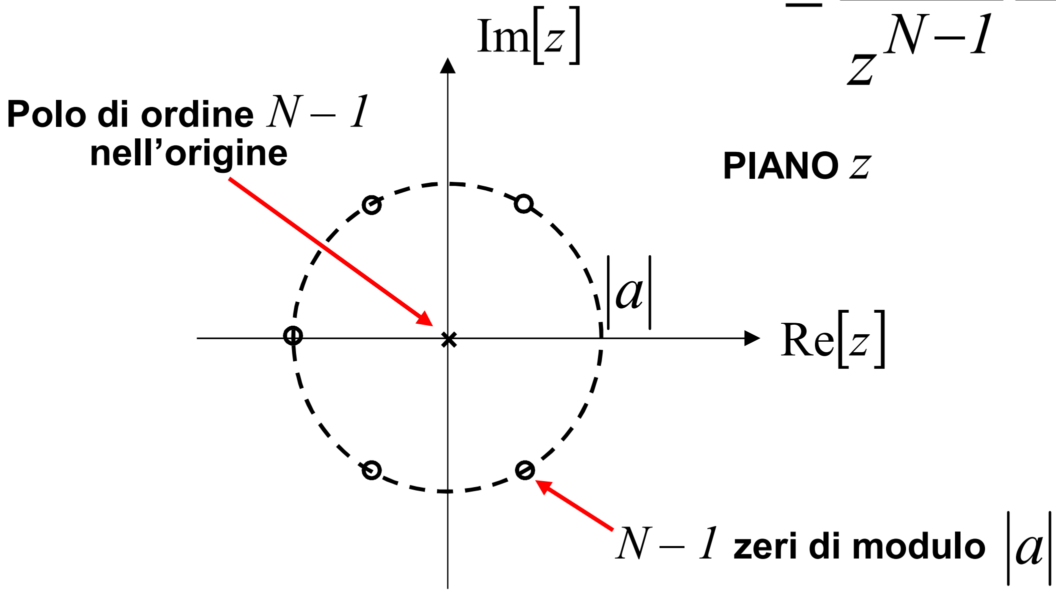
Esempi

$$\boxed{x[n]=\begin{cases} a^n & 0\le n\le N-1, \quad a>0 \\ 0 & altrimenti \end{cases}}$$



$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1} a^n z^{-n} = \frac{1-\left(a\,z^{-1}\right)^N}{1-a\,z^{-1}}$$

$$=\frac{1}{z^{N-1}}\frac{z^N-a^N}{z-a} \qquad \forall z-\{0\}$$



Forma della regione di convergenza:

1) *Segnale 'destro':* regione esterna ad una circonferenza.
   (Poli interni a detta circonferenza)

2) *Segnale 'sinistro':* regione interna ad una circonferenza.
   (Poli esterni a detta circonferenza)

3) *Segnale 'bilaterale':* corona circolare .
   (Poli esterni a detta corona circolare)

4) *Segnale di durata finita:* tutto il piano z (escluso al più l'origine e/o il punto all'infinito).

a) Linearità

$$x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z), \qquad x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z)$$

$$ax_1[n] + bx_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} aX_1(z) + bX_2(z)$$

Regione di convergenza: $\boxed{RC\{X_1\} \cap RC\{X_2\}}$

b) Traslazione nel tempo

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \quad \Rightarrow \quad x[n-n_0] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z)z^{-n_0}$$

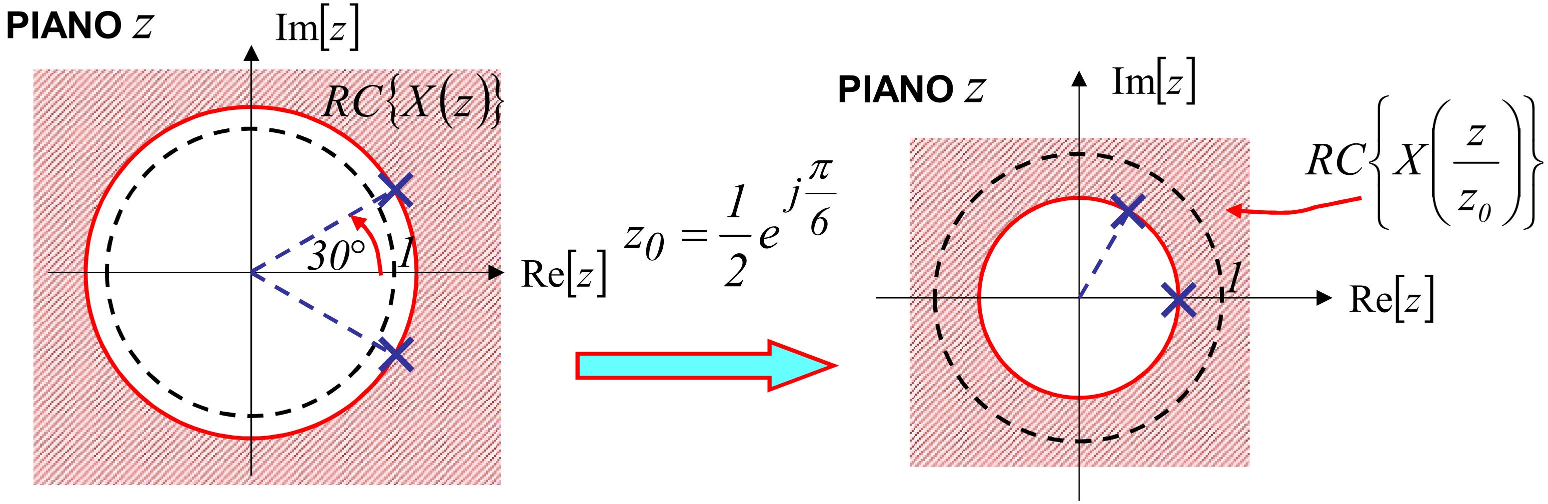
Regione di convergenza: $\boxed{RC\{X\} \underset{eventualm.}{-} (z=0)}$

c) Scalaggio in z

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \quad \Longrightarrow \quad z_0^n\, x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$$

Regione di convergenza: $\boxed{RC = z_0 RC\{X(z)\}}$

Significato: $\begin{cases} se\ \ Z\{x[n]\} & ha\ un\ polo\ in\ z = a, \\ Z\{z_0^n\, x[n]\} & ha\ un\ \ polo\ in\ \ z = az_0 \end{cases}$



d) Inversione temporale

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \quad \Rightarrow \quad x[-n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right)$$

Regione di convergenza:

$$\boxed{RC\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)\right\} = \frac{1}{RC\,\{X(z)\}}}$$

Significato:

$$se \quad z_0 \in RC\{X(z)\}, \quad allora \quad \frac{1}{z_0} \in RC\left\{X\left(\frac{1}{z}\right)\right\}$$

e) Convoluzione

$$x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) \qquad RC = R_1$$

$$x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z) \qquad RC = R_2$$

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) X_2(z) \qquad RC \supset R_1 \cap R_2$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k]$$

$$Y(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] x_2[n-k] \right) z^{-n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_2[n-k] z^{-n}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] X_2(z) z^{-k} = X_2(z) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_1[k] z^{-k} = X_2(z) X_1(z)$$

Significato

$$x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n]$$

$$Y(z) = X(z)H(z)$$

$$H(z) \;\; \textit{funzione di sistema (di trasferimento)}$$

f) Derivata rispetto a Z

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \qquad RC = R_x \qquad \Longrightarrow \qquad n\,x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z\frac{dX(z)}{dz} \qquad RC = R_x$$

Es:

$$a^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} \frac{1}{1-az^{-1}} \qquad |z| > |a|$$

$$na^n u[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-az^{-1}}\right) = \frac{az^{-1}}{\left(1-az^{-1}\right)^2} \qquad |z| > |a|$$

g) Sistemi LTI caratterizzati da una equazione alle differenze:

Analoghi ai sistemi tempo continuo descritti da equazioni differenziali

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

Per essi:

$$\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$H(z) \Rightarrow$ Funzione razionale in z^{-1} (o in z)

g) Formula generale di antitrasformazione

$$X(z) = X\left(r e^{j\Omega}\right) = F\left\{x[n]\, r^{-n}\right\} \Longrightarrow x[n]\, r^{-n} = F^{-1}\left\{X\left(r e^{j\Omega}\right)\right\}$$

$$x[n] = r^{n} \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X\left(r e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\langle 2\pi \rangle} X\left(r e^{j\Omega}\right)\left(r e^{j\Omega}\right)^{n} d\Omega$$

(integrazione lungo una circonferenza nel piano z, di centro l'origine, inclusa nella regione di convergenza)

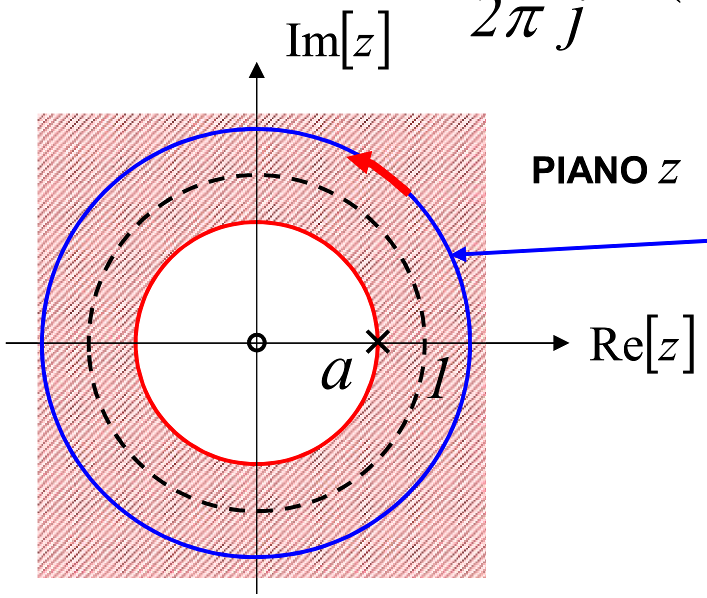
$$z = r e^{j\Omega} \Longrightarrow dz = j r e^{j\Omega}\, d\Omega \Longrightarrow d\Omega = \frac{1}{j} z^{-1} dz$$

$$\boxed{x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint X(z)\, z^{n-1} dz}$$

$$x[n]=\frac{1}{2\pi j}\oint X(z)z^{n-1}dz$$

Il segnale $x[n]$ **risulta "somma" (integrale)** di funzioni z^n (o, il che è lo stesso, di funzioni z^{n-1}), ciascuna pesata dal termine:

$$\frac{1}{2\pi j}X(z)dz$$



Esempio di percorso di integrazione

a) Stabilità

Se un sistema LTI è stabile $\Rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty \Rightarrow$ esiste $H\left(e^{j\Omega}\right)$

La circonferenza di raggio unitario deve appartenere alla regione di convergenza

b) causalità $\Rightarrow h[n] = 0 \quad per \quad n < 0$

Condizione **necessaria**:

$h[n]$ **deve essere un segnale destro**

RC esterna ad una circonferenza

Se $H(z)$ è una funzione razionale in z, $H(z) = \dfrac{N(z)}{D(z)}$

$\boxed{\textbf{grado} \;\; N \le \textbf{grado} \;\; D}$

(per studenti volonterosi)

Verificare che: $\dfrac{1}{1-az^{-1}} \quad \left(RC: |z| > |a|\right) \quad \Rightarrow \quad a^n u[n]$

NB.: $\oint_C f(z)dz = 2\pi j \sum Res$ ← residui dei poli interni a C

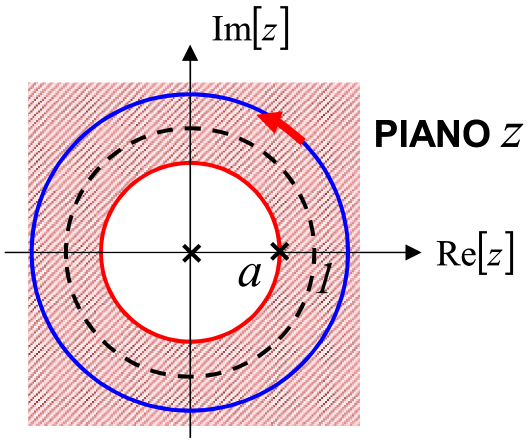
$$\frac{1}{2\pi j}\oint \frac{1}{1-az^{-1}} z^{n-1} dz = \frac{1}{2\pi j}\oint \frac{z^n}{z-a} dz$$

$\dfrac{z^n}{z-a}$

- Per $n < 0$:
  - un polo semplice in $z = a$
  - un polo di ordine n in $z = 0$
- Per $n \geq 0$: un polo semplice in $z = a$

(per studenti volonterosi)

Per un polo in z_0 di ordine n: $Res\{f(z)\} = \lim_{z\to z_0}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left[(z-z_0)^n f(z)\right]\right\}$

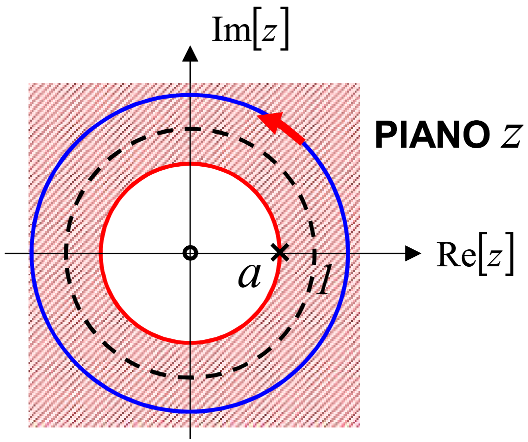


$n<0$

$$\underset{\text{in } z=0}{Res\{f(z)\}} = \lim_{z\to 0}\left\{\frac{1}{(n-1)!}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}\left(\frac{1}{z-a}\right)\right\} = -\frac{1}{a^{|n|}}$$

$$\underset{\text{in } z=a}{Res\{f(z)\}} = \lim_{z\to a}\{z^n\} = \frac{1}{a^{|n|}}$$

$$\boxed{x[n] = \sum Res = 0}$$



$n \geq 0$

$$\underset{\text{in } z=a}{Res\{f(z)\}} = \lim_{z\to a}\{z^n\} = a^n$$

$$\boxed{x[n] = \sum Res = a^n}$$

Alcuni casi notevoli:

$$X(z)=\frac{1}{1-az^{-1}} \qquad \begin{cases} RC: & |z|>|a| \qquad x[n]=a^{n}u[n] \\ RC: & |z|<|a| \qquad x[n]=-a^{n}u[-n-1] \end{cases}$$

(valida anche se a è complesso)

Sia $X(z)$ una funzione razionale a coefficienti reali in z^{-1}

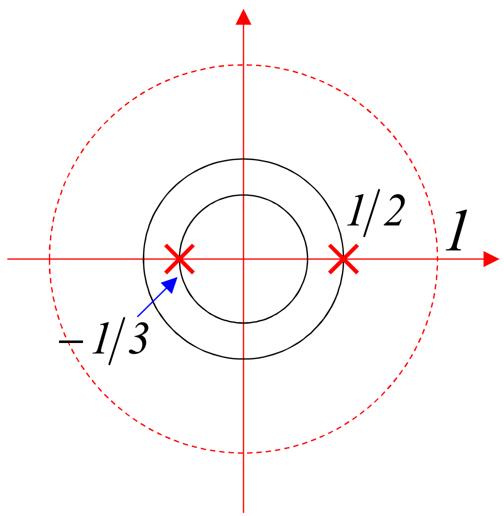
$$X(z)=\frac{a_m z^{-m}+a_{m-1}z^{-m+1}+\cdots+a_0}{b_n z^{-n}+b_{n-1}z^{-n+1}+\cdots+b_0}=\frac{N\left(z^{-1}\right)}{D\left(z^{-1}\right)}$$

I poli saranno reali o a coppie complesse coniugate

Esempio

$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{1}{6}z^{-1}-\frac{1}{6}z^{-2}}$$

$$z^{-1}_{1,2}=\frac{-\frac{1}{6}\pm\sqrt{\frac{1}{36}+\frac{4}{6}}}{\frac{2}{6}}=\begin{cases}2\\-3\end{cases}$$



$$X(z)=\frac{1-z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$X(z)=\frac{A}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{B}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$\left.\begin{aligned}&A+B=1\\&\frac{1}{3}A-\frac{1}{2}B=-1\end{aligned}\right\}A=-\frac{3}{5},\quad B=\frac{8}{5}$$

$$X(z)=\frac{-\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{8}{5}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Esempio

$$X(z)=\frac{-\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}+\frac{\frac{8}{5}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

$$x_1[n]=\left[-\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u[n]$$

$$x_2[n]=\left[\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right]u[-n-1]$$

$$x_3[n]=\frac{3}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]+\frac{8}{5}\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$$

Poli semplici reali

Sia $m<n$

a) $X(z)$ **ha solo poli reali** $p_1, p_2, \ldots$**semplici**

Convenzione: si intende che $D\left(z^{-1}\right)=0 \quad per \quad z=p_i$

Dividendo N e D per b_0:

$$X(z)=\frac{c_m z^{-m}+c_{m-1}z^{-m+1}+\cdots+c_0}{d_n z^{-n}+d_{n-1}z^{-n+1}+\cdots+1} \qquad c_i=\frac{a_i}{b_0} \qquad d_i=\frac{b_i}{b_0}$$

$$X(z)=\frac{c_m z^{-m}+c_{m-1}z^{-m+1}+\cdots+c_0}{\left(1-p_1 z^{-1}\right)\left(1-p_2 z^{-1}\right)\cdots\left(1-p_n z^{-1}\right)}$$

Poli semplici reali

$$X(z) = \frac{c_m z^{-m} + c_{m-1} z^{-m+1} + \cdots + c_0}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\left(1 - p_2 z^{-1}\right)\ldots\left(1 - p_n z^{-1}\right)}$$

Sviluppo in frazioni parziali:

$$X(z) = \frac{A_1}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1 - p_2 z^{-1}\right)} + \cdots + \frac{A_n}{\left(1 - p_n z^{-1}\right)}$$

Ciascun termine corrisponde a

$$A_i p_i^n u[n] \qquad |p_i| < r_{min} \quad di \;\; RC$$

$$-A_i p_i^n u[-n-1] \qquad |p_i| > r_{max} \quad di \;\; RC$$

Determinazione dei coefficienti

$$X(z) = \frac{A_1}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)} + \frac{A_2}{\left(1 - p_2 z^{-1}\right)} + \cdots + \frac{A_n}{\left(1 - p_n z^{-1}\right)}$$

Nel caso di poli semplici:

$$X(z)\left(1 - p_1 z^{-1}\right) = A_1 + \frac{A_2\left(1 - p_1 z^{-1}\right)}{\left(1 - p_2 z^{-1}\right)} + \cdots + \frac{A_n\left(1 - p_1 z^{-1}\right)}{\left(1 - p_n z^{-1}\right)}$$

Pertanto: $A_1 = X(z)\left(1 - p_1 z^{-1}\right)\Big|_{z=p_1}$

e in generale: $A_k = X(z)\left(1 - p_k z^{-1}\right)\Big|_{z=p_k}$

b) $X(z)$ ha anche poli complessi z_1, z_2, ...semplici

In questo caso se z_k è un polo, lo è anche z_k^*

Ogni coppia di poli complessi coniugati dà luogo alle frazioni:

$$X(z) = \cdots \frac{B_k}{\left(1 - z_k z^{-1}\right)} + \frac{B_k^*}{\left(1 - z_k^* z^{-1}\right)} + \cdots$$

cui corrisponde (ad es. per segnali dex):

$$\left(B_k z_k^n + B_k^* z_k^{*n} \right) u[n]$$

Posto: $B_k = |B_k| e^{j\phi_k}$ $\quad z_k = |z_k| e^{j\psi_k}$

$$\boxed{2|B_k||z_k|^n \cos(n\psi_k + \phi_k) u[n]}$$

c) $X(z)$ ha anche poli di molteplicità > 1

$$X(z) = \frac{c_m z^{-m} + c_{m-1} z^{-m+1} + \cdots + c_0}{\left(1 - p_1 z^{-1}\right)^{\sigma_1} \left(1 - p_2 z^{-1}\right)^{\sigma_2} \cdots \left(1 - p_n z^{-1}\right)^{\sigma_n}}$$

$$\sigma_i \geq 1 = molteplicità \;\; del \;\; polo \;\; i - esimo$$

Esempio con $\sigma_i = 2$

Nello sviluppo in frazioni parziali appariranno i termini:

$$\cdots \frac{B_{i1}}{\left(1 - p_i z^{-1}\right)} + \frac{B_{i2}}{\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2} \cdots$$

Poli con molteplicità > 1

$$X(z) = W(z) + \frac{B_{i1}}{\left(1 - p_i z^{-1}\right)} + \frac{B_{i2}}{\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2}$$

Per il termine B_{i2} $\Rightarrow$ $B_{i2} = X(z)\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2 \Big|_{z=p_i}$

Per il termine B_{i1}

$$X(z)\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2 = W(z)\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2 + B_{i1}\left(1 - p_i z^{-1}\right) + B_{i2}$$

$$\frac{d}{dz^{-1}}\left[X(z)\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2\right]$$

$$= \frac{d}{dz^{-1}}[W(z)]\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2 - 2 p_i W(z)\left(1 - p_i z^{-1}\right) - B_{i1} p_i$$

Pertanto: $B_{i1} = \left(-\frac{1}{p_i}\right)\frac{d}{dz^{-1}}\left[X(z)\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2\right]$

Poli con molteplicità > 1

Al termine: $\dfrac{p_i z^{-1}}{\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2}$ corrisponde il segnale:

$$np_i^n u[n] \qquad RC \quad |z| > |p_i|$$

$$-np_i^n u[-n-1] \qquad RC \quad |z| < |p_i|$$

Pertanto a $\dfrac{B_{i2}}{\left(1 - p_i z^{-1}\right)^2}$ corrisponde il segnale:

$$B_{i2}(n+1)p_i^n u[n+1] \qquad RC \quad |z| > |p_i|$$

$$B_{i2}(-n+1)p_i^n u[-n-2] \qquad RC \quad |z| < |p_i|$$

Considerazioni

- Sia $H(z) = N(z)/D(z)$, dove $N(z)$ è un polinomio di grado *N* e $D(z)$ è un polinomio di grado *M*.

- Regioni di convergenza: numero di poli di modulo distinto + 1.

- Anti trasformata destra: $|z| > \max_i |p_i|$

- Anti trasformata sinistra: $|z| < \min_i |p_i|$

- Sistema stabile: è l'unico la cui regione di convergenza include la circonferenza di raggio unitario, (esiste solo se tutti i poli hanno un modulo diverso da 1). Per il sistema stabile esiste la trasformata di Fourier.

- Sistema causale: corrisponde alla anti trasformata destra, purché $N \leq M$, altrimenti non esiste.

Trasformata unilatera

$$X^{+}(Z) = \sum_{n=0}^{\infty} x[n] z^{-n}$$

Dove $x[n]$ può estendersi da $-\infty$ a $+\infty$

Quindi se $x[n]$ è diverso da 0 per $n<0$, la trasformata unilatera può essere diversa da quella bilatera.

$$x_1[n] = x[n-1] \rightarrow X_1^{+}(Z) = x[-1] + z^{-1} X^{+}(z)$$

$$x_1[n] = x[n-m] \rightarrow X_1^{+}(Z) = \sum_{n=0}^{m-1} x[n-m] z^{-n} + z^{-m} X^{+}(z)$$

In questo modo è possibile tener conto di condizioni iniziali diverse da 0.

Esercizio: determinare un'espressione esplicita dei numeri di Fibonacci, essendo

$y[n]=y[n-1]+y[n-2]$, $y[-1]=1$, $y[-2]=0$.

Per un sistema LTI tempo discreto il segnale:

$$x[n] = z^n \qquad con \quad z = |z|e^{j\Omega}$$

è un **autofunzione**

$$z^n \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow H(z)z^n$$

Trasformata Z di $x[n]$: $$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$$

Alla trasformata Z di un segnale è associata una regione di convergenza

Se $X(z)$ converge in $z = e^{j\Omega}$ $$F\{x[n]\} = X(z)\big|_{z=e^{j\Omega}}$$

Proprietà della Trasformata Z

a) Linearità

b) Traslazione nel tempo $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \Rightarrow x[n-n_0] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) z^{-n_0}$

c) Scalaggio in z $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \Rightarrow z_0^n \, x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{z}{z_0}\right)$

d) Inversione temporale $x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \Rightarrow x[-n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X\left(\frac{1}{z}\right)$

e) Convoluzione $x_1[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) \quad RC = R_1$

$$x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_2(z) \quad RC = R_2$$

$$y[n] = x_1[n] \otimes x_2[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X_1(z) X_2(z) \quad RC \supset R_1 \cap R_2$$

f) Derivata rispetto a Z

$$x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} X(z) \quad RC = R_x \Rightarrow n\, x[n] \overset{Z}{\leftrightarrow} -z \frac{dX(z)}{dz} \quad RC = R_x$$

Riassunto

Proprietà dei sistemi

a) Stabilità

La circonferenza di raggio unitario deve appartenere alla regione di convergenza

b) causalità $\Rightarrow$ $h[n]=0 \quad per \quad n<0$

Condizione **necessaria**:

$h[n]$ deve essere un segnale destro

RC esterna ad una circonferenza

Se $H(z)$ è una funzione razionale in z, $H(z)=\dfrac{N(z)}{D(z)}$

$\boxed{\textbf{grado } N \leq \textbf{grado } D}$