

Analisi dei processi aleatori nel dominio della frequenza



Sommario

- Densità spettrale di potenza
- Teorema di Wiener – Khintchine
- Processi aleatori attraverso sistemi LTI
- Processi aleatori gaussiani
- Rumore bianco
- Processi aleatori passa-banda



Densità spettrale di potenza

Premessa

Dato un segnale $x(t)$ di potenza:

$$\left(X_T(f) = F \left\{ x(t) \text{rect} \left[\frac{t}{T} \right] \right\} \right)$$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} |x(t)|^2 dt}_{\text{potenza media}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|X_T(\omega)|^2}{T} d\omega$$

potenza media

Teorema di Parseval

Amnesso di poter scambiare l'operazione di limite con quella di integrazione,

$$P_m = \int_{-\infty}^{+\infty} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T} df$$

La funzione $S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$ rappresenta una **densità di potenza**

$S_x(f) df =$ **Potenza media portata dalle componenti spettrali nella banda infinitesima df**

$\int_{f_1}^{f_2} S_x(f) df =$ **Potenza media portata dalle componenti spettrali nella banda tra f_1 e f_2**



Densità spettrale di potenza

Per i processi aleatori: ogni realizzazione è un segnale

1^a ipotesi:

per ogni realizzazione esiste il: $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T^{(k)}(f)|^2}{T} = S^{(k)}(f)$

Le varie funzioni $S^{(k)}(f)$ costituiscono un nuovo **processo aleatorio** nella variabile f

Si **potrebbe** allora definire **densità spettrale del processo** il valor medio di tale processo aleatorio

$$S_x(f) = E[S^{(k)}(f)] = E \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T^{(k)}(f)|^2}{T} \right\}$$

$S_x(f)df =$ **Potenza media, mediamente portata dalle componenti spettrali del processo nella banda infinitesima df**

$\int_{f_1}^{f_2} S_x(f)df =$ **Potenza media, mediamente portata dalle componenti spettrali del processo nella banda tra f_1 e f_2**



Densità spettrale di potenza

II^a ipotesi:

per le varie realizzazioni **non** esiste il $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T^{(k)}(f)|^2}{T} = S^{(k)}(f)$
(situazione molto frequente in pratica)

Spesso non esiste il $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T^{(k)}(f)|^2}{T}$, ma esiste il: $\lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|X_T^{(k)}(f)|^2}{T} \right\}$

Pertanto una definizione più appropriata per la densità spettrale di potenza è:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|X_T^{(k)}(f)|^2}{T} \right\}$$

essendo $X_T^{(k)}(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} x^{(k)}(t) e^{-j2\pi f t} dt$

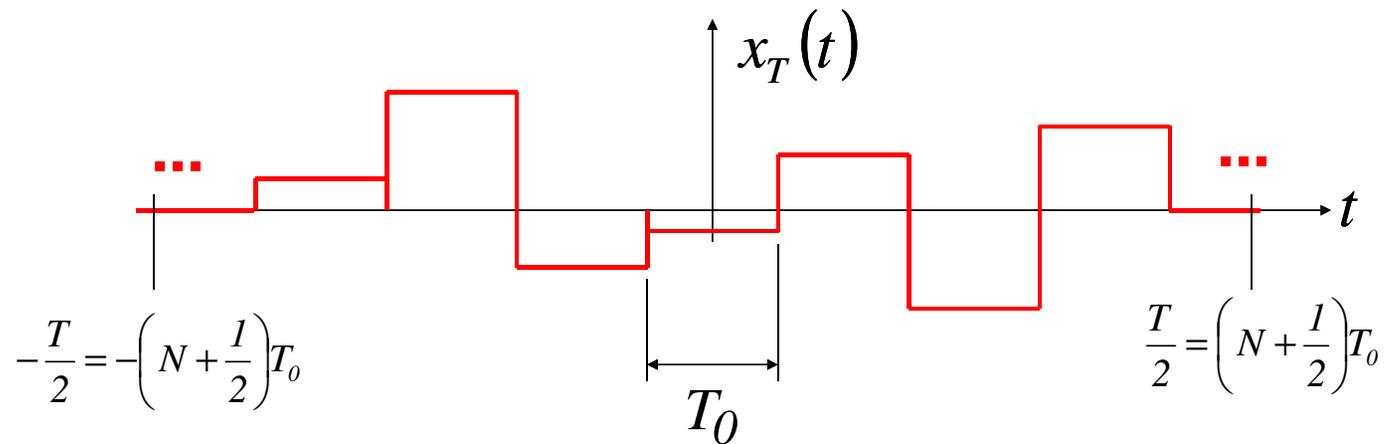


Esempio

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \operatorname{rect}\left[\frac{t-nT_0}{T_0}\right] \quad \left(\begin{array}{l} \text{segnale PAM, con } E[a_n]=0 \\ \text{e } E[a_i a_j] = \sigma_a^2 \delta_{ij} \end{array} \right)$$

In questo caso:

$$x_T(t) = \sum_{n=-N}^N a_n \operatorname{rect}\left[\frac{t-nT_0}{T_0}\right]$$



Esempio (seguito)

Con quella scelta particolare di T

$$\begin{aligned} X_T(f) &= \int_{-\left(N+\frac{1}{2}\right)T_0}^{\left(N+\frac{1}{2}\right)T_0} \sum_{n=-N}^N a_n \operatorname{rect}\left[\frac{t-nT_0}{T_0}\right] e^{-j2\pi f t} dt \\ \{T=(2N+1)T_0\} &= T_0 \operatorname{sinc}(f T_0) \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j2\pi f n T_0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{|X_T(f)|^2}{T} &= \frac{T_0^2 \operatorname{sinc}^2(f T_0)}{(2N+1)T_0} \left| \sum_{n=-N}^N a_n e^{-j2\pi f n T_0} \right|^2 \\ &= \frac{T_0^2 \operatorname{sinc}^2(f T_0)}{(2N+1)T_0} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N a_n a_m e^{-j2\pi f (n-m)T_0} \end{aligned}$$

$\lim_{N \rightarrow +\infty} ?$

ma...

se si esegue dapprima la media sulle realizzazioni...



Esempio (seguito)

$$\begin{aligned}
 E \left\{ \frac{|X_T(f)|^2}{T} \right\} &= \frac{T_0^2 \operatorname{sinc}^2(f T_0)}{(2N+1)T_0} E \left\{ \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N a_n a_m e^{-j2\pi f(n-m)T_0} \right\} \\
 &= \frac{T_0 \operatorname{sinc}^2(f T_0)}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^N \sum_{m=-N}^N E[a_n a_m] e^{-j2\pi f(n-m)T_0} \\
 &= \frac{T_0 \operatorname{sinc}^2(f T_0)}{(2N+1)} \sum_{n=-N}^N E[a_n^2] \\
 &= \frac{T_0 \operatorname{sinc}^2(f T_0)}{\cancel{(2N+1)}} \cancel{\sigma_a^2 (2N+1)}
 \end{aligned}$$

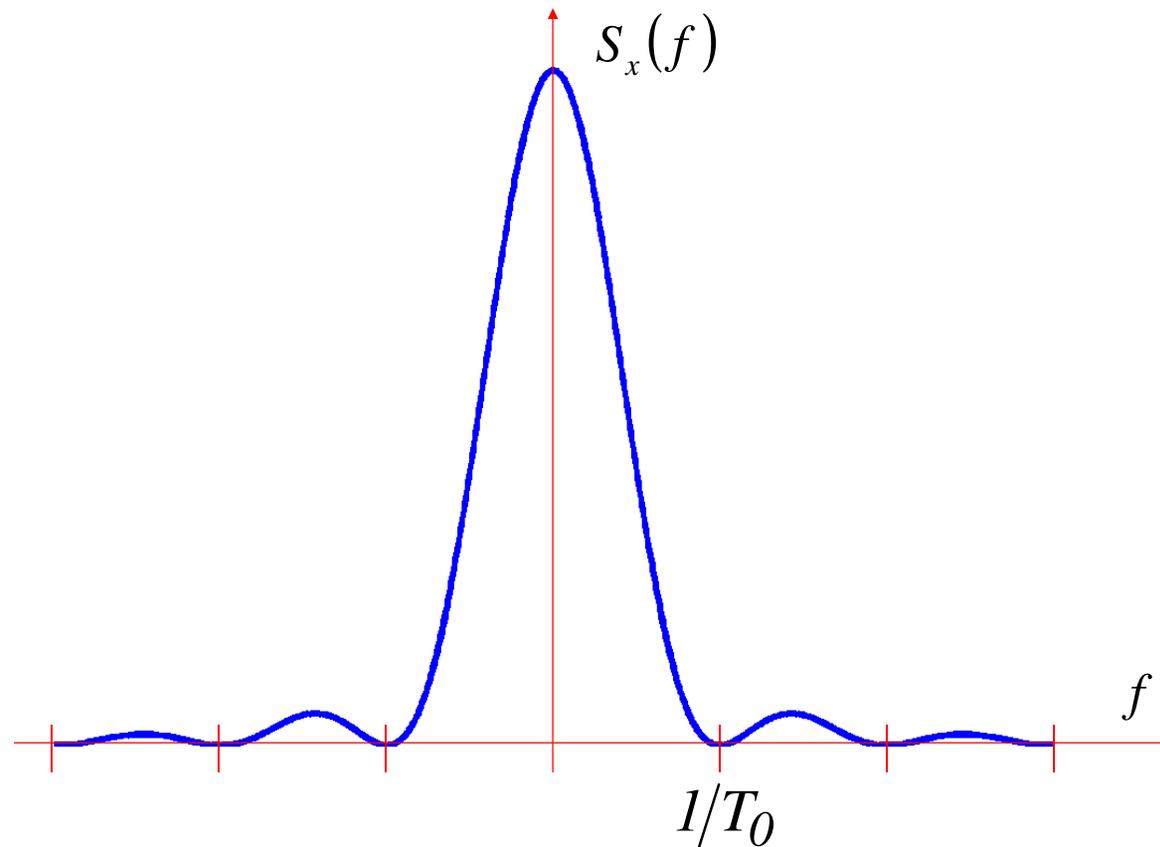
$$S_x(f) = \lim_{N \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{T} \right] = T_0 \sigma_a^2 [\operatorname{sinc}(f T_0)]^2$$

questo limite esiste



Esempio (seguito)

Pur non esistendo il $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|X_T(f)|^2}{T}$, esiste il $\lim_{T \rightarrow \infty} E \left[\frac{|X_T(f)|^2}{T} \right]$



Il teorema di Wiener – Khintchine

(senza dimostrazione)

Sia $R_x(t, t + \tau)$ la funzione di auto correlazione di un processo $\{x(t)\}$.

Se per qualsiasi τ finito e per qualsiasi intervallo \mathcal{A} di lunghezza $|\tau|$ si ha che:

$$\left| \int_{\mathcal{A}} R_x(t, t + \tau) dt \right| < \infty \quad \begin{array}{l} \text{In pratica,} \\ \text{condizione sempre verificata} \end{array}$$

allora la densità spettrale di potenza del processo è la

trasformata di Fourier

della media temporale della sua funzione di autocorrelazione.

$$S_x(f) = \mathcal{F} \left\{ \underbrace{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} R_x(t, t + \tau) dt}_{\text{funzione di } \tau} \right\}$$



Corollario

Se il processo è stazionario:

$$S_x(f) = \mathcal{F}\{R_x(\tau)\}$$

(per ogni valore di τ , $R_x(t, t + \tau)$ è costante rispetto a t)

Se il processo è ciclostazionario di periodo T_0 :

$$S_x(f) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{+T_0/2} R_x(t, t + \tau) dt\right\}$$

(per ogni valore di τ , $R_x(t, t + \tau)$ è periodica rispetto a t)

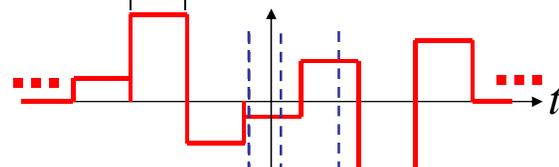
(Il suo valor medio rispetto a t coincide con il suo valor medio su un periodo)

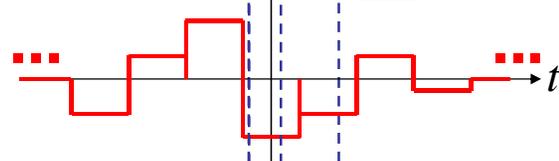


Esempio

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \operatorname{rect}\left[\frac{t-nT_0}{T_0}\right] \quad \left(\begin{array}{l} \text{segnale PAM, con } E[a_n]=0 \\ \text{e } E[a_i a_j] = \sigma_a^2 \delta_{ij} \end{array} \right) \quad (\text{vedi diap. N. 6})$$

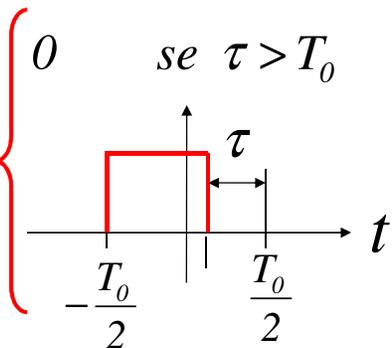
$$R_x(t, t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)]$$

$$= E\left\{ \left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n \operatorname{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T_0}\right) \right] \left[\sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \operatorname{rect}\left(\frac{t+\tau-mT_0}{T_0}\right) \right] \right\}$$


$$= E\left[\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_n a_m \operatorname{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T_0}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t+\tau-mT_0}{T_0}\right) \right]$$


$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} E[a_n a_n] \operatorname{rect}\left(\frac{t-nT_0}{T_0}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t+\tau-nT_0}{T_0}\right)$$

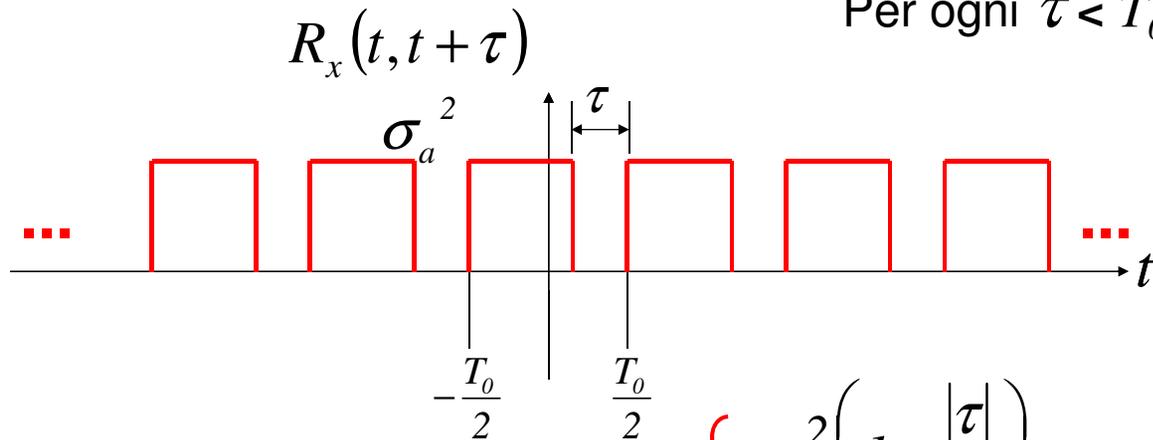
σ_a^2

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sigma_a^2 w(t-nT_0) \quad w(t) = \operatorname{rect}\left(\frac{t}{T_0}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{t+\tau}{T_0}\right) = \begin{cases} 0 & \text{se } \tau > T_0 \\ \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right) & \text{altrimenti} \end{cases}$$




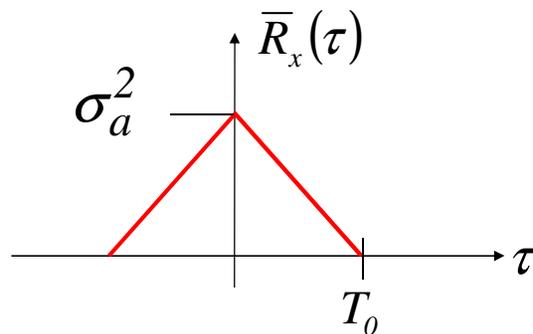
Esempio

Per ogni $\tau < T_0$ è periodica in t



Il valor medio rispetto a t è:

$$\begin{cases} \sigma_a^2 \left(1 - \frac{|\tau|}{T_0} \right) & \text{per } \tau \leq T_0 \\ 0 & \text{per } \tau > T_0 \end{cases}$$

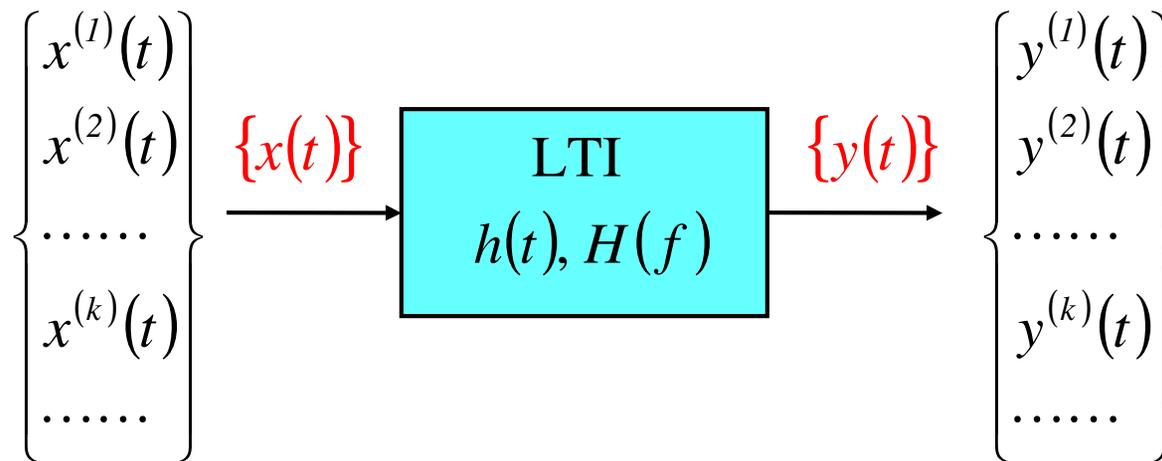


Trasformata di Fourier :

$$F\{\bar{R}_x(\tau)\} = S_x(f) = T_0 \sigma_a^2 [\text{sinc}(f T_0)]^2$$



Processi aleatori attraverso sistemi LTI



$\{x(t)\}$ = Processo aleatorio di ingresso, stazionario

$\{y(t)\}$ = Processo aleatorio di uscita

Il processo all'uscita è ancora stazionario?

Verificheremo cosa succede del **valor medio**
e della **funzione di autocorrelazione** di $\{y(t)\}$



Processi aleatori attraverso sistemi LTI

Valor medio:

$$y^{(k)}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^{(k)}(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$$E[y(t)] = E \left[\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t-\tau)]h(\tau)d\tau = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = m_y$$

somma di var. aleatorie pesate

indip. dal tempo

Funzione di mutua correlazione:

$$R_{xy}(t, t+\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E \left[x(t) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t+\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha \right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t)x(t+\tau-\alpha)]h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau-\alpha)h(\alpha)d\alpha = R_x(\tau) \otimes h(\tau)$$



Osservazione sulla funzione di mutua correlazione

Se la funzione di mutua correlazione fosse stata definita così:

$$R_{xy}(t + \tau, t) = E[x(t + \tau)y(t)]$$

si sarebbe ottenuto il seguente risultato: $R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(-\tau)$

(verifica a carico dello studente)

Funzione di auto correlazione:

$$\begin{aligned} R_y(t, t + \tau) &= E[y(t)y(t + \tau)] = E\left[y(t) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha \right] \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} E[y(t)x(t + \tau - \alpha)]h(\alpha)d\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{yx}(\tau - \alpha)h(\alpha)d\alpha \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xy}(\alpha - \tau)h(\alpha)d\alpha = R_{xy}(\tau) \otimes h(-\tau) \\ &= R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) \end{aligned}$$



Osservazione

Con la definizione di funzione di mutua correlazione

$$R_{xy}(t + \tau, t) = E[x(t + \tau)y(t)]$$

si sarebbe ottenuto lo stesso risultato: $R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$

Pertanto:

anche il processo di uscita è stazionario (almeno in senso debole)

Densità spettrale di potenza del processo di uscita:

$$\begin{aligned} S_y(f) &= \mathcal{F}\{R_y(\tau)\} = \mathcal{F}\{R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)\} \\ &= \mathcal{F}\{R_x(\tau)\} \times \mathcal{F}\{h(\tau)\} \times \mathcal{F}\{h(-\tau)\} \\ &= S_x(f) H(f) H^*(f) \quad = S_x(f) |H(f)|^2 \end{aligned}$$



Esempio

Sia:

$$h(t) = e^{-\frac{1}{2}t} u(t) \quad R_x(\tau) = e^{-|\tau|}$$

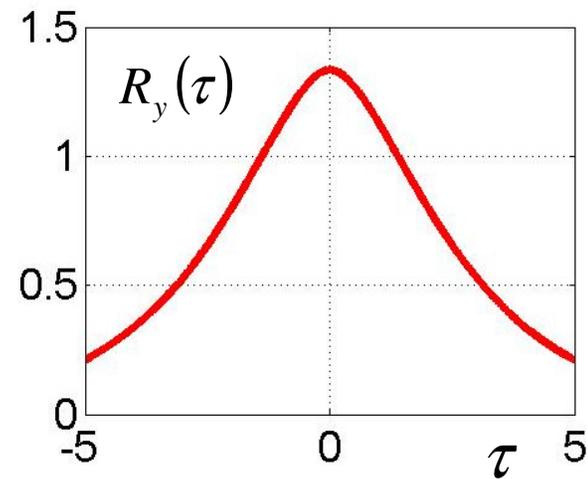
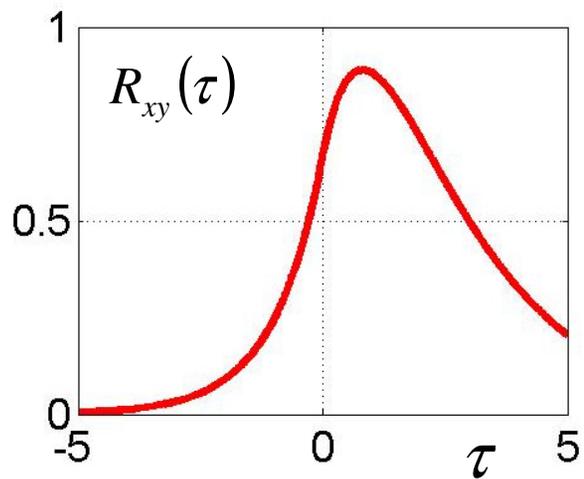
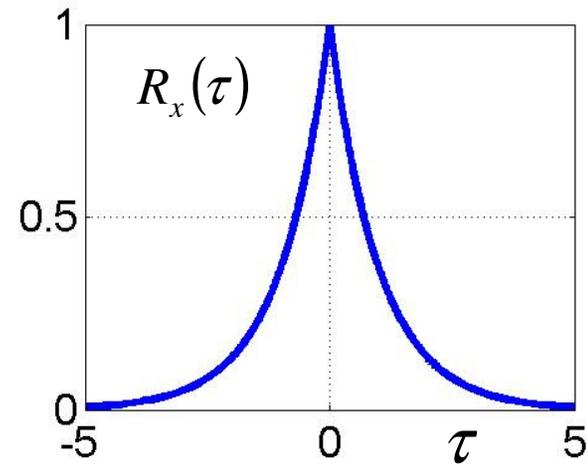
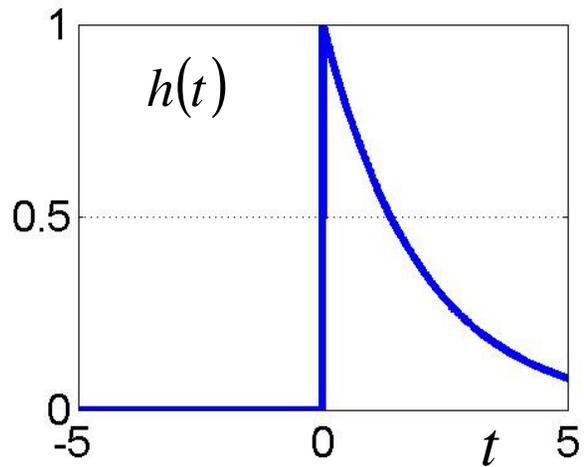
$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{\tau} e^{-|\alpha|} e^{-\frac{1}{2}(\tau-\alpha)} d\alpha = \begin{cases} \frac{2}{3} e^{\tau} & \tau \leq 0 \\ \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}\tau} - 2e^{-\tau} & \tau > 0 \end{cases}$$

$$R_y(\tau) \Big|_{\tau > 0} = \int_{\tau}^{+\infty} \left(\frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}\alpha} - 2e^{-\alpha} \right) e^{-\frac{1}{2}(\alpha-\tau)} d\alpha = \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}\tau} - \frac{4}{3} e^{-\tau}$$

$$R_y(\tau) = \frac{8}{3} e^{-\frac{1}{2}|\tau|} - \frac{4}{3} e^{-|\tau|}$$



Esempio



Processi aleatori gaussiani

Un processo aleatorio è detto “gaussiano” se:

scelto un qualsiasi intero n ,

a qualsiasi $n - pla$ di istanti $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$

corrisponde una $n - pla$ di variabili aleatorie $\{x(t_1), x(t_2), \dots, x(t_n)\}$

congiuntamente gaussiane

Significato:

La densità di probabilità congiunta è:

$$f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det(\mathbf{C})}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\mathbf{x} - \mathbf{m})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T\right]$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m}) = ((x_1 - m_1), (x_2 - m_2), \dots, (x_n - m_n))$$

$$\mathbf{C} = \text{matrice di covarianza} \quad C_{ij} = E[(x_i - m_i)(x_j - m_j)]$$



Esempio

Esempio per due variabili aleatorie gaussiane

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m}) = ((x_1 - m_1), (x_2 - m_2))$$

$$\mathbf{C} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & E[(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)] \\ E[(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)] & \sigma_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{vmatrix}$$

$$\rho = \frac{E[(x_1 - m_1)(x_2 - m_2)]}{\sigma_1\sigma_2} = \text{coeff. di correlazione}$$

$$\det \mathbf{C} = \sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)$$

$$(\mathbf{x} - \mathbf{m})\mathbf{C}^{-1}(\mathbf{x} - \mathbf{m})^T =$$

$$= ((x_1 - m_1) \quad (x_2 - m_2)) \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \begin{vmatrix} \sigma_2^2 & -\rho\sigma_1\sigma_2 \\ -\rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_1^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 - m_1) \\ (x_2 - m_2) \end{pmatrix}$$



Esempio

$$((x_1 - m_1)(x_2 - m_2)) \frac{1}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)} \begin{vmatrix} \sigma_2^2 & -\rho \sigma_1 \sigma_2 \\ -\rho \sigma_1 \sigma_2 & \sigma_1^2 \end{vmatrix} \begin{pmatrix} (x_1 - m_1) \\ (x_2 - m_2) \end{pmatrix}$$

$$= \frac{\sigma_2^2 (x_1 - m_1)^2 - 2\rho \sigma_1 \sigma_2 (x_2 - m_2)(x_1 - m_1) + \sigma_1^2 (x_2 - m_2)^2}{\sigma_1^2 \sigma_2^2 (1 - \rho^2)}$$

$$= \frac{\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2}\right)^2}{(1 - \rho^2)}$$

$$f_2(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi \sigma_1 \sigma_2 \sqrt{1 - \rho^2}} e^{-\frac{\left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho \left(\frac{x_1 - m_1}{\sigma_1}\right) \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2 - m_2}{\sigma_2}\right)^2}{2(1 - \rho^2)}$$



Proprietà

- 1) Un *processo gaussiano*, posto all'ingresso di un sistema lineare, dà luogo ad un processo di uscita *ancora gaussiano*.
- 2) Un processo gaussiano *stazionario in senso lato* è stazionario anche in *senso stretto*.
- 3) Se due processi gaussiani sono tra loro *incorrelati*, sono anche *indipendenti*.
- 4) Se di un processo gaussiano è nota la densità di probabilità *del secondo ordine*, allora è nota la densità di probabilità *di qualsiasi ordine*.



Teorema del limite centrale

Date N variabili aleatorie indipendenti $\{x_1, x_2, \dots, x_N\}$

di valor medio $\{m_1, m_2, \dots, m_N\}$ e varianza $\{\sigma_1^2, \sigma_2^2, \dots, \sigma_N^2\}$

La variabile aleatoria $Z = \sum_{i=1}^N x_i$ tende ad una variabile gaussiana con:

$$m = \sum_{i=1}^N m_i \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^N \sigma_i^2$$

a patto che per tutti gli indici i $\lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\sigma_i}{\sigma} = 0$

(ogni variabile aleatoria contribuisce in maniera infinitesima alla somma)

Molte grandezza fisiche relative a fenomeni naturali seguono una distribuzione statistica gaussiana



Il rumore bianco

Definizione

Un processo è detto “bianco” se la sua densità spettrale di potenza è costante per tutte le frequenze.

Alcuni processi di rumore naturali (ad esempio **il rumore termico**) possono essere considerati “bianchi” su un intervallo di frequenze molto ampio.

Es.: La densità spettrale del rumore dovuto all’agitazione termica degli elettroni in un conduttore è data da:

$$S_n(f) = \frac{hf}{2 \left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \right)} \quad \left\{ \begin{array}{l} h \text{ costante di Planck } (6.6 \times 10^{-34} \text{ J} \times \text{s}) \\ k \text{ costante di Boltzmann } (1.38 \times 10^{-23} \text{ J / } ^\circ\text{K}) \\ T \text{ temperatura assoluta } (^\circ\text{K}) \end{array} \right.$$

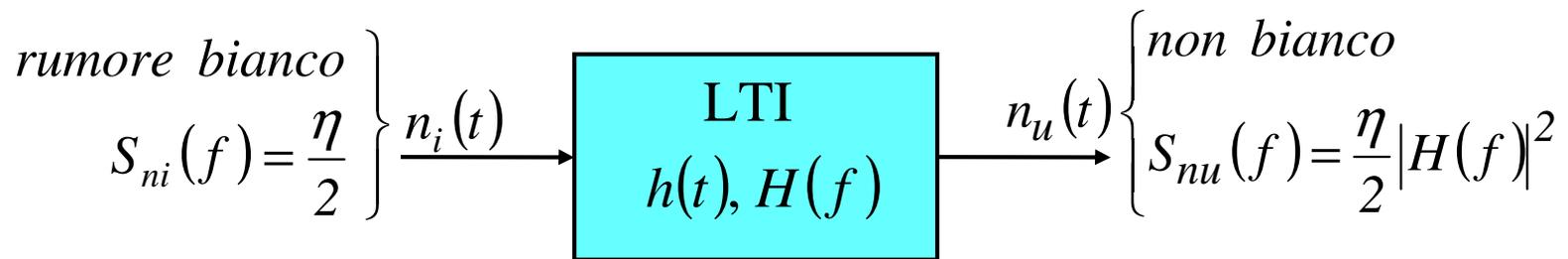


Il rumore termico

$$S_n(f) = \frac{hf}{2 \left(e^{\frac{hf}{kT}} - 1 \right)}$$

A $300^\circ K$ essa è praticamente costante e pari a $kT/2$ fino a frequenze dell'ordine di 10^{12} Hz.

Banda equivalente di rumore:



potenza di rumore in uscita:

$$P_{nu} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{nu}(f) df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df = \eta \times B_{eq} H_{\max}^2$$

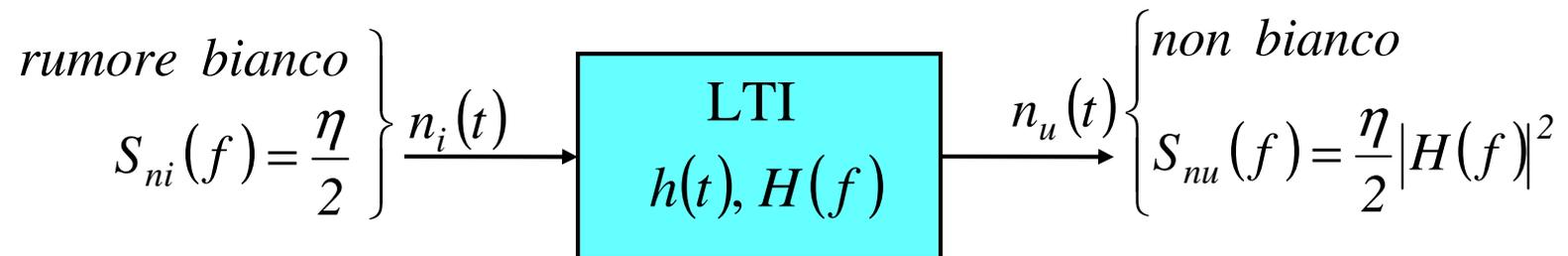
$$B_{eq} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} |H(f)|^2 df}{2H_{\max}^2}$$



Rumore bianco

Alcune considerazioni:

- a) Un processo aleatorio **bianco** è un processo **ideale**, poiché implica una potenza media **infinita**
- b) Utile per generare un processo aleatorio con densità spettrale di potenza $S(f)$.



- c) La funzione di auto correlazione di un processo aleatorio bianco stazionario di densità spettrale di potenza pari a $\eta/2$ è:

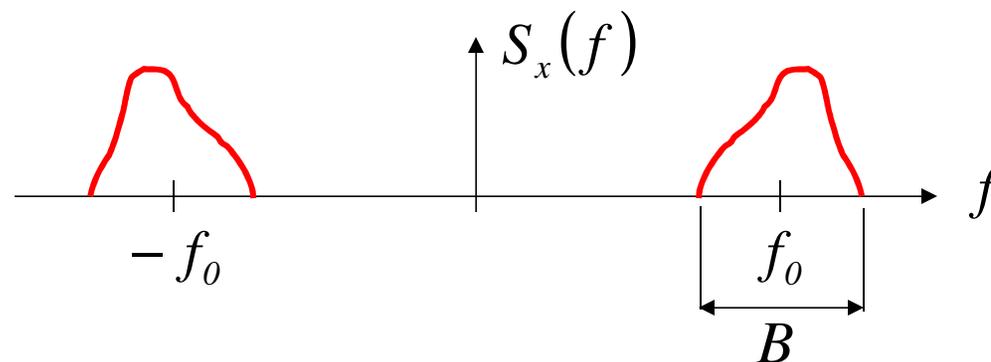
$$R_n(\tau) = \frac{\eta}{2} \delta(\tau)$$



Processi aleatori passa banda

Processi caratterizzati da:

$$S_x(f) = 0 \quad \text{tranne che su un intervallo di frequenze } B \text{ attorno ad una frequenza } f_0$$



Come per i segnali deterministici, anche per i processi passa banda si possono introdurre due processi in banda base:

$x_c(t)$ **componente in fase**

$x_s(t)$ **componente in quadratura**

tali che:
$$\{x(t)\} = \{x_c(t)\} \cos(2\pi f_0 t) - \{x_s(t)\} \sin(2\pi f_0 t)$$



Proprietà dei processi $x_c(t)$ e $x_s(t)$.

- processi in banda base ($S_{x_c}(f) = S_{x_s}(f) = 0$ tranne che su un intervallo di frequenze B attorno a $f = 0$)
- se $\{x(t)\}$ è un processo stazionario, $x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono congiuntamente stazionari:

$E\{x_c(t)\}$ e $E\{x_s(t)\}$ indep. da t

$$R_{x_c}(t, t + \tau) = R_{x_c}(\tau)$$

$$R_{x_s}(t, t + \tau) = R_{x_s}(\tau)$$

$$R_{x_c x_s}(t, t + \tau) = R_{x_c x_s}(\tau)$$



Proprietà dei processi $x_c(t)$ e $x_s(t)$

Hanno la medesima densità spettrale di potenza (e la stessa funzione di autocorrelazione). Risulta:

$$(ricordare) \quad x_c(t) = x(t)\cos(2\pi f_0 t) + \hat{x}(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$x_s(t) = \hat{x}(t)\cos(2\pi f_0 t) - x(t)\sin(2\pi f_0 t)$$

$$R_{x_c}(t, t + \tau) = E[x_c(t)x_c(t + \tau)] = \\ = E\{[x(t)\cos(\omega_0 t) + \hat{x}(t)\sin(\omega_0 t)][x(t + \tau)\cos(\omega_0(t + \tau)) + \hat{x}(t + \tau)\sin(\omega_0(t + \tau))]\}$$

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t + \tau)]\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t + \tau)) +$$

$$+ E[x(t)\hat{x}(t + \tau)]\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t + \tau)) +$$

$$\hat{R}_x(\tau) = E[\hat{x}(t)x(t + \tau)]\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t + \tau)) +$$

$$- \hat{R}_x(\tau) = E[\hat{x}(t)\hat{x}(t + \tau)]\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t + \tau))$$

$$= R_x(\tau)\cos(\omega_0 \tau) + \hat{R}_x(\tau)\sin(\omega_0 \tau)$$

Stesso per $x_s(t)$

$$R_{\hat{x}}(\tau) = R_x(\tau)$$



Proprietà dei processi $x_c(t)$ e $x_s(t)$

Con procedimento analogo

$$R_{x_c x_s}(\tau) = \hat{R}_x(\tau) \cos(\omega_0 \tau) - R_x(\tau) \sin(\omega_0 \tau)$$

Densità spettrale di potenza:

$$R_{x_c}(\tau) = R_{x_s}(\tau) = R_x(\tau) \cos(\omega_0 \tau) + \hat{R}_x(\tau) \sin(\omega_0 \tau)$$

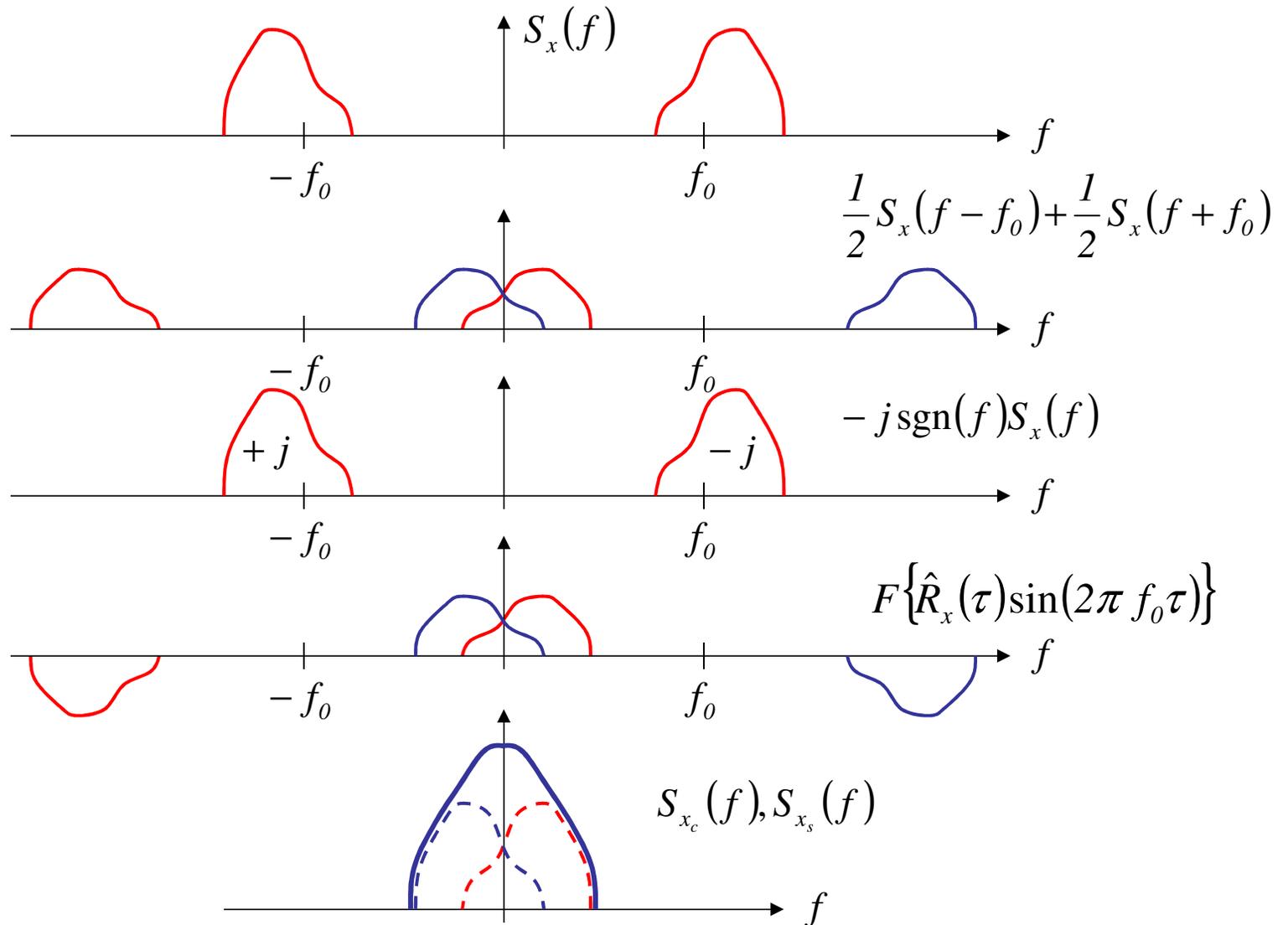
$$S_{x_c}(f) = S_{x_s}(f) = F \left\{ R_x(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) + \hat{R}_x(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau) \right\}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F \{ R_x(\tau) \} = S_x(f) \\ F \{ R_x(\tau) \cos(2\pi f_0 \tau) \} = \frac{1}{2} S_x(f - f_0) + \frac{1}{2} S_x(f + f_0) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} F \{ \hat{R}_x(\tau) \} = -j \operatorname{sgn}(f) S_x(f) \\ F \{ \hat{R}_x(\tau) \sin(2\pi f_0 \tau) \} = \\ = -\operatorname{sgn}(f - f_0) \frac{1}{2} S_x(f - f_0) + \operatorname{sgn}(f + f_0) \frac{1}{2} S_x(f + f_0) \end{array} \right.$$

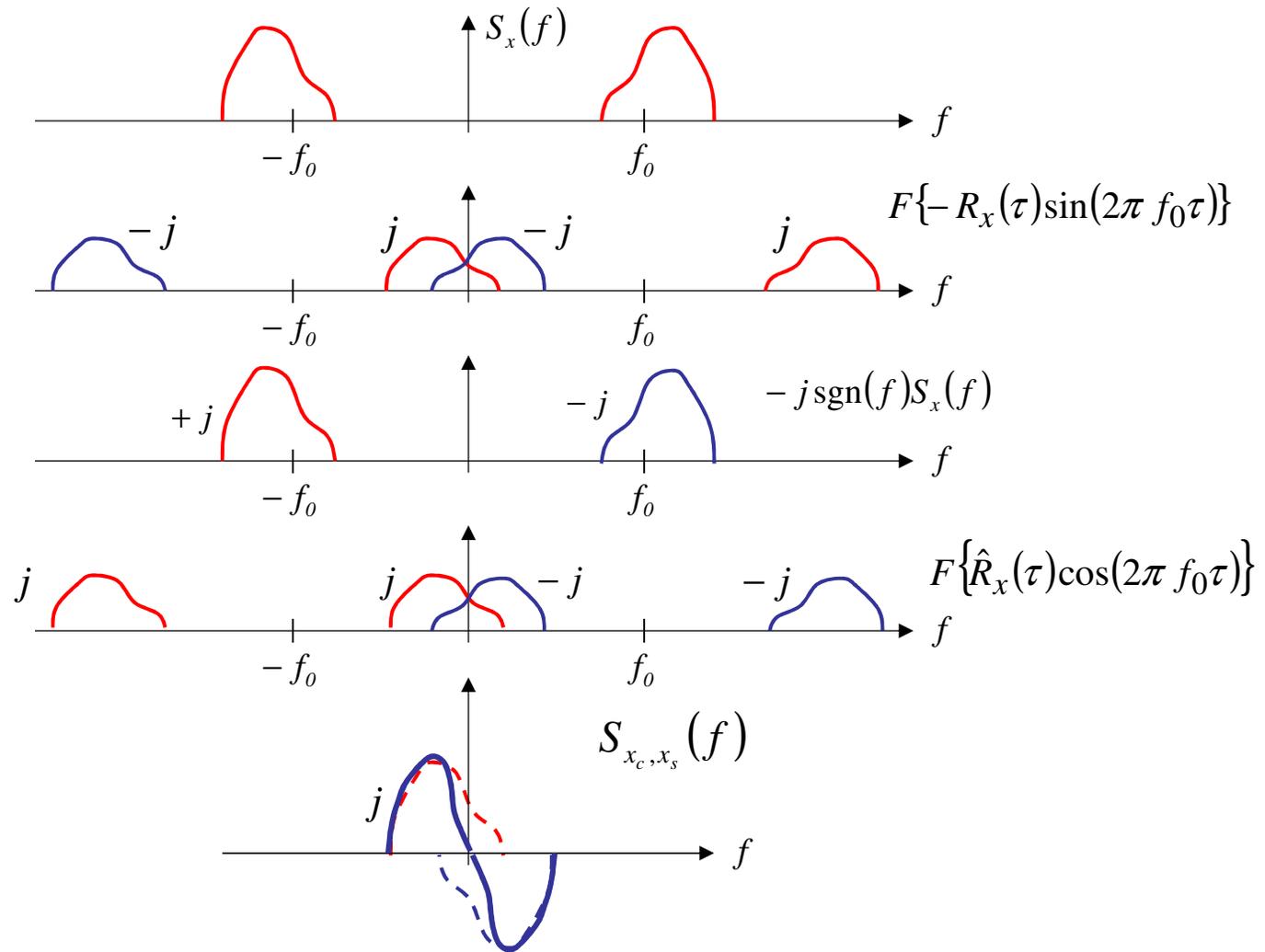


Densità spettrale di potenza



Densità spettrale incrociata

In modo analogo: $S_{x_c, x_s}(f) = F\{\hat{R}_x(\tau)\cos(2\pi f_0\tau) - R_x(\tau)\sin(2\pi f_0\tau)\}$



Osservazioni

In conclusione:

$$S_{x_c}(f) = S_{x_s}(f) = \begin{cases} S_x(f - f_0) + S_x(f + f_0) & \text{per } f \text{ attorno a } f = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$S_{x_c x_s}(f) = F\{R_{x_c x_s}(\tau)\} = \begin{cases} -j[S_x(f + f_0) - S_x(f - f_0)] & \text{per } f \text{ attorno a } f = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$R_{x_c x_s}(\tau) \text{ dispari} \implies R_{x_c x_s}(0) = 0$$

Fissato un qualsiasi istante t ,

$x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono due var. aleatorie **incorrelate**

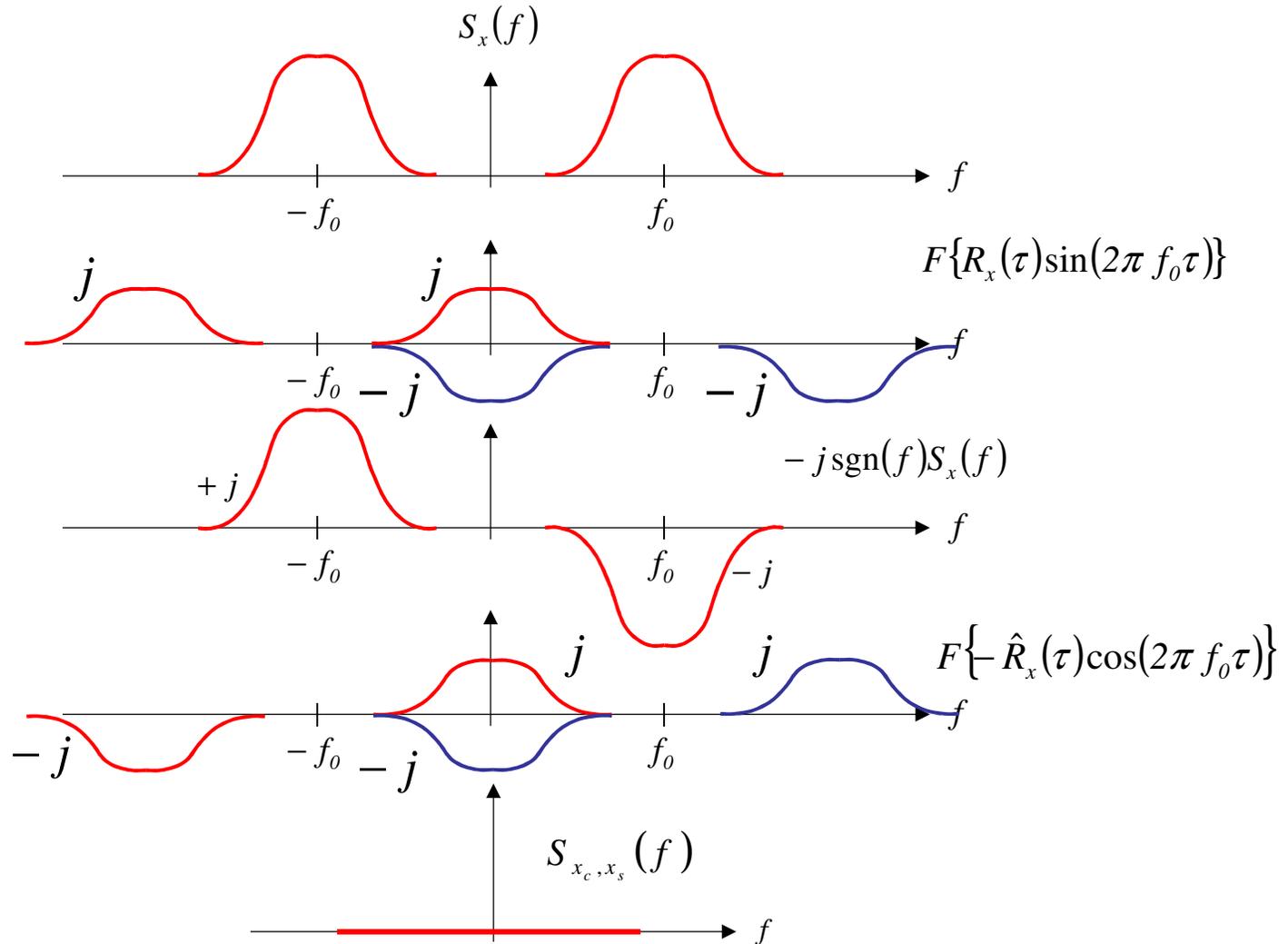
Se $S_x(f)$ è simmetrica rispetto a f_0 , attorno a $f = 0$

$$S_x(f + f_0) = S_x(f - f_0) \\ \Rightarrow S_{x_c x_s}(f) \equiv 0 \Rightarrow R_{x_c x_s}(\tau) \equiv 0$$

$x_c(t)$ e $x_s(t)$ sono due processi aleatori incorrelati



Esempio



Riassunto

La **densità di potenza** di un processo aleatorio è una funzione della frequenza così definita:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} E \left\{ \frac{|X_T^{(k)}(f)|^2}{T} \right\}$$

essendo
$$X_T^{(k)}(f) = \int_{-T/2}^{+T/2} x^{(k)}(t) e^{-j2\pi f t} dt$$

$S_x(f) df =$ **Potenza media portata dalle componenti spettrali nella banda infinitesima df**

$\int_{f_1}^{f_2} S_x(f) df =$ **Potenza media portata dalle componenti spettrali nella banda tra f_1 e f_2**

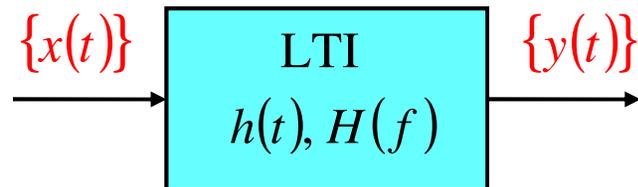
Teorema di Wiener-Khintchine:
$$S_x(f) = \mathcal{F} \left\{ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} R_x(t, t + \tau) dt \right\}$$

Se il processo è stazionario:
$$S_x(f) = \mathcal{F} \{R_x(\tau)\}$$



Riassunto

Processi aleatori stazionari attraverso sistemi LTI



$$E[y(t)] = m_y = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) d\tau$$

$$R_{xy}(t, t + \tau) = E[x(t)y(t + \tau)] = \int_{-\infty}^{+\infty} R_x(\tau - \alpha) h(\alpha) d\alpha = R_x(\tau) \otimes h(\tau)$$

$$R_y(t, t + \tau) = E[y(t)y(t + \tau)] = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

$$S_y(f) = S_x(f) |H(f)|^2$$



Riassunto

Processi aleatori passa banda:

$$\{x(t)\} = \{x_c(t)\} \cos(2\pi f_0 t) - \{x_s(t)\} \sin(2\pi f_0 t)$$

Se il processo è stazionario:

$E\{x_c(t)\}$ e $E\{x_s(t)\}$ indep. da t

$$R_{x_c}(t, t + \tau) = R_{x_c}(\tau)$$

$$R_{x_s}(t, t + \tau) = R_{x_s}(\tau)$$

$$R_{x_c x_s}(t, t + \tau) = R_{x_c x_s}(\tau)$$

$$\left. \begin{aligned} R_{x_c}(t, t + \tau) &= E[x_c(t)x_c(t + \tau)] = \\ R_{x_s}(t, t + \tau) &= E[x_s(t)x_s(t + \tau)] = \end{aligned} \right\} R_x(\tau) \cos(\omega_0 \tau) + \hat{R}_x(\tau) \sin(\omega_0 \tau)$$
$$R_{x_c x_s}(\tau) = R_x(\tau) \sin(\omega_0 \tau) - \hat{R}_x(\tau) \cos(\omega_0 \tau)$$

$$S_{x_c}(f) = S_{x_s}(f) = \begin{cases} S_x(f - f_0) + S_x(f + f_0) & \text{per } f \text{ attorno a } f = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

$$S_{x_c x_s}(f) = F\{R_{x_c x_s}(\tau)\} = \begin{cases} -j[S_x(f + f_0) - S_x(f - f_0)] & \text{per } f \text{ attorno a } f = 0 \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases}$$

