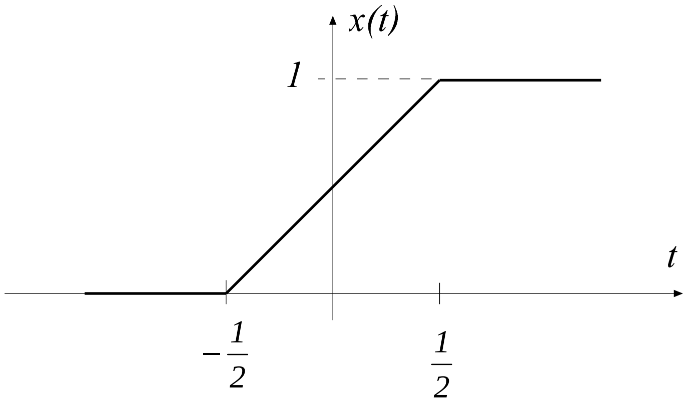
ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 18-26 aprile 2000
(riservato agli studenti fuori corso)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Si calcoli la trasformata di Fourier della parte dispari del segnale rappresentato in figura 1.



Soluzione

La soluzione corrisponde alla parte immaginaria della trasformata di $x(t)$. Risulta evidente che $x(t)=\int_{-\infty}^{t} rect[\tau]d\tau$. Poiché

$$X(\omega)=\left(\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right)Sa\left(\frac{1}{2}\omega\right)=-j\frac{Sa\left(\frac{1}{2}\omega\right)}{\omega}+\pi\delta(\omega),$$

la trasformata richiesta è: $-j\dfrac{Sa\left(\frac{1}{2}\omega\right)}{\omega}$.

Esercizio N.2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta in frequenza:

$$H(\Omega)=e^{-j\frac{\Omega}{2}} \qquad (-\pi\leq\Omega\leq\pi)$$

Determinare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

La’antitrasformazione della funzione $H(\Omega) = e^{-j\frac{\Omega}{2}}$ è semplice:

$$h[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} e^{-j\frac{\Omega}{2}} e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\Omega\left(n-\frac{1}{2}\right)}}{j\left(n-\frac{1}{2}\right)}\right]_{-\pi}^{\pi} = \frac{sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right]}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}$$

Esercizio N. 3

Nel sistema di figura 1 il blocco A è un sistema LTI tempo discreto, causale, descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{4}y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

Scrivere l’equazione alle differenze per il sistema B e determinare la sua risposta impulsiva, sapendo che $w[n]=x[n-1]$.

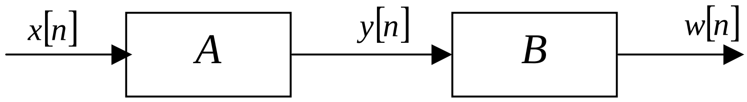


Fig. 1

Soluzione

La funzione di sistema del blocco A risulta:

$$H_A(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}} \qquad \text{ROC} \quad |z| > \frac{1}{2}$$

Se il sistema B fosse l’inverso di A, $w[n]$ sarebbe pari a $x[n]$. Quindi il sistema B è costituito dall’inverso di A in cascata con un elemento ritardatore di una unità temporale. Cioè:

$$H_B(z) = \frac{1 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{z^{-1} - \frac{1}{2}z^{-2}} z^{-1} = \frac{1 + z^{-1} + \frac{1}{4}z^{-2}}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}}$$

A tale funzione corrisponde la seguente equazione alle differenze:

$$w[n]-\frac{1}{2}w[n-1]=y[n]+y[n-1]+\frac{1}{4}y[n-2]$$

e la corrispondente risposta impulsiva (tenendo conto che il sistema complessivo deve essere causale) sarà:

$$h_B[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]$$

Questa funzione può essere scritta in vari modi. Per comodità dello studente che vorrà verificare il risultato da lui ottenuto, si riportano qui alcune varianti della medesima funzione:

$$\begin{aligned}
h_B[n]&=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n} u[n-2]\\
&=\left(\frac{1}{2}\right)^n \{u[n]+u[n-2]\}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]\\
&=\delta[n]+\frac{3}{2}\delta[n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]\\
&=\delta[n]+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]+\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-2]\\
&=\delta[n]-\frac{1}{2}\delta[n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n-1]
\end{aligned}$$

Esercizio N. 4

Un processo aleatorio stazionario ha la seguente funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau)=e^{-\frac{1}{2}|\tau|}$$

Esso viene applicato all'ingresso di un derivatore. Si calcoli la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

Soluzione

Il problema può essere risolto sia nel dominio della variabile ω sia in quello della variabile τ.

Soluzione in ω:

La densità spettrale di potenza del processo è data dalla trasformata di Fourier della funzione $R_x(\tau)=exp\left(-\frac{1}{2}|\tau|\right)$ e quindi si ha $S_x(\omega)=\dfrac{1}{\frac{1}{4}+\omega^2}$. La densità spettrale del processo di uscita è :

$$S_y(\omega)=\frac{\omega^2}{\frac{1}{4}+\omega^2}=1-\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}+\omega^2}.$$

L'antitrasformata di $S_y(\omega)$, vale a dire $R_y(\tau)$, è pari a $\delta(\tau)-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}$.

<u>Soluzione in τ:</u>

La risposta impulsiva del derivatore è pari a $\delta'(t)$. Quindi:

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes\delta'(\tau)\otimes\delta'(-\tau)=-\frac{d^2R_x(\tau)}{d\tau^2}$$

$$\frac{dR_x(\tau)}{d\tau}=\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\tau}u(-\tau)-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau}u(\tau)$$

$$-\frac{d^2R_x(\tau)}{d\tau^2}=-\frac{1}{4}e^{\frac{1}{2}\tau}u(-\tau)-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}\tau}u(\tau)+\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\tau}\delta(\tau)+\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}\tau}\delta(\tau)=\delta(\tau)-\frac{1}{4}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}$$