ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 15-18 settembre 2000

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ con il segnale

$$h(t,\tau)=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\cos[\omega_0(t-\tau)]$$

Ricavare la risposta del sistema al segnale di ingresso $x(t)=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\cos(\omega_0 t)$.

Soluzione

La soluzione è data dal seguente integrale:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left[\frac{\tau}{T}\right]\cos(\omega_0\tau)\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\cos(\omega_0(t-\tau))d\tau=$$

$$=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(\omega_0\tau)\cos(\omega_0(t-\tau))d\tau$$

$$=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\left\{\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(\omega_0 t)\,d\tau+\frac{1}{2}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(\omega_0(t-2\tau))\,d\tau\right\}$$

$$=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\left\{\frac{T}{2}\cos(\omega_0 t)-\frac{1}{4\omega_0}\sin[\omega_0(t-T)]+\frac{1}{4\omega_0}\sin[\omega_0(t+T)]\right\}$$

$$=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\left\{\frac{T}{2}+\frac{\sin(\omega_0 T)}{2\omega_0}\right\}\cos(\omega_0 t)$$

Esercizio N.2

Nel sistema LTI tempo-discreto indicato in figura 1 il blocco A ha una risposta in frequenza $H_A(\Omega)=1+2e^{-j3\Omega}$, mentre il blocco B ha una risposta impulsiva $h_B[n]=u[n]$. Si detrmini la sua risposta al segnale di ingresso $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

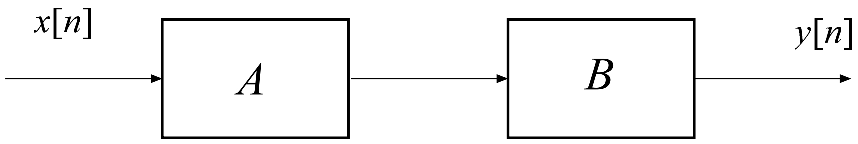

Fig.1

Soluzione

Il blocco A risponde a $x[n]$ con $x[n]+2x[n-3]$. Il blocco B esegue la somma corrente del segnale al suo ingresso. I due blocchi si possono invertire tra loro: in questo modo l'uscita del primo blocco (blocco B) sarà

$$y_1[n]=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k = 2\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] = 2-\left(\frac{1}{2}\right)^n & \text{per } n\geq 0\\ 0 & \text{per } n<0\end{cases}$$

e l'uscita dell'intero sistema risulterà:

$$y[n]=\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right]u[n]+2\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right]u[n-3]$$

Esercizio N. 3

Si consideri ancora il sistema di figura 1. Si individui l'equazione alle differenze che ne descrive il comportamento; si valuti la sua funzione di sistema con la relativa zona di convergenza e si calcoli la sua risposta impulsiva. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è causale e se è stabile.

Soluzione

Indicando con $w[n]$ il segnale presente all'uscita del blocco B (fig. I), si possono scrivere le seguenti equazioni alle differenze:

$$w[n]=x[n]+2x[n-3]$$
$$y[n]-y[n-1]=w[n]$$

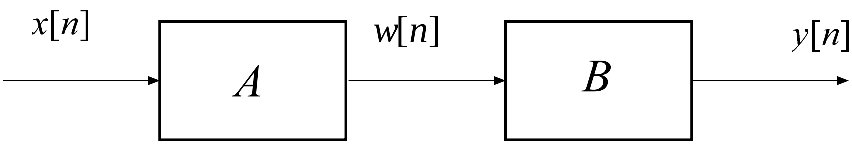

Fig. I

Eliminando $w[n]$ si ottiene l'equazione che descrive il sistema complessivo:

$$y[n]-y[n-1]=x[n]+2x[n-3]$$

Eseguendo la trasformata Z di entrambi i membri dell'equazione, si perviene alla seguente funzione di sistema:

$$H(z)=\frac{1+2z^{-3}}{1-z^{-1}}$$

Essa presenta due regioni di convergenza, individuate rispettivamente da $|z|>1$ e $|z|<1$:

Il sistema è costituito dalla cascata di due sistemi causali, e pertanto esso deve risultare causale; la regione di convergenza appropriata è quindi data da $|z| > 1$. Poiché la circonferenza di raggio unitario non appartiene alla regione di convergenza, il sistema non è stabile.

Ad $H(z)$ corrisponderà la risposta impulsiva $h[n] = u[n] + 2u[n-3]$.

Esercizio N. 4

All'ingresso del sistema di figura 2 viene posto un rumore gaussiano bianco di densità spettrale di potenza (bilaterale) $S_x(f) = \eta/2$. Il blocco A presenta una risposta in frequenza $H(\omega) = 1 - e^{-j3\omega}$, mentre il blocco B ha una risposta impulsiva $h_B(t) = u(t)$.

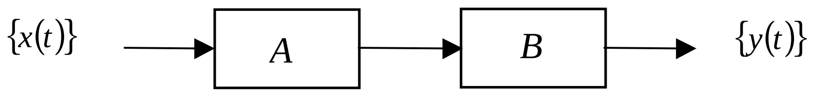

Fig. 2

Si calcoli la funzione di autocorrelazione e la densità spettrale del processo di uscita.

Soluzione

La funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)$ del processo di ingresso è data da $\frac{\eta}{2}\delta(\tau)$. La risposta impulsiva $h(t)$ dell'intero sistema è pari a $u(t) - u(t-3)$. Pertanto la funzione di autocorrelazione del processo di uscita risulta:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = \frac{\eta}{2} h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Come indicato in figura II, si tratta di effettuare la convoluzione tra due funzioni rettangolari. Tale convoluzione dà luogo alla funzione triangolare, mostrata nella stessa figura.

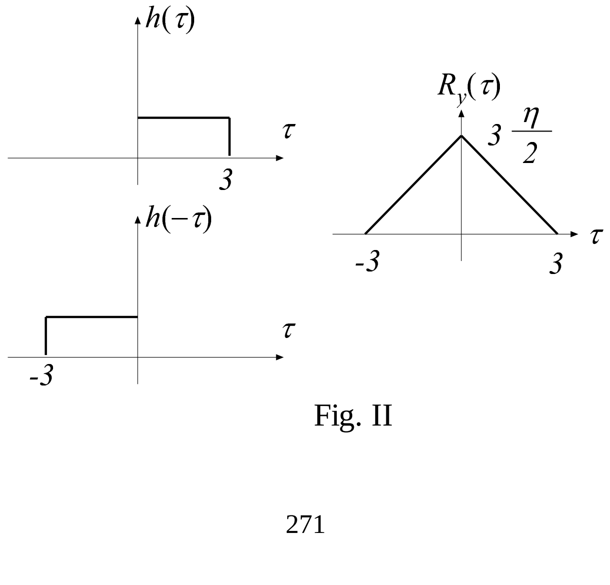

Fig. II

Per il calcolo della densità spettrale di potenza, conviene far riferimento alla formula:

$$S_y(f) = S_x(f)\left|H(f)\right|^2$$

Poiché $H(f) = \dfrac{1-e^{-j6\pi f}}{j2\pi f}$, e quindi $\left|H(f)\right|^2 = \dfrac{2[1-\cos(6\pi f)]}{4\pi^2 f^2}$, risulta:

$$S_y(f) = \frac{\eta}{2}\,\frac{2[1-\cos(6\pi f)]}{4\pi^2 f^2}$$