ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 26 – 27 giugno 2001

Prova scritta

Esercizio N. 1

Tra l'ingresso $x(t)$ e l'uscita $y(t)$ di un sistema LTI causale esiste la seguente relazione:

$$\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)-\frac{dx(t)}{dt}$$

Determinare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

Si determini preliminarmente la risposta in frequenza del sistema dato. Trasformando entrambi i membri dell'equazione differenziale risulta:

$$Y(\omega)[1+j\omega]=X(\omega)[1-j\omega] \quad \Rightarrow \quad H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1-j\omega}{1+j\omega}$$

$$H(\omega)=\frac{1}{1+j\omega}-\frac{j\omega}{1+j\omega}$$

Poiché l'antitrasformata della funzione $\frac{1}{1+j\omega}$ è $e^{-t}u(t)$, la risposta impulsiva del sistema sarà:

$$h(t)=e^{-t}u(t)-\frac{d}{dt}\left[e^{-t}u(t)\right]=e^{-t}u(t)-\left[-e^{-t}u(t)+\delta(t)\right]=2e^{-t}u(t)-\delta(t)$$

Esercizio N.2

Si consideri il sistema LTI tempo discreto rappresentato in figura 1.

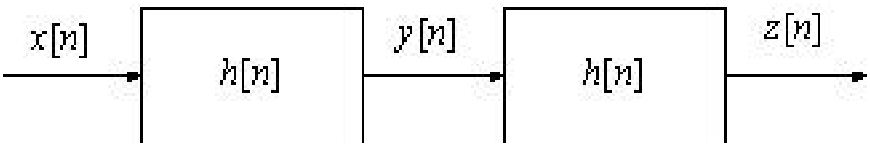

Fig. 1

Si sa che allorquando $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$, allora $y[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$.

Determinare la corrispondente risposta $z[n]$.

Soluzione

Si calcoli dapprima la trasformata di Fourier di $h[n]$, vale a dire la risposta in frequenza dei due sottosistemi che costituiscono l'intero sistema.

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{X\left(e^{j\Omega}\right)}=\frac{1-e^{-j\Omega}}{\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{2}e^{-j\Omega}}}=\left(1-e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)=$$

$$=1-\frac{3}{2}e^{-j\Omega}+\frac{1}{2}e^{-j2\Omega}$$

Ciò significa che $h[n]=\delta[n]-\frac{3}{2}\delta[n-1]+\frac{1}{2}\delta[n-2]$. Se all'ingresso del secondo blocco c'è il segnale $y[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$, è ovvio che $z[n]$ sarà pari a $h[n]-h[n-1]$. In definitiva:

$$z[n]=\left\{\delta[n]-\frac{3}{2}\delta[n-1]+\frac{1}{2}\delta[n-2]\right\}-\left\{\delta[n-1]-\frac{3}{2}\delta[n-2]+\frac{1}{2}\delta[n-3]\right\}=$$

$$=\delta[n]-\frac{5}{2}\delta[n-1]+2\delta[n-2]-\frac{1}{2}\delta[n-3]$$

Esercizio N. 3

Si determini la Z-trasformata del segnale:

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}u[n+3]$$

e si determini il suo diagramma zeri – poli.

Soluzione

Il segnale $x[n]$ può essere scritto come:

$$x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}u[n+3]=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}u[n+3]$$

Poiché la Z-trasformata di $\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$ è $\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$, quella di $x[n]$ sarà:

$$X(z)=\frac{4z^{3}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}\qquad ROC\ \ |z|>\frac{1}{2}$$

Questa funzione ha uno zero di ordine 4 nell'origine e un polo semplice in $z=\frac{1}{2}$.

Esercizio N. 4

Si consideri il processo aleatorio:

$$x(t) = a\cos(wt + f)$$

in cui a, w, f sono tre variabili aleatorie tra loro indipendenti.

La variabile a è uniformemente distribuita tra 0 e 1.

La variabile w può assumere soltanto i valori $w_1, w_2 e\, w_3$, ciascuno con probabilità pari a $1/3$.

La variabile f può assumere soltanto i valori $0, \frac{p}{2}, p$ e $\frac{3p}{2}$ ciascuno con probabilità ¼

Si determini il valore medio del processo.

Soluzione

Tenendo conto della indipendenza delle tre variabili aleatorie che definiscono il processo, si può dire che:

$$E[a\cos(wt + f)] = \int_0^1 da \int_0^{+\infty} dw \int_0^{2p} df \{a\cos(wt + f)p(f)\,p(w)\,p(a)\}$$

ove:

$$p(a) = \begin{cases} 1 & 0 \le a \le 1 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

$$p(w) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} d(w - w_k)$$

$$p(f) = \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{4} d(f - f_k)$$

Eseguendo dapprima l'integrazione rispetto a f si ricava:

$$E[x(t)] =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^1\int_0^{+\infty}\left[a\cos(wt) + a\cos\left(wt - \frac{p}{2}\right) + a\cos(wt - p) + + a\cos\left(wt + \frac{p}{2}\right)\right]p(w)p(a)dw\,da$$

Ma per $\forall t$, $\forall w$ e $\forall a$ la funzione integranda nulla e pertanto lo è anche il valor medio del processo.