Teoria dei Segnali
(Appello del 5 giugno 2002)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Si considerino i segnali periodici $x_1(t)$ e $x_2(t)$ rappresentati in figura 1. Per ognuno di essi dire se:

a) i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier con esponenziali complessi hanno:
   - parte reale nulla
   - parte immaginaria nulla
   - parte reale e immaginaria entrambe diverse da zero

b) gli sviluppi in serie di Fourier con funzioni trigonometriche comprendono (oltre ad un termine costante):
   - solo i termini in coseno
   - solo i termini in seno
   - sia termini in seno, sia in coseno.

Detti C_{k1} i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier con esponenziali complessi del segnale $x_1(t)$, esprimere attraverso di essi quelli relativi al segnale $x_2(t)$.

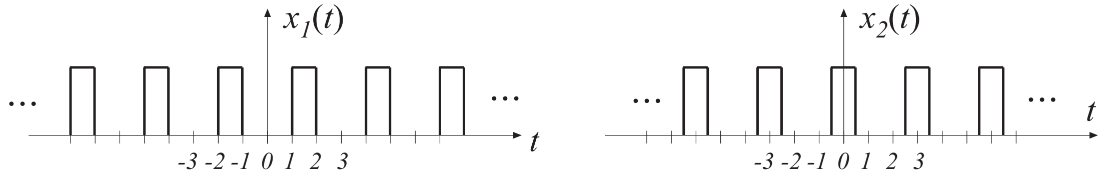

Fig. 1

Soluzione

a) Entrambi i segnali $x_1(t)$ e $x_2(t)$ sono funzioni pari: pertanto il loro sviluppo in serie di Fourier con funzioni esponenziali complesse avrà coefficienti reali.
b) Per lo stesso motivo, lo sviluppo in serie di Fourier tramite funzioni trigonometriche dovrà contenere solamente i termini in coseno, essendo $sin(2\pi kf_0 t)$una funzione dispari del tempo per qualunque valore di *k*.

Il segnale $x_2(t)$ è una versione di $x_1(t)$, traslata di $T/2$ (per inciso, $T = 3$). Di conseguenza:

$$C_{k2} = C_{k1}e^{-jk2\pi\ f_0 \frac{T}{2}} = C_{k1}e^{-jk2\pi\frac{1}{T}\frac{T}{2}} = C_{k1}e^{-jk\pi} = C_{k1}(-1)^k$$

Esercizio N. 2

Il segnale tempo discreto di figura 2 è applicato ad un sistema LTI tempo discreto causale, retto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n]-y[n-1]+y[n-2]=x[n-1]-x[n-2]$$

Calcolare i valori del segnale di uscita per $-1 \le n \le 6$

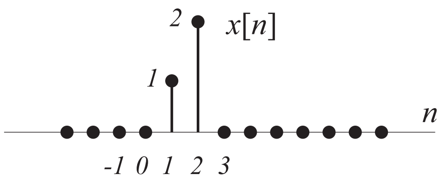

Fig. 2

Soluzione

Conviene compilare una tabellina, tenendo conto del fatto che il segnale di ingresso 'inizia' per $n=1$ e che quindi la risposta dovrà essere nulla per $n \le 0$, per la causalità del sistema. Conviene inoltre esplicitare $y[n]$, scrivendo:

$$y[n]=x[n-1]-x[n-2]+y[n-1]-y[n-2]$$

n	$x[n-1]$	$x[n-2]$	$y[n-1]$	$y[n-2]$	$y[n]$
-1	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0
2	1	0	0	0	1
3	2	1	1	0	2
4	0	2	2	1	-1
5	0	0	-1	2	-3
6	0	0	-3	-1	-2

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$\delta[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\delta[n-6k]$$

Dire se il sistema è stabile e se è causale.

Al suo ingresso è posto il segnale di figura 3. Calcolare la trasformata di Fourier della corrispondente risposta.

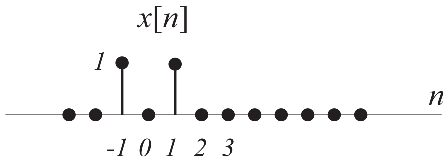

Fig. 3

Soluzione

Per decidere sulla stabilità del sistema proposto è necessario verificare se:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$$

Nel caso specifico si ha:

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

pertanto il sistema è stabile. Inoltre, poiché $h[n]=0$ per $n<0$, il sistema è anche causale.

Per quanto riguarda la trasformata dei Fourier della risposta al segnale di figura 3, si tenga presente che ogni impulso del tipo $\delta[n-6k]$ contenuto in $h[n]$ dà luogo in uscita ad una replica di $x[n]$ attorno al valore $n=6k$. Quindi il segnale di uscita sarà pari a :

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k x[n-6k]$$

e ad esso corrisponderà la trasformata di Fourier:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k X\left(e^{j\Omega}\right) e^{-j6k\Omega} = X\left(e^{j\Omega}\right) \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} e^{-j6\Omega}\right)^k = X\left(e^{j\Omega}\right) \frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j6\Omega}}$$

Ma $X\left(e^{j\Omega}\right) = 2\cos(\Omega)$, e in definitiva

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{2\cos(\Omega)}{1-\frac{1}{2}e^{-j6\Omega}}$$

Esercizio N. 4

In una trasmissione via radio una sorgente trasmette in successione pacchetti di dati. Essi vengono corrotti dalla presenza di rumore. Ogni qualvolta il ricevitore riceve un pacchetto privo di errori , invia un messaggio di corretta ricezione; in caso contrario ne invia uno di ricezione errata e la sorgente ritrasmette il pacchetto errato. Si assuma che la probabilità di 'pacchetto errato' sia $q=0.2$. Detta **X** la variabile aleatoria che rappresenta il numero di trasmissioni di un pacchetto, determinare la sua densità di probabilità.

Soluzione

La variabile aleatoria **X** è di tipo discreto e può assumere qualsiasi valore intero $k \geq 1$. Pertanto la sua densità di probabilità sarà costituita da impulsi ideali centrati nei valori $x = k$, ciascuno di area pari alla probabilità dell'evento "pacchetto trasmesso *k* volte". Tale evento si verifica allorquando le prime *k-1* trasmissioni avvengono con errore e la *k*-esima va a buon fine. Siccome il risultato di ogni trasmissione è indipendente da quello delle precedenti, la probabilità di questo evento è:

$$P(k) = q^{(k-1)}(1-q) = 0.8 \times 0.2^{(k-1)} .$$

La densità di probabilità è dunque:

$$p_X(x) = 0.8 \sum_{k=1}^{+\infty} 0.2^{(k-1)} \delta(x-k)$$

Per inciso, una variabile aleatoria discreta caratterizzata da questa densità di probabilità si dice 'geometrica'.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio $\{x(t)\}$ stazionario in senso lato di valor medio pari a *10* volt è applicato all'ingresso di un sistema LTI, avente risposta impulsiva

$$h(t) = \begin{cases} e^{t/0.2} & \text{per } 0 \leq t \leq 0.1 \text{ sec} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare il valor medio del processo aleatorio all'uscita del sistema.

Soluzione

Il valore medio di un processo stazionario all'uscita di un sistema LTI è legato a quello del processo di ingresso dalla relazione:

$$m_y = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) dt$$

Nel nostro caso si avrà:

$$m_y = 10 \int_0^{0.1} e^{-t/0.2} dt = -10 \times 0.2 e^{-t/0.2} \Big|_0^{0.1} = 2 - 2e^{-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{e}}\right)$$

Esercizio N. 6

Un rumore gaussiano bianco ha densità spettrale di potenza bilaterale pari a 2 W/Hz. Esso è posto all'ingresso di un filtro RC, avente risposta impulsiva

$$h(t) = e^{-100\,t} u(t)$$

Calcolare la potenza media del processo aleatorio all'uscita del filtro.

Soluzione

Si calcoli la risposta in frequenza del filtro:

$$H(f) = \int_0^{+\infty} e^{-100\,t} e^{-j2\pi f t} dt = \frac{1}{100 + j2\pi f}$$

Tramite la risposta in frequenza del sistema è possibile risalire alla densità spettrale di potenza del processo in uscita:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = \frac{2}{10^4 + 4\pi^2 f^2}$$

Pertanto la potenza media corrispondente risulta:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{10^4 + 4\pi^2 f^2} df = \frac{2}{10^4} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + \frac{4}{10^4}\pi^2 f^2} df = \frac{2}{10^4} \times \frac{10^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{100\pi} \arctan(x) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{1}{100}$$