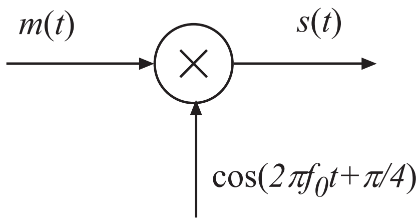
Teoria dei Segnali
(19 dicembre 2002)

II Provetta

Esercizio N. 1 *(per gli studenti della laurea quinquennale)*

All'ingresso del modulatore in figura c'è il segnale $m(t)=2\cos(\Omega_0 t)$. Si calcoli l'inviluppo complesso del segnale modulato $s(t)$, relativo alla frequenza f_0.



Soluzione

Il segnale $s(t) = 2\cos(\Omega_0 t)\cos\left(2\pi f_0 t+\frac{\pi}{4}\right)$ è facilmente esprimibile in forma canonica:

$$s(t)=2\cos(\Omega_0 t)\left\{\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(2\pi f_0 t)-\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\sin(2\pi f_0 t)\right\}$$

Da questa relazione si deduce che le parti in fase e in quadratura sono rispettivamente $2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\Omega_0 t)$ e $2\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\cos(\Omega_0 t)$. L'inviluppo complesso è quindi:

$$\tilde{s}(t)=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}\cos(\Omega_0 t)$$

Esercizio N. 2 *(per gli studenti della laurea quinquennale)*

Un sistema LTI tempo discreto ha risposta impulsiva $\left(\frac{1}{k}\right)^{n-1}u[n-1]$, con $k>1$. Si sa che il sistema risponde al segnale 2^n con il segnale $\frac{4}{7}2^n$. Determinare il valore di k.

Soluzione

La funzione di trasferimento del sistema è: $\frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{k}z^{-1}}$, con ROC $|z|>\frac{1}{|k|}$. Poiché 2^n è un'autofunzione per i sistemi LTI, la risposta dl sistema a tale segnale è:

$$y[n] = H(z)\big|_{z=2} 2^n = \frac{4}{7} 2^n$$

La funzione $\dfrac{z^{-1}}{1-\frac{1}{k}z^{-1}}$ è pari a $\dfrac{4}{7}$ per $k = 4$.

Esercizio N. 1*(per gli studenti della laurea triennale)*

Le squadre di baseball di Boston e di New York giocano la finale al meglio di 5 partite. La serie di incontri termina non appena una squadra raggiunge le 3 vittorie (nelle finali di baseball non è previsto il pareggio). In ogni partita ciascuna squadra ha la medesima probabilità di vincere, indipendentemente dal risultato conseguito nelle partite precedenti.

Scrivere la densità di probabilità $p_N(x)$ della variabile aleatoria *N,* numero totale di partite giocate.

Soluzione

La variabile aleatoria in questione è una variabile aleatoria discreta, che può assumere solamente i valori *3, 4, 5*. La densità di probabilità sarà costituita da tre impulsi centrati in tali valori, di area pari alla loro probabilità.

La finale si chiude in sole tre partite se una delle due squadre vince i tre primi incontri. Tale evento ha, per ogni squadra, probabilità pari a $\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$ e pertanto il valore *3* ha probabilità $1/4$.

Per arrivare a 4 incontri, nei primi tre ci devono essere state, da parte di una o dell'altra squadra, 2 vittorie e una sconfitta. Tale evento ha probabilità $2 \times \binom{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{4}$. Poi, nella quarta partita, deve vincere la squadra che ha totalizzato due vittorie nei primi tre incontri. Pertanto $P_N[4] = \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{8}$.

Si arriva a 5 partite se nelle prime 4 ci sono state per ognuna delle due squadre 2 vittorie e 2 sconfitte. Tale evento ha probabilità pari a $\binom{4}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{3}{8}$. Questa è anche la probabilità $P_N[5]$.

Quest'ultimo valore poteva anche essere dedotto come $1 - P_N[3] - P_N[4]$.

In definitiva $p_N(x) = \frac{1}{4}\delta(x-3) + \frac{3}{8}\delta(x-4) + \frac{3}{8}\delta(x-5)$

Esercizio N. 2 *(per gli studenti della laurea triennale)*

Una stazione radio regala due biglietti per un concerto alla sesta persona che telefona e conosce la data di nascita del conduttore della trasmissione. Per ogni persona che telefona la probabilità di conoscere tale data è pari a 0.75, indipendentemente dalle risposte udite fino a quel momento. Qual è la probabilità che il vincitore sia il decimo chiamante?

Soluzione

Affinché il vincitore sia il decimo chiamante, nelle prima 9 telefonate ci devono essere esattamente 5 risposte corrette. Tale evento può verificarsi in $\binom{9}{5}$ modi distinti, ognuno avente probabilità $(0.75)^5(0.25)^4 = \frac{243}{262144}$. Pertanto l'evento ha probabilità $\binom{9}{5} \times \frac{243}{262144} = \frac{15309}{131072}$. Tale valore va ancora moltiplicato per 0.75, cioè per la probabilità che il decimo chiamante conosca la data di nascita del conduttore. il risultato finale è dunque: *0.0875988*.

Esercizio N. 3 *(per tutti)*

Un processo aleatorio stazionario ha la funzione di autocorrelazione indicata in figura 1. Dire quanto valgono il suo valor medio e la sua varianza.

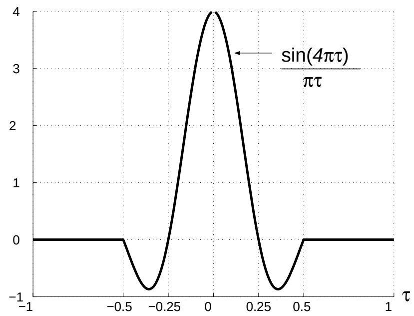


Fig. 1

Soluzione

Se la funzione di autocorrelazione viene integrata da $-\infty$ a $+\infty$ si ottiene un'area finita: ciò significa che il suo valor medio è nullo. In questa situazione la varianza coincide con il valore quadratico medio, che è dato da $R_x(0)$. Pertanto la varianza è pari a 4.

Esercizio N. 4 *(per tutti)*

Si consideri il seguente processo aleatorio, collegato all'esperimento del lancio di una moneta: all'uscita testa è associata la funzione $\cos(2\pi f_1 t)$, all'uscita croce la funzione $\cos(2\pi f_2 t)$ con $f_1 \neq f_2$. Dire, giustificando al risposta, se il processo aleatorio è stazionario, almeno in senso lato, e calcolare la sua densità spettrale di potenza. Cosa rappresenta l'antitrasformata di Fourier di quest'ultima funzione?

Soluzione

Se sul processo aleatorio si esegue l'operazione di valor medio, essa fornisce il seguente risultato:

$$E[x(t)] = \frac{1}{2}\cos(2\pi f_1 t) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f_2 t)$$

che non è indipendente dall'istante t: pertanto il processo non è stazionario.

La sua trasformata di Fourier sarà ovviamente data da una coppia di impulsi ideali centrati alle frequenze $\pm f_1$ e da una seconda coppia di impulsi ideali centrati alle frequenze $\pm f_2$. L'area di questi impulsi deve essere tale da dar luogo, per integrazione, all'intera potenza media del processo, che è pari a $\frac{1}{2}$ W. Di conseguenza l'area di ciascuno di essi è pari a $\frac{1}{8}$. Dunque:

$$S_x(f) = \frac{1}{8}\left[\delta(f + f_2) + \delta(f + f_1) + \delta(f - f_1) + \delta(f - f_2)\right]$$

L'antitrasformata di Fourier di questa funzione è, per il teorema di Wiener-Kintchine, la media in t della funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$.

Esercizio N. 5 *(per tutti)*

Si immagini di osservare un processo aleatorio stazionario presente all'uscita di un derivatore ideale. La densità spettrale di potenza di questo processo è:

$$S_y(f) = \begin{cases} \frac{1}{2} f^2 & per\ |f| \leq f_0 \\ 0 & per\ |f| > f_0 \end{cases}$$

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo all'ingresso del derivatore.

Soluzione

Siccome il derivatore ideale ha risposta in frequenza pari a $j2\pi f$, il processo di ingresso (che sarà stazionario, come lo è quello di uscita) avrà una densità spettrale di potenza pari a:

$$S_x(f) = \frac{S_y(f)}{|H(f)|^2} = \begin{cases} \frac{1}{8\pi^2} & per\,|f| \le f_0 \\ 0 & per\,|f| > f_0 \end{cases}$$

La funzione di autocorrelazione è data dall'antitrasformata di Fourier di S_x, che è pari a $\frac{f_0}{4\pi^2}\mathrm{sinc}(2f_0\tau)$.

Esercizio N. 6 *(per tutti)*

Un processo aleatorio stazionario ha una densità spettrale di potenza data dalla funzione $S_x(f) = 0.25\delta(f) + \frac{1}{1+f^2}$. Calcolare la sua varianza.

Soluzione

Si calcoli innanzitutto il valore quadratico medio del processo, che è dato da:

$$E\left[x(t)^2\right] = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df = 0.25 + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+f^2}df = \arctan(f)\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0.25 + \pi$$

Da $\sigma_x^2 = E\left[x(t)^2\right] - m_x^2$, si ricava che $\sigma_x^2 = 0.25 + \pi - 0.25 \cong \pi$