Teoria dei Segnali

(Appello del 26 giugno 2003)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo invariante ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \sin(2\pi f_0 t)\left[u(t) - u\left(t - \frac{1000}{f_0}\right)\right]$$

All'istante $t = 0$ al suo ingresso viene applicato un impulso rettangolare di ampiezza unitaria e di durata $T = \dfrac{1000}{f_0}$. Ricavare la risposta del sistema a tale ingresso.

Soluzione

La risposta può essere determinata tramite l'integrale di convoluzione:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t \sin(2\pi f_0 \tau)d\tau = \frac{1}{2\pi f_0}(1 - \cos(2\pi f_0 t)) & 0 \le t \le T \\ \displaystyle\int_{t-T}^{T} \sin(2\pi f_0 \tau)d\tau = \frac{1}{2\pi f_0}[\cos(2\pi f_0 (t - T)) - \cos(2\pi f_0 T)] & T \le t \le 2T \\ 0 & t > 2T \end{cases}$$

Esercizio N. 2

La risposta in frequenza di un sistema LTI tempo discreto è data da $1 + j\Omega$, $|\Omega| < \pi$. Qual è la sua risposta impulsiva?

Soluzione

La risposta impulsiva risulta:

$$h[n] = \delta[n] + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} j\Omega\, e^{j\Omega n} d\Omega$$

$$= \delta[n] - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} \Omega \sin(\Omega n) d\Omega = \delta[n] + \frac{\Omega}{2\pi}\frac{\cos(\Omega n)}{n}\bigg|_{-\pi}^{+\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{\cos(\Omega n)}{n}d\Omega$$

$$= \delta[n] + \frac{\cos(\pi n)}{n} - \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\Omega n)}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{+\pi} = \delta[n] + \frac{\cos(\pi n)}{n}$$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta in frequenza:

$$H(\omega) = 1 + j\omega$$

Calcolare la sua risposta al segnale di ingresso rappresentato in figura 1

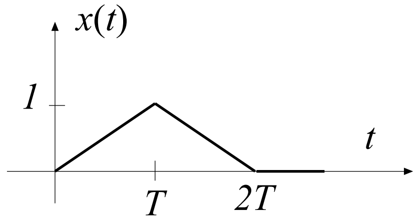
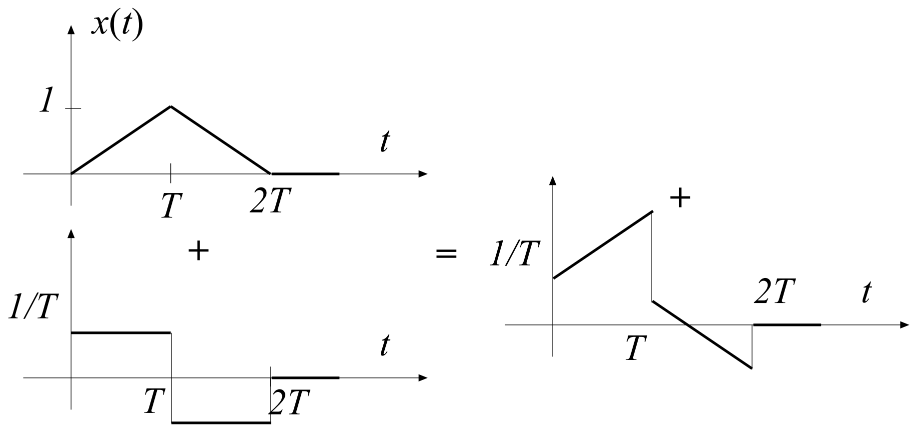


Fig. 1

Soluzione

La risposta ad un qualsiasi segnale $x(t)$ sarà pari a $x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$. Pertanto la risposta avrà l'andamento indicato in figura I



Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea triennale))*

Due variabili aleatorie X e Y hanno la seguente densità di probabilità congiunta:

$$f_{XY}(x,y) = \frac{1}{4}\{\delta(x+1)[\delta(y)+\delta(y-1)] + \delta(x-1)[\delta(y)+\delta(y+1)]\}$$

- Quali sono i valori assunti dalla variabile X?
- Quali sono quelli assunti dalla variabile Y?
- Ricavare le densità di probabilità di X e quella di Y.

- Le due variabili sono indipendenti?
- Sono incorrelate?

Soluzione

Dalla forma della funzione $f_{XY}(x,y)$ si deduce che sia X sia Y sono variabili aleatorie discrete. I valori assunti da X sono -1 e $+1$, mentre quelli assunti da Y sono $-1, 0$ e $+1$.

Le densità di probabilità di X e Y si ricavano attraverso i seguenti integrali:

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dy = \frac{1}{2}[\delta(x+1) + \delta(x-1)]$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dx = \frac{1}{2}\delta(y) + \frac{1}{4}[\delta(y+1) + \delta(y-1)]$$

Poiché $f_{XY}(x,y) \neq f_X f_Y$, le due variabili non sono indipendenti.

Inoltre si ha:

$$E[XY] = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} xy f_{XY}(x,y)dxdy = -\frac{1}{2}$$

$$E[X] = 0, \quad E[Y] = 0$$

$$E[XY] \neq E[X]E[Y]$$

e quindi le due variabili non sono incorrelate.

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^{-4}}{1 - z^{-2}}$$

Si ricavi la risposta impulsiva del sistema, sapendo che esso è causale.

Soluzione

A meno del fattore z^{-4} , si ha:

$$H_1(z) = \frac{1}{1 - z^{-2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1 - z^{-1}} + \frac{1}{1 + z^{-1}}\right) \Rightarrow h_1[n] = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)u[n]$$

Il fattore z^{-4} corrisponde ad una traslazione di 4 unità, per cui:

$$h[n] = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^{n-4}\right)u[n-4] = \frac{1}{2}\left(1 + (-1)^n\right)u[n-4]$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha la seguente densità di probabilità:

$$p_1(x(t)) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \le 1 \\ 0 & |x| > 1 \end{cases}$$

La sua densità spettrale di potenza unilatera è costante su una banda B, ove vale $\frac{1}{12}$ [mW/Hz]. Qual è la larghezza di banda del processo aleatorio?

Soluzione

Si calcoli ilvalore quadratico medio (cioè la potenza) del processo:

$$E\left[x^2(t)\right] = \int_{-1}^{+1} x^2(1-|x|)dx = 2\int_0^1 \left(x^2 - x^3\right)dx = \frac{1}{6} \text{ [W]}$$

Poiché sulla banda B la densità spettrale è costante, dovrà essere:

$$B \times \frac{1}{12} 10^{-3} = \frac{1}{6} \Rightarrow B = 2KHz$$

Esercizio N. 6

Si consideri il seguente processo aleatorio, associato all'esperimento: lancio di una moneta. Se esce testa, la realizzazione del processo è $x(t) = \cos(\omega_0 t)$, altrimenti è $x(t) = \sin(\omega_0 t)$.

Calcolare la funzione di autocorrelazione. Dire se il processo è stazionario e se è regolare (almeno in senso debole).

Soluzione

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) + \frac{1}{2}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))$$

$$= \frac{1}{2}\cos(\omega_0 \tau)$$

Il processo non è stazionario, poiché il suo valor medio dipende dalla variabile *t*. Infatti:

$$E[x(t)] = \frac{1}{2}\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2}\sin(\omega_0 t)$$

Per quanto riguarda la regolarità, risulta:

$$\langle\cos(\omega_0 t)\rangle = \langle\sin(\omega_0 t)\rangle = 0$$

$$\langle\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau))\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau))dt = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

$$\left\langle \sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))dt = \frac{1}{2}\cos(\omega_0\tau)$$

Pertanto il processo aleatori è regolare