Teoria dei Segnali
(Appello del 22 luglio 2003)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t)=\frac{1}{t}\{u(t-1)-u(t-2)\}$$

Valutare la risposta del sistema al segnale $x(t)=u(t)$.

Soluzione

La risposta del sistema al gradino è calcolabile tramite l'integrale di convoluzione, che in questo caso è:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau=\begin{cases}0 & t<1\\ \ln(t) & 1\le t<2\\ \ln(2) & t\ge 2\end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta in frequenza:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{-j\Omega}}{2+e^{-j\Omega}}$$

Determinare la sua risposta al gradino unitario.

Soluzione

Si calcoli innanzitutto la risposta impulsiva del sistema. Ponendo $H\left(e^{j\Omega}\right)$ nella seguente forma:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{-j\Omega}}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

si vede che la risposta impulsiva è:

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n-1]$$

Per calcolare la risposta al gradino unitario si usi la somma di convoluzione $y[n]=u[n]\otimes h[n]$:

$$y[n] = -\sum_{k=-\infty}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k u[k-1] = \begin{cases} 0 & n \le 0 \\ -\sum_{k=1}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k & n > 0 \end{cases}$$

$$y[n] = \begin{cases} 0 & n \le 0 \\ -\left(\sum_{k=0}^{n} \left(-\frac{1}{2}\right)^k - 1\right) = \frac{2}{3}\left[\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right] & n > 0 \end{cases}$$

Esercizio N. 3

Un segnale tempo discreto $x[n]$ ha lo spettro riportato in figura 1a. Qual è (in funzione di $x[n]$) il segnale che ha lo spettro di figura 1b?

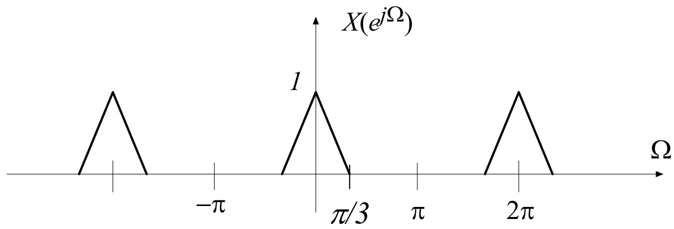


Fig. 1a

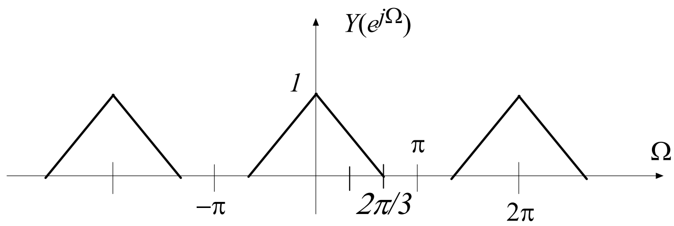


Fig. 1b

Soluzione

Posto $\alpha = 2\Omega$, risulta:

$$y[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-2\pi/3}^{+2\pi/3} Y\left(e^{j\Omega}\right) e^{j\Omega n} d\Omega = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/3}^{+\pi/3} Y\left(e^{j2\alpha}\right) e^{j2\alpha n} d\alpha = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi/3}^{+\pi/3} X\left(e^{j\alpha}\right) e^{j2\alpha n} d\alpha = 2x[2n]$$

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea triennale)*

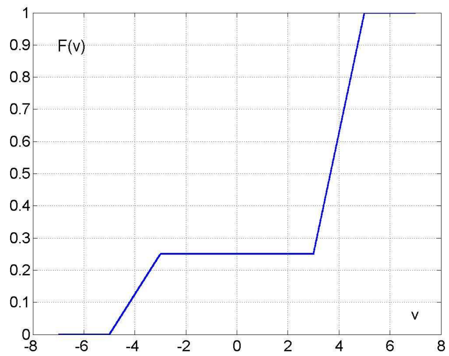
La variabile aleatoria ***V*** ha la seguente funzione di distribuzione:

$$F_V(v) = \begin{cases} 0 & v < -5 \\ (v+5)/8 & -5 \le v < -3 \\ 1/4 & -3 \le v < 3 \\ 1/4 + 3(v-3)/8 & 3 \le v < 5 \\ 1 & v \ge 5 \end{cases}$$

a) calcolare $E[V]$
b) calcolare $Var[V]$

Soluzione

La funzione di distribuzione presenta il seguente andamento. La variabile V risulta uniformemente distribuita nell'intervallo $-5 \le v < -3$, ove ha densità di probabilità $1/8$, e nell'intervallo $3 \le v < 5$, ove ha densità di probabilità $3/8$.



Pertanto:

$$E[V] = \frac{1}{8}\int_{-5}^{-3} v\,dv + \frac{3}{8}\int_{3}^{5} v\,dv = 2$$

$$Var[V] = \frac{1}{8}\int_{-5}^{-3} \left(v^2 - 2\right)dv + \frac{3}{8}\int_{3}^{5} \left(v^2 - 2\right)dv = \frac{43}{3}$$

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

La trasformata Z di un segnale tempo discreto destro ha il diagramma zeri – poli rappresentato in figura 2:

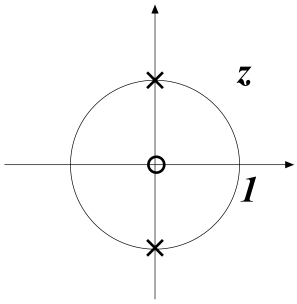


Fig. 2

Si determini il corrispondente segnale $x[n]$, sapendo che il suo valore massimo è pari a 2

Soluzione

La funzione di trasferimento del sistema sarà del tipo:

$$H(z)=\frac{Kz}{z^2+1}=\frac{K}{2}\left(\frac{1}{z+j}+\frac{1}{z-j}\right)=\frac{K}{2z}\left(\frac{1}{1+jz^{-1}}+\frac{1}{1-jz^{-1}}\right)$$

I due termini entro parentesi sono le trasformate Z rispettivamente di $(-j)^n u[n]$ e $(j)^n u[n]$. Scrivendo questi due segnali in forma esponenziale e sommandoli si ottiene:

$$(-j)^n u[n]+(j)^n u[n]=\left(e^{-j\frac{\pi}{2}n}+e^{j\frac{\pi}{2}n}\right)u[n]=2\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)u[n]$$

Tenendo infine conto del fattore $\frac{K}{2z}$ e della condizione sul valore massimo della risposta impulsiva, si ottiene:

$$h[n]=2\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)u[n]$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ con funzione di autocorrelazione

$$R_x(\tau)=\begin{cases}1-|\tau| & per\ |\tau|\le 1\\ 0 & per\ |\tau|>1\end{cases}$$

viene campionato con frequenza di campionamento $f_c = 2\,Hz$. Così facendo ogni realizzazione del processo diventa una successione di variabili aleatorie y_k, con $y_k = x\left(\frac{k}{f_c}\right)$. Calcolare il valor medio del prodotto $y_i y_j$.

Soluzione

Poiché $E[y_i y_j] = E[x(iT_c)x(jT_c)] = R_x((i-j)T_c)$, si ha:

$$E[y_i y_j] = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0.5 & |i-j| = 1 \\ 0 & |i-j| > 1 \end{cases}$$

Esercizio N. 6

Un rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza bilatera pari a $\eta/2$ è applicato a un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t) = \cos(20\pi t)\{u(t) - u(t-10)\}$. Calcolare la potenza media del processo aleatorio all'uscita di questo sistema.

Soluzione

Detto $y(t)$ il processo all'uscita del sistema, la sua potenza media corrisponderà a $R_y(0)$, essendo $R_y(\tau)$ la sua funzione di autocorrelazione. Poiché

$$R_y(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = \frac{\eta}{2} h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

si avrà:

$$P = R_y(0) = \frac{\eta}{2}\int_0^{10} \cos^2(20\pi\tau)d\tau = \frac{\eta}{2}\left(\frac{40\pi t + \sin(40\pi t)}{80\pi}\right)\Bigg|_0^{10} = \frac{5\eta}{2}$$