Teoria dei Segnali

(16 dicembre 2002)

II Provetta (laurea quinquennale)

Esercizio N. 1

Si consideri il processo aleatorio $x(t) = a\,\mathrm{sgn}(t)$, essendo a una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra -1 e $+1$.

a) Si disegni con cura la funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$ in funzione di τ, per $t = +1$ e $t = -1$.

b) Si disegni con cura la funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$ in funzione di t, per un generico valore di τ.

c) Quanto vale il valor medio, rispetto a t, di $R_x(t, t+\tau)$?

Soluzione

In figura I è rappresentata una tipica realizzazione di questo processo.

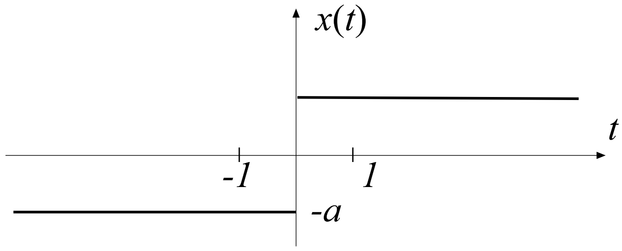


Fig. I

Se è $t = 1$, la funzione di autocorrelazione vale $E[a^2]$, cioè $1/3$, se è $-1 < \tau$, mentre vale $-1/3$ per $-1 > \tau$. Nel caso sia $t = -1$ essa varrà $1/3$ per $\tau > 1$ e $-1/3$ per $\tau < 1$. Questi andamenti sono riportati nella figura II.

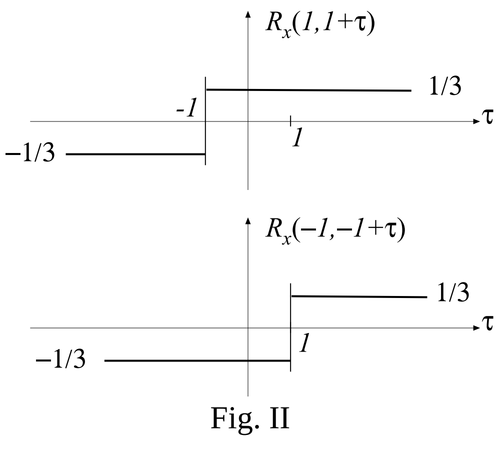


Fig. II

Per ogni valore di τ finito la funzione di autocorrelazione, in funzione di *t*, si presenta come in figura III, che è relativa a un valore di τ positivo.

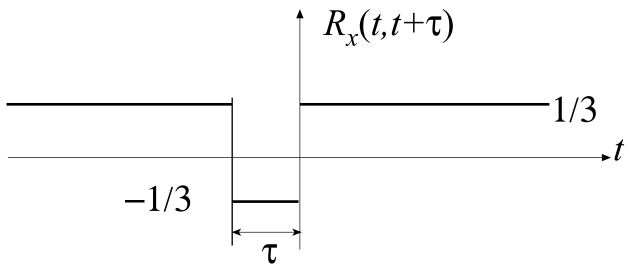


Fig. III

Essa pertanto può essere espressa nella forma seguente:

$$R_x(t,t+\tau)=\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\operatorname{rect}\left(\frac{t}{\tau}+\frac{1}{2}\right)$$

Il valor medio in *t* è pertanto pari a *1/3*.

<u>Esercizio N. 2</u>

Si consideri il processo aleatorio $x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t$, ove $x(t)$ e $y(t)$ sono due processi aleatori a valor medio nullo e tra loro incorrelati. Dire, giustificando la risposta, se il processo è non stazionario, stazionario o ciclostazionario.

Soluzione

Esame del valor medio:

$$E[x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t] = E[x(t)]\cos\omega_0 t - E[y(t)]\sin\omega_0 t = 0$$

Esame della funzione di autocorrelazione:

$$\begin{aligned}R(t,t+\tau) &= E[(x(t)\cos\omega_0 t - y(t)\sin\omega_0 t)(x(t+\tau)\cos\omega_0(t+\tau) - y((t+\tau))\sin\omega_0(t+\tau))]\\ &= E[x(t)x(t+\tau)]\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) - E[x(t)y(t+\tau)]\cos\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau) -\\ &- E[y(t)x(t+\tau)]\sin\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + E[y(t)y(t+\tau)]\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)\end{aligned}$$

Tenendo conto della stazionarietà di $x(t)$ e $y(t)$, della loro incorrelazione e del fatto che si tratta di due processi a valor medio nullo, si ricava che:

$$R(t,t+\tau) = R_x(\tau)\cos\omega_0 t\cos\omega_0(t+\tau) + R_y(\tau)\sin\omega_0 t\sin\omega_0(t+\tau)$$

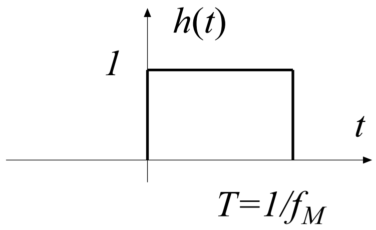
Il processo è quindi ciclostazionario. Si noti che se i due processi $x(t)$ e $y(t)$ avessero la medesima funzione di autocorrelazione, il processo sarebbe stazionario.

Esercizio N. 3

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario è:

$$R_x(\tau)=2f_M\,\mathrm{sinc}(2f_M\,\tau)$$

Esso viene applicato all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva rappresentata in figura 1.



Calcolare la densità spettrale di potenza del processo all'uscita del sistema.

Soluzione

Trasformando $R_x(\tau)$ secondo Fourier, si ottiene la densità spettrale di potenza $S_x(f)$, che risulta essere pari a $\mathrm{rect}\left(\frac{f}{f_M}\right)$. La risposta in frequenza che corrisponde a $h(t)$ ha modulo (serve soltanto il modulo!) pari a $\frac{1}{f_M}\mathrm{sinc}\left(\frac{f}{f_M}\right)$.

Poiché $S_y(f)=|H(f)|^2 S_x(f)$, risulta:

$$S_y(f)=\begin{cases}\frac{1}{f_M^2}\mathrm{sinc}^2\left(\frac{f}{f_M}\right) & |f|<f_M\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Esercizio N. 4

Con riferimento alla figura 2, si calcoli la temperatura di rumore del sistema A allorquando la resistenza del generatore R_g è pari ad R. (att.ne: $T_1 \neq T_2$)

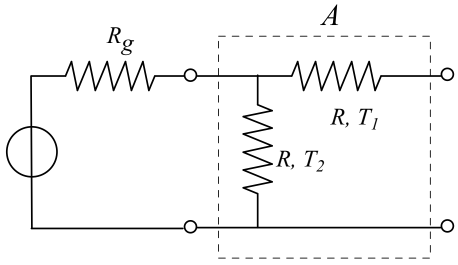


Fig. 2

Soluzione

La temperatura di rumore del sistema non dipende dalla temperatura cui si trova R_g. Conviene attribuire a quest'ultima una temperatura pari a T_2. In questo caso la resistenza equivalente R_{eq} vista dai morsetti di uscita è data dalla serie di due resistenze di valore R e $R/2$, poste a temperatura rispettivamente T_1 e T_2 (vedi fig. IV).

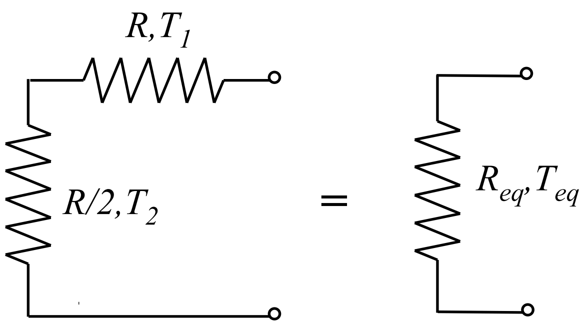


Fig. IV

Risulta $R_{eq} = \frac{3}{2}R$ e $T_{eq} = \frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{3}T_2$. Il guadagno di potenza disponibile del sistema è ricavabile dalla seguente serie di operazioni:

1) $P_{du} = \dfrac{V_{eq}^2}{4R_{eq}} = \dfrac{(V_g/2)^2}{6R} = \dfrac{V_g^2}{24R}$

2) $P_{di} = \dfrac{V_g^2}{4R}$

3) $G = \dfrac{P_{du}}{P_{di}} = \dfrac{1}{6}$

In una banda equivalente B la potenza disponibile di rumore all'uscita è pari a $KT_{eq}B = K\left(\frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{3}T_2\right)B$. Essa è calcolabile anche come $K(T_g + T_r)GB$, ove per T_g è stato scelto il valore T_2. Uguagliando le due espressioni della potenza disponibile di rumore all'uscita si ottiene:

$$K\left(\frac{2}{3}T_1 + \frac{1}{3}T_2\right)B = K(T_2 + T_r)\frac{1}{6}B \Rightarrow T_r = 4T_1 + T_2$$

<u>Esercizio N. 5</u>

Qual è il segnale destro $x(t)$ che ha la seguente trasformata Z?

$$X(z) = \frac{z^{-3} + 2z^{-2} + 1}{z - 3}$$

Soluzione

La funzione $X(z)$ può essere posta nella forma:

$$X(z) = \frac{z}{z-3}\left(z^{-4} + 2z^{-3} + z^{-1}\right)$$

Nel primo fattore si riconosce la trasformata della funzione $3^n u[n]$. Pertanto risulta:

$$x[n] = 3^{n-4} u[n-4] + 2 \times 3^{n-3} u[n-3] + 3^{n-1} u[n-1]$$