Teoria dei Segnali

(Appello del 12 gennaio 2004)

laurea quinquennale

Prova scritta

<u>Esercizio N. 1</u>

La risposta di un sistema lineare all'impulso ideale centrato in t_0 è pari a $\sin(\omega_0 t)u(t-t_0)$.

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x(t)=\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

Soluzione

La risposta del sistema è fornita dal seguente integrale:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{rect}\left(\tau-\frac{1}{2}\right)\sin(\omega_0 t)u(t-\tau)d\tau=\sin(\omega_0 t)\int_0^1 u(t-\tau)d\tau$$

Pertanto:

$$y(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \sin(\omega_0 t)\int_0^t d\tau = t\sin(\omega_0 t) & 0\le t\le 1\\ \sin(\omega_0 t)\int_0^1 d\tau=\sin(\omega_0 t) & t>1\end{cases}$$

<u>Esercizio N. 2</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha la risposta impulsiva indicata in figura1.

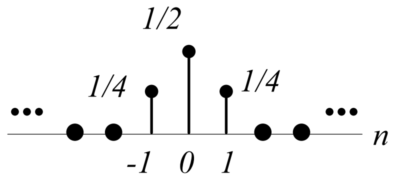

Fig. 1

Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$?

Soluzione

Il segnale di ingresso equivale a due esponenziali complessi: $x[n] = \frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}$. Pertanto la risposta sarà costituita dagli stessi esponenziali complessi, pesati dal valore che la risposta in frequenza del sistema assume rispettivamente in $\Omega = \frac{\pi}{2}$ e $\Omega = -\frac{\pi}{2}$.

La risposta in frequenza dl sistema è data da: $\frac{1}{4}e^{j\Omega} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{-j\Omega} = \frac{1}{2}(1 + \cos\Omega)$, che in $\pm\frac{\pi}{2}$ vale $\frac{1}{2}$. Dunque $y[n] = \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}n} = \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

<u>Esercizio N. 3</u>

Lo spettro delle parti in fase e in quadratura, riferite ad una frequenza ω_0, di un segnale passa banda sono rispettivamente $\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$ e $-\mathrm{rect}\left(\frac{f}{B}\right)$. Disegnare con cura lo spettro (*att.ne: modulo e fase*) del segnale passa banda.

Soluzione

Dalla forma canonica di un segnale passa banda:

$$x(t) = x_c(t)\cos(\omega_0 t) - x_s(t)\sin(\omega_0 t)$$

si deduce che lo spettro $X(f)$ di $x(t)$ è dato da:

$$\frac{1}{2}X_c(f - f_0) + \frac{1}{2}X_c(f + f_0) + j\frac{1}{2}X_s(f - f_0) - j\frac{1}{2}X_s(f + f_0)$$

Limitando le considerazioni alle frequenze positive, risulta (fig.I):

$$|X(f)| = \frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{rect}\left(\frac{f - f_0}{B}\right) \qquad \arg(X(f)) = -\frac{\pi}{4}\mathrm{rect}\left(\frac{f - f_0}{B}\right)$$

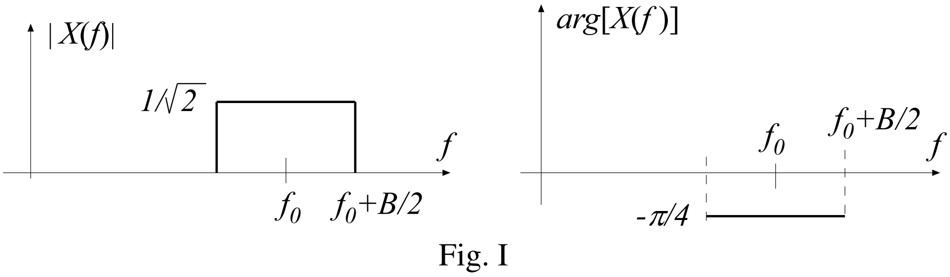

Fig. I

Esercizio N. 4

Un sistema LTI tempo discreto risponde al segnale $x[n]=(3)^n u[n]$ con il segnale $y[n]=\delta[n]-3\delta[n-1]$. Qual è la sua risposta impulsiva?

Soluzione

Eseguendo il rapporto tra le trasformate Z di $y[n]$ e $x[n]$ si ricava:

$$H(z)=\frac{Y(z)}{X(z)}=\frac{1-3z^{-1}}{\frac{1}{1-3z^{-1}}}=\left(1-3z^{-1}\right)^2=1-6z^{-1}+9z^{-2}$$

A questa funzione di sistema corrisponde la risposta impulsiva:

$$h[n]=\delta[n]-6\delta[n-1]+9\delta[n-2]$$

Esercizio N. 5

La funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio stazionario $x(t)$ è data da:

$$R_x(\tau)=e^{-|\tau|}$$

Si calcoli la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio $y(t)=x(t)+\frac{dx(t)}{dt}$.

Soluzione

Il processo aleatorio $\{y(t)\}$ può essere visto come il processo all'uscita di un sistema LTI, al cui ingresso vi sia il processo $\{x(t)\}$, avente risposta in frequenza . $H(f)=1+j2\pi f$. Di conseguenza, la densità spettrale di potenza $S_y(f)$ del processo $\{y(t)\}$ sarà legata a quella del processo $\{x(t)\}$ dalla relazione:

$$S_y(f)=S_x(f)\left[1+4\pi^2 f^2\right]$$

Poiché $S_x(f)$ è la trasformata di Fourier di $R_x(\tau)$, risulta:

$$S_x(f)=\int_{-\infty}^{0} e^{\tau}e^{-j2\pi f\tau}d\tau+\int_{0}^{+\infty} e^{-\tau}e^{-j2\pi f\tau}d\tau=\frac{2}{1+4\pi^2 f^2}$$

$$S_y(f)=2$$

Ne consegue che la funzione di autocorrelazione del processo $\{y(t)\}$ è $R_y(\tau)=2\delta(\tau)$.

Esercizio N. 6

Calcolare la cifra di rumore del sistema indicato in figura 2.

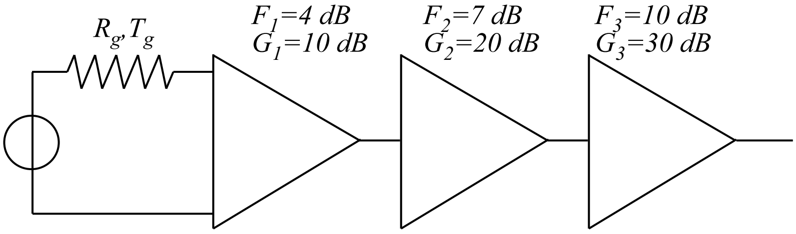

Fig. 2

Posto:

B (banda equivalente del sistema) = 1 MHz

T_g = 200 °K

e ricordando che $K = 1.38 \times 10^{-23}$ Joule/°K, si calcoli la potenza disponibile di rumore all'uscita del sistema.

Soluzione

In base alla regola di composizione delle cifre di rumore di più stadi in cascata si ha:

$$F_{TOT} = F_1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2}$$

Ricordando di convertire i decibel nei corrispondenti rapporti, si ottiene:

$$F_{TOT} = 2.5 + \frac{5 - 1}{10} + \frac{10 - 1}{1000} = 2.909$$

A tale cifra di rumore corrisponde una temperatura di rumore T_e pari a $T_0(F_{TOT} - 1) = 300 \times 1.909 \cong 573$ °K. La potenza disponibile di rumore all'uscita del sistema è data da :

$$K(T_g + T_e)BG_1G_2G_3 = 1.38 \times 10^{-23} \times 773 \times 10^6 \times 10^6$$
$$\cong 10^{-8} \text{ W} = 10^4 \text{ pW}$$