Teoria dei Segnali

(Appello del 16 febbraio 2004)

Laurea triennale

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = t \ \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x(t) = u(t)$.

Soluzione

La risposta può essere calcolata con l’integrale di convoluzione. Risulta:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & per \ \ t < 0 \\ -\int_0^t (\tau - t) d\tau = \frac{t^2}{2} & per \ \ 0 \le t < 1 \\ -\int_{t-1}^t (\tau - t) d\tau = \frac{1}{2} & per \ \ t \ge 1 \end{cases}$$

Esercizio N. 2

In figura 1 è riportato l’andamento del segnale $x(t)$, avente spettro $X(\omega)$. Disegnare con cura il segnale che ha spettro pari a $2X^*\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-j\omega}$.

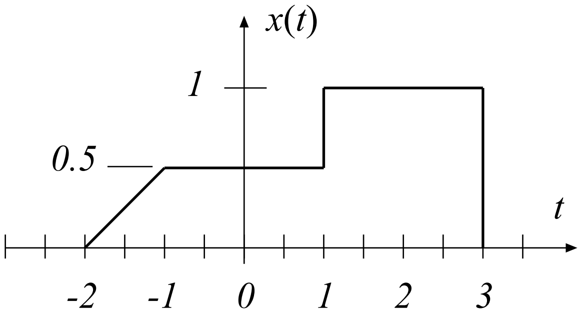


Fig. 1

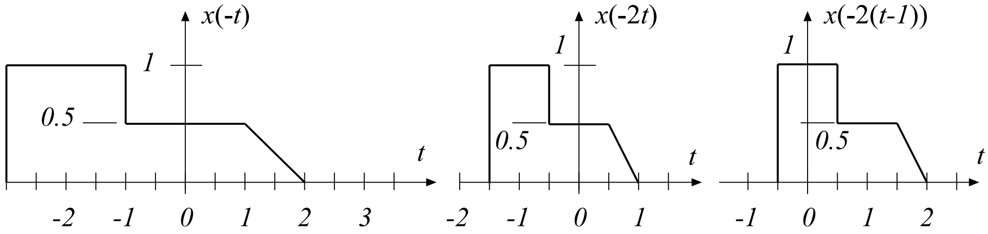
Soluzione

Si ricorda che:

$$X^*(\omega) \Leftrightarrow x(-t)$$

Pertanto $2X^*\left(\frac{\omega}{2}\right) \Leftrightarrow x(-2t)$ e $2X^*\left(\frac{\omega}{2}\right)e^{-\omega} \Leftrightarrow x[-2(t-1)]$.

Per il grafico si veda la seguente figura:



Esercizio N. 3

Un sistema tempo discreto lineare risponde all'impulso unitario $\delta[n-k]$ con il segnale $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^k u[n]$. Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n]=u[n]$?

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante. La risposta è data dalla seguente sommatoria:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n,k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} u[k]\left(\frac{1}{2}\right)^n\left(\frac{1}{3}\right)^k u[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

$$=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Esercizio N. 4

Alle olimpiadi un atleta partecipa al lancio del martello. Con probabilità *0.7* la misura del suo lancio è $D = 60 + X$ metri, dove X è una variabile aleatoria con densità di probabilità:

$$f_X(x)=\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}x}u(x)$$

Con probabilità *0.3* il lancio viene giudicato nullo, è in questo caso $D = 0$.
Calcolare il valor medio della variabile aleatoria D.

Soluzione

La variabile aleatoria D ha la seguente densità di probabilità:

$$p_{\mathbf{D}}(D) = 0.3\delta(D) + 0.7 \times \frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}(D-60)} u(D-60)$$

Il valor medio è quindi:

$$D_m = \int_0^{+\infty} D\left[0.3\delta(D) + 0.7\frac{1}{10} e^{-\frac{1}{10}(D-60)} u(D-60)\right] dD$$

$$= 0.07 \int_{60}^{+\infty} D\left[e^{-\frac{1}{10}(D-60)}\right] dD = 49 \quad m$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio, associato all'esperimento: "lancio di una moneta", è così definito:

$$T \to x(t) = 1$$
$$C \to x(t) = \cos(2\pi t)$$

Determinare la sua densità spettrale di potenza.

Soluzione

Con probabilità $1/2$ il processo è una "continua" di ampiezza unitaria (potenza media $1 \; W$) e con probabilità $1/2$ è una sinusoide di ampiezza unitaria a frequenza $f = 1$ (potenza media $0.5 \; W$). Pertanto la sua densità spettrale di potenza è costituita da un impulso ideale centrato nell'origine e da due impulsi ideale centrati in $f = \pm 1 \; Hz$. Tenendo conto delle potenze medie delle due possibili componenti e della probabilità che esse hanno di manifestarsi, si deduce che:

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f) + \frac{1}{8}\delta(f+1) + \frac{1}{8}\delta(f-1)$$

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio, associato all'esperimento: "lancio di una moneta", è così definito:

$$T \to x(t) = u(t)$$
$$C \to x(t) = -\mathrm{sgn}(t)$$

Disegnare con cura la funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$ in funzione di τ, per $t = 1$ e $t = -1$.

Soluzione

Nella figura seguente sono illustrate le due realizzazioni distinte del processo, aventi ciascuna probabilità $1/2$ di manifestarsi. Le funzioni di autocorrelazione richieste sono facilmente determinabili e avranno il grafico indicato nella stessa figura.