Teoria dei Segnali

(Appello del 16 febbraio 2004)
Laurea quinquennale

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = t \ \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x(t) = \sin(2\pi t)u(t)$.

Soluzione

La risposta può essere calcolata con l'integrale di convoluzione. Risulta:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & per \ \ t < 0 \\ -\int_0^t (\tau - t)\sin(2\pi\tau)d\tau = \frac{t}{2\pi} - \frac{\sin(2\pi t)}{4\pi^2} & per \ \ 0 \le t < 1 \\ -\int_{t-1}^t (\tau - t)\sin(2\pi\tau)d\tau = \frac{\cos[2\pi(t-1)]}{2\pi} & per \ \ t \ge 1 \end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema tempo discreto LTI ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = u[n] - u[n-5]$$

Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$?

Soluzione

Il segnale $x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n$ è del tipo z^n, con $z = \frac{1}{2}$. Esso è quindi un'autofunzione, cui corrisponde la risposta $y[n] = H\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$, essendo $H(z)$ la trasformata Z di $h[n]$. Risulta:

$$H(z)\Big|_{z=\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{k} = \frac{31}{16}$$

ed in conclusione $y[n]=\frac{31}{16}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto causale è retto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n]-y[n-2]=x[n-2]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è stabile. Determinare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

Dall'equazione alle differenze e tenendo conto che il sistema è causale, si evince che la funzione di trasferimento è:

$$H(z)=\frac{z^{-2}}{1-z^{-2}} \qquad ROC=|z|>1$$

Poiché la regione di convergenza non contiene la circonferenza di raggio unitario, il sistema non è stabile.

Antitrasformando $H(z)$, si ottiene:

$$H(z)=\frac{z^{-2}}{1-z^{-2}}=\frac{1}{2}\left\{\frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}-\frac{z^{-1}}{1+z^{-1}}\right\}$$

$$h[n]=\frac{1}{2}\left\{1-(-1)^{n-1}\right\}u[n-1]$$

Esercizio N. 4

Un processo aleatorio è così definito:

$x(t)=1$ se il risultato del lancio di una moneta è "testa"

$x(t)=\cos(2\pi t+\phi)$, con ϕ variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π, se il risultato del lancio è "croce".

Dire, giustificando la risposta, se il processo aleatorio è stazionario in senso debole.

Soluzione

a) calcolo del valor medio

$$E[x(t)] = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi t + \phi)\frac{1}{2\pi}d\phi = \frac{1}{2}$$

b) Calcolo della funzione di autocorrelazione

$$R_x(t, t+\tau) = E[x(t)x(t+\tau)] = \frac{1}{2}(1\times 1) + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(2\pi t + \phi)\cos[(2\pi t + \tau) + \phi]\frac{1}{2\pi}d\phi$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos(2\pi\tau)$$

Conclusione: il processo è stazionario in senso debole.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio, associato all'esperimento: "lancio di una moneta", è così definito:

$$T \to x(t) = 1$$
$$C \to x(t) = \cos(t)$$

Calcolare il valor medio della funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$ rispetto alla variabile *t*.

Soluzione

$$R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t)\cos(t+\tau)$$

Calcolo del valor medio rispetto a *t*:

$$\langle R_x(t, t+\tau)\rangle = \lim_{T\to\infty}\int_{-T/2}^{+T/2}\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(t)\cos(t+\tau)\right]dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}\cos(\tau)$$

Esercizio N. 6

Si consideri il sistema rappresentato in figura 1.

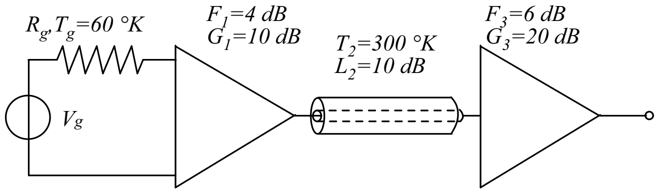

Fig. 1

Quanto vale la potenza di rumore disponibile all'uscita del sistema, misurata su una banda equivalente di 100 MHz? (Ricordare: $K = 1.38 \times 10^{-23} \, J / {}^\circ K$).

Soluzione

Complessivamente il sistema ha un guadagno di potenza disponibile $G_{dB} = G_1 - L_2 + G_3 = 20 \; dB \quad (G = 100)$. La potenza di rumore disponibile in uscita è pari a $K(T_g + T_{eq})B_{eq}G$, ove T_{eq} corrisponde alla temperatura equivalente di rumore del sistema. Detta F la cifra di rumore del sistema, si ha:

$$T_{eq} = T_0(F - 1) = T_0\left(F_1 - 1 + \frac{F_2 - 1}{G_1} + \frac{F_3 - 1}{G_1 G_2}\right)$$

con:

$$F_1 = 2.5$$
$$F_2 = L_2 = 10$$
$$F_3 = 4$$
$$G_1 = 10$$
$$G_2 = \frac{1}{L_2} = 0.1$$

Quindi $T_{eq} = 300 \times \left(1.5 + \frac{9}{10} + 3\right) = 1620 \; {}^\circ K$, cui corrisponde (su una banda di *100* MHz) una potenza di $2.3184 \times 10^{-10} \;\; W$