Teoria dei Segnali

(Appello del 15 giugno 2004)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Calcolare i coefficienti c_0 e c_1 dello sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico di figura 1. Assumere $\tau = T/3$.

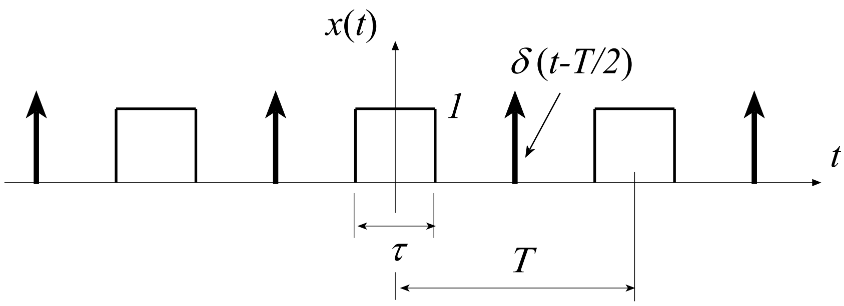


Fig. 1

Soluzione

Il segnale $x(t)$ può essere posto nella forma: $x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT)$, ove $f(t)=rect\left(\frac{t}{\tau}\right)+\delta(t-T/2)$. Il generico coefficiente c_n dello sviluppo in serie di Fourier di $x(t)$ è dato da:

$$c_n = \frac{1}{T}F(\omega)\Big|_{\omega=n\frac{2\pi}{T}},$$

essendo $F(\omega)$ la trasformata di Fourier di $f(t)$. Poiché $F(\omega)=\tau\frac{\sin\left(\omega\frac{\tau}{2}\right)}{\omega\frac{\tau}{2}}+e^{-j\omega\frac{T}{2}}$,

risulta:

$$c_0 = \frac{1}{3}+\frac{1}{T} \qquad c_1 = \frac{1}{3}\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{\frac{\pi}{3}}+\frac{1}{T}e^{-j\pi} = \frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{T}$$

Esercizio N. 2

La risposta impulsiva di un sistema LTI tempo discreto è pari a $u[n]-u[n-4]$. Al suo ingresso è presente il segnale $x[n]=\delta[n]-\delta[n-1]$. Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale di uscita.

Soluzione

Il segnale di uscita è dato da $\delta[n]-\delta[n-4]$. La sua trasformata di Fourier è quindi pari a $1-e^{-j4\Omega}$.

Esercizio N. 3

Si calcoli l'inviluppo complesso e l'inviluppo naturale del segnale:

$$x(t)=A\{\cos[\omega_0 t+m(t)]+\sin[\omega_0 t-m(t)]\}$$

essendo $m(t)$ un segnale a bassa frequenza e a banda limitata.

Soluzione

Si ponga $x(t)$ nella forma canonica, in modo da evidenziare le sue parti in fase e in quadratura:

$$x(t)=A\{\cos(\omega_0 t)\cos[m(t)]-\sin(\omega_0 t)\sin[m(t)]+\sin(\omega_0 t)\cos[m(t)]-\cos(\omega_0 t)\sin[m(t)]\}$$

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t)\{\cos[m(t)]-\sin[m(t)]\}-A\sin(\omega_0 t)\{\sin[m(t)]-\cos[m(t)]\}$$

Per quanto riguarda l'inviluppo complesso, risulta:

$$\tilde{x}(t)=A\{\cos[m(t)]-\sin[m(t)]\}+j\{\sin[m(t)]-\cos[m(t)]\}=A\left[e^{jm(t)}-je^{-jm(t)}\right]$$

mentre l'inviluppo naturale è pari a $A\sqrt{2}$.

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

La funzione di sistema di un sistema LTI tempo discreto è:

$$H(z)=\frac{1-z^{-1}}{1-\frac{5}{2}z^{-1}+z^{-2}}$$

Ricavare la risposta impulsiva del sistema, sapendo che esso è stabile.

Soluzione

Scomponendo $H(z)$ in frazioni semplici si ottiene:

$$H(z)=\frac{A}{1-2z^{-1}}+\frac{B}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{2}{3}\frac{1}{1-2z^{-1}}+\frac{1}{3}\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

A questa funzione di sistema corrispondono tre risposte impulsive:

$a)\quad \frac{2}{3}2^n u[n]+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$b)\quad -\frac{2}{3}2^n u[-n-1]+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$c)\quad \frac{2}{3}2^n u[n]-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$

Di queste, solo la *b)* risulta appartenere ad un sistema stabile, essendo di modulo sommabile.

<u>Esercizio N. 5</u>

Si consideri il seguente processo aleatorio associato al lancio di una moneta:

$$\begin{array}{lll} T & \rightarrow & x(t)=\sin(t) \\ C & \rightarrow & x(t)=\cos(t) \end{array}$$

Il processo è regolare (almeno in senso debole)? (si giustifichi la risposta).
Si calcoli inoltre il valor medio della funzione di autocorrelazione.

Soluzione

Il valor medio temporale delle due realizzazioni distinte del processo è nullo per entrambe. Per quanto concerne la funzione di autocorrelazione temporale si ha che:

$a)\quad x(t)=\sin(t)$

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\sin(t)\sin(t+\tau)dt=\frac{1}{2}\cos(\tau)$$

$b)\quad x(t)=\cos(t)$

$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\cos(t)\cos(t+\tau)dt=\frac{1}{2}\cos(\tau)$$

Il processo è regolare. Il processo consiste sempre in una sinusoide a frequenza $f=\frac{1}{2\pi}$, la cui potenza media è pari a $\frac{1}{2}$. Pertanto la densità spettrale di potenza del processo è costituita da due impulsi ideali di area $\frac{1}{4}$, centrati in $f=\pm\frac{1}{2\pi}$. Il valor medio in t della funzione di autocorrelazione corrisponde (per il teorema di Wiener-Kintchine) all'antitrasformata di Fourier della densità spettrale di potenza. Pertanto:

$$\overline{R}_x(\tau)=\frac{1}{2}\cos(\tau)$$

<u>Esercizio N. 6</u>

Un processo gaussiano bianco ha una densità spettrale di potenza pari a 1W/Hz. Esso è applicato all'ingresso di un sistema la cui risposta impulsiva è:

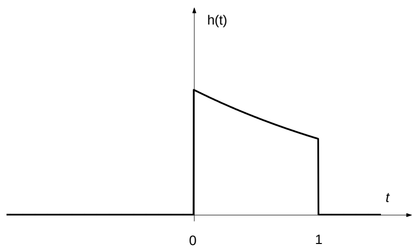
$$h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}\left[u(t)-u(t-1)\right]$$

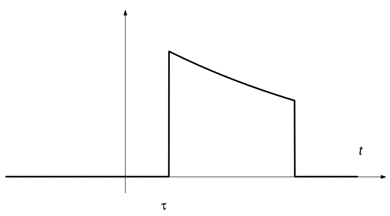
Calcolare la funzione di autocorrelazione e la potenza media del processo di uscita.

Soluzione

Il processo all'ingresso del sistema ha una funzione di autocorrelazione pari a $\delta(\tau)$. La funzione di autocorrelazione del processo d'uscita è data da:

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)=h(\tau)\otimes h(-\tau)$$





Come risulta dalla figura a lato,

$$R_y(\tau)=\begin{cases}\int_{\tau}^{1} e^{-\frac{1}{2}t}e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)}dt & per \quad \tau<1\\ 0 \quad per \quad \tau>1\end{cases}$$

e quindi:

$$R_y(\tau)=\begin{cases}e^{-\frac{1}{2}|\tau|}-e^{-\left(1-\frac{1}{2}|\tau|\right)} & per \quad |\tau|<1\\ 0 \quad per \quad |\tau|>1\end{cases}$$

La potenza media del processo di uscita corrisponde a $R_y(0)$, e quindi è pari a $1-\frac{1}{e}$.