Teoria dei Segnali

(Appello del 23 luglio 2004)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \cos(2\pi f_0 t)u(t)$$

Ricavare la sua risposta al gradino unitario $u(t)$.

Soluzione

La risposta del sistema al gradino unitario risulta essere la convoluzione tra $h(t)$ e $u(t)$. Pertanto:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & per \;\; t \le 0 \\ \int_0^t \cos(2\pi f_0 \tau) d\tau & per \;\; t > 0 \end{cases}$$

In conclusione:

$$y(t) = \frac{\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} u(t)$$

Esercizio N. 2

La trasformata di un segnale $x(t)$ è la funzione $e^{-|f|}$.
Ricavare l'espressione del segnale $\hat{x}(t)$, trasformata di Hilbert di $x(t)$.
(suggerimento: conviene ricavare il segnale analitico associato a $x(t)$*)*

Soluzione

Dato un segnale $x(t)$, il segnale analitico ad esso associato è: $x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t)$. Esso ha uno spettro pari a $2X(f)u(f)$, che nel caso specifico è dato da $X_+(f) = 2e^{-f}u(f)$. Per antitrasformare questa funzione si può risolvere (facilmente!) il corrispondente integrale, oppure ricorrere alla proprietà di dualità della trasformata di Fourier. Basta infatti ricordare che:

$$2e^{-t}u(t) \Leftrightarrow \frac{2}{1 + j2\pi f}$$

e quindi:

$$2e^{-f}u(f)\Leftrightarrow \frac{2}{1-j2\pi t}$$

La trasformata di Hilbert è data dal coefficiente della parte immaginaria di quest'ultima espressione:

$$\hat{x}(t)=\frac{4\pi t}{1+4\pi^2 t^2}$$

Esercizio N. 3

La risposta in frequenza di un sistema LTI tempo discreto è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2+e^{j\Omega}}$$

Ricavare la sua risposta al gradino unitario $u[n]$.

Soluzione

Si ricavi dapprima la risposta impulsiva. Poiché $H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{j\Omega}}$, risulta:

$$h[n]=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n]$$

La risposta al gradino unitario è la somma corrente di $h[n]$, vale a dire:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-k}u[-k]$$

$$=\begin{cases}\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{0}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-k}=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{3} & per\ \ n\geq 0\\ \displaystyle\frac{1}{3}-\sum_{k=n+1}^{0}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-k}=\frac{1}{3}-\sum_{k=0}^{-(n+1)}\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}=\frac{1}{3}\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n}\right] & per\ \ n<0\end{cases}$$

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

La funzione di trasferimento di un sistema LTI tempo discreto, causale, presenta il diagramma zeri-poli riportato in figura 1. Determinare la sua risposta impulsiva, sapendo che $h[1]=1$.

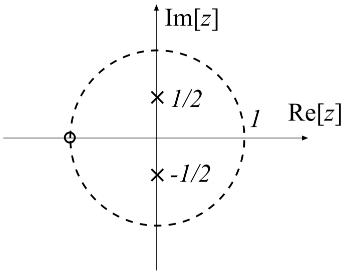

Fig. 1

Soluzione

Dalla figura 1 si vede che un'espressione valida per $H(z)$ è:

$$H(z) = K\frac{z+1}{\left(z - j\frac{1}{2}\right)\left(z + j\frac{1}{2}\right)} = K\frac{z+1}{z^2 + \frac{1}{4}}$$

Poiché il sistema è causale, la divisione lunga dà come primo termine Kz^{-1}. Tale termine è anche uguale a $x[1]z^{-1}$, per cui si ha $K = 1$. La scomposizione in fratti semplici ci permette di scrivere $H(z)$ nella forma:

$$H(z) = \frac{a + jb}{z - j\frac{1}{2}} + \frac{a - jb}{z + j\frac{1}{2}}$$

Si ricava facilmente che:

$$2az - b = z + 1 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{1}{2}, \quad b = -1$$

Ricapitolando:

$$H(z) = \frac{\frac{1}{2} - j}{z - j\frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{2} + j}{z + j\frac{1}{2}} = \frac{Az^{-1}}{1 - j\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{A^* z^{-1}}{1 + j\frac{1}{2}z^{-1}}$$

che ha come antitrasformata la funzione:

$$h[n] = 2\,\mathrm{Re}(A)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}(n-1)\right)$$

<u>Esercizio N. 5</u>

Si consideri il processo aleatorio stazionario

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$$

in cui ω_0 è A sono delle costanti e ϕ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra $-\pi$ e π. Esso è applicato all'ingresso di un dispositivo non lineare, che fornisce all'uscita il processo aleatorio $y(t) = x^2(t)$. Dire, giustificando la risposta, se il processo $y(t)$ è stazionario in senso lato.

Soluzione

La generica realizzazione del processo $y(t)$ è data da: $y(t) = A^2 \cos^2(\omega_0 t + \phi)$. Essa può essere posta nella forma:

$$y(t) = \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{2}A^2 \cos(2\omega_0 t + 2\phi) = \frac{1}{2}A^2(1 + \cos(2\omega_0 t + 2\phi))$$

Si tratta quindi della somma di una costante e di un processo stazionario, che risulta ovviamente stazionaria.

Esercizio N. 6

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2} - k\right)$$

ove le varie a_k sono variabili aleatorie tra loro indipendenti, che assumono in modo equiprobabile i valori -1, 0 e 1.

Si calcoli la funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$, per $\tau = 0.5$.

Soluzione

Quando t varia da 0 a 0.5, la variabile aleatoria $x(t)x(t+\tau)$ può assumere i valori $+1$ (con probabilità $2/3$) e 0 (con probabilità $1/3$). Pertanto in questa situazione $R_x(t, t+0.5) = 2/3$.

Se t varia da 0.5 a 1 (escluso) allora sono 9 le possibili combinazioni dei valori delle due variabili $x(t)$ e $x(t+\tau)$, e precisamente:

$1,1 \quad 1,0 \quad 1,-1 \quad 0,1 \quad 0,0 \quad 0,-1 \quad -1,1 \quad -1,0 \quad -1,1$

Ognuna di esse ha probabilità di manifestarsi pari a $1/9$, per cui il valor medio della variabile aleatoria $x(t)x(t+\tau)$ è nullo. Tutto ciò si ripete in t con periodo $T = 1$. La funzione di autocorrelazione si presenta quindi come in figura I.

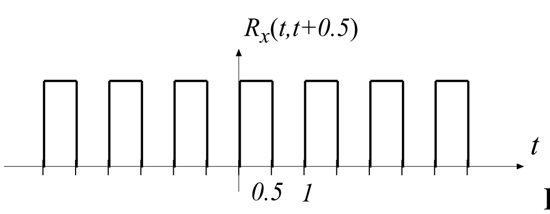

Fig. I