PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

10 novembre 2004

Esercizio N. 1

Si consideri il segnale riportato in figura 1.

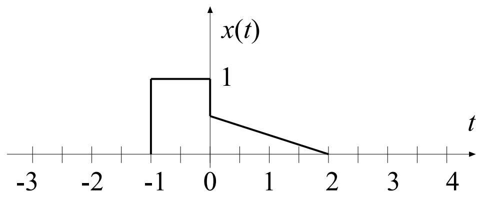
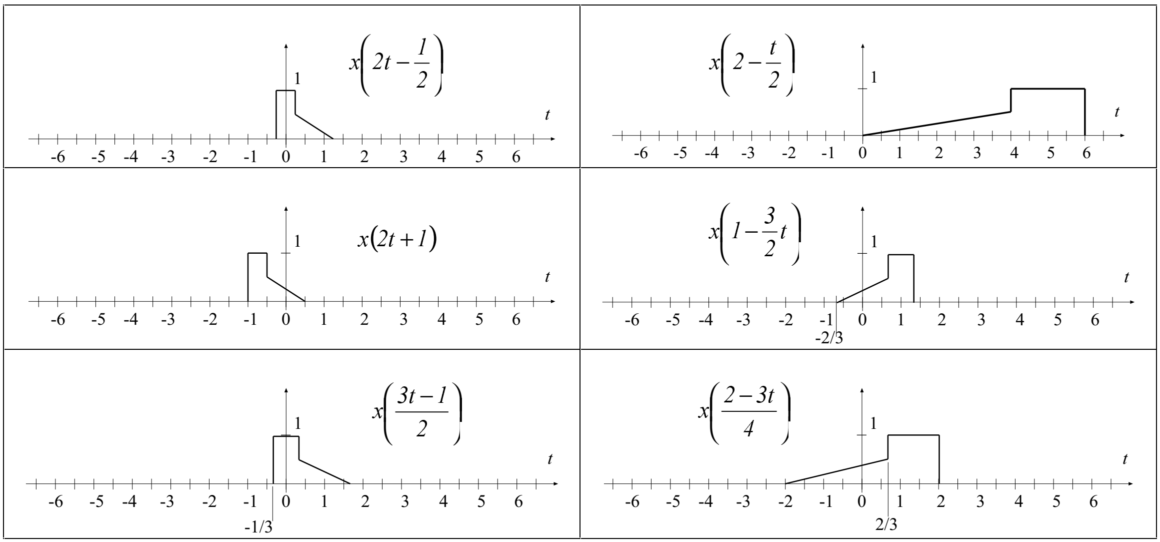


Fig.1

Si disegni il grafico dei segnali:

$$x\left(2t-\frac{1}{2}\right),\ x\left(2-\frac{t}{2}\right),\ x(2t+1),\ x\left(1-\frac{3}{2}t\right),\ x\left(\frac{3t-1}{2}\right),\ x\left(\frac{2-3t}{4}\right)$$

Soluzione



Esercizio N. 2

Si considerino i sistemi LTI tempo continuo aventi le risposte impulsive:

1) $h(t)=u(t-1)$, 2) $h(t)=u(1-t)$, 3) $h(t)=u(t)-u(t-2)$,
4) $h(t)=u(-t)-u(-t-1)$ 5) $h(t)=u(t+1)$, 6) $h(t)=u(t+2)$

Dire, giustificando la risposta, se essi sono stabili e se sono causali.

Calcolare la loro risposta al segnale disegnato in figura 2

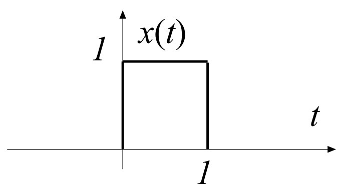


Fig. 2

Soluzione

1) $h(t)=u(t-1)$

Il sistema è causale ($h(t)=0$ per $t<0$), ma non è stabile ($\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=\infty$).

$$y(t)=\begin{cases} 0 & per\ \ t<1 \\ \int_{1}^{t} dt = t-1 & per\ \ 1\le t<2 \\ \int_{t-1}^{t} dt = 1 & per\ \ t\ge 2 \end{cases}$$

2) $h(t)=u(1-t)$

Il sistema non è causale ($h(t)\neq 0$ per $t<0$) e non è stabile ($\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt=\infty$).

$$y(t)=\begin{cases} \int_{t-1}^{t} dt = 1 & per\ \ t<1 \\ \int_{t-1}^{1} dt = 2-t & per\ \ 1\le t<2 \\ 0 & per\ \ t\ge 2 \end{cases}$$

3) $h(t)=u(t)-u(t-2)$

Il sistema è causale ($h(t)=0$ per $t<0$) ed è stabile ($\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|dt<\infty$).

$$y(t)=\begin{cases} 0 & per\ \ t<0 \\ \int_0^t dt = t & per\ \ 0 \le t < 1 \\ \int_{t-1}^{t} dt = 1 & per\ \ 2 > t \ge 1 \\ \int_{t-1}^{2} dt = 3-t & per\ \ 3 > t \ge 2 \\ 0 & per\ \ t \ge 3 \end{cases}$$

4) $\underline{h(t)=u(-t)-u(-t-1)}$

Il sistema non è causale ($h(t)\neq 0$ per $t<0$), ma è stabile ($\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt < \infty$).

$$y(t)=\begin{cases} 0 & per\ \ t<-1\ \ e\ \ per\ \ t>1 \\ \int_0^{1+t} dt = t+1 & per\ \ -1 \le t < 0 \\ \int_t^{1} dt = 1-t & per\ \ 0 < t \le 1 \end{cases}$$

5) $\underline{h(t)=u(t+1)}$

Il sistema non è causale ($h(t)\neq 0$ per $t<0$) e non è stabile ($\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \infty$).

$$y(t)=\begin{cases} 0 & per\ \ t<-1 \\ \int_{-1}^{t} dt = t+1 & per\ \ -1 \le t < 0 \\ \int_{t-1}^{t} dt = 1 & per\ \ t \ge 0 \end{cases}$$

6) $\underline{h(t)=u(t+2)}$

Il sistema non è causale ($h(t)\neq 0$ per $t<0$) e non è stabile ($\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|dt = \infty$).

$$y(t)=\begin{cases} 0 & per\ \ t<-2 \\ \int_{0}^{t+2} dt = t+2 & per\ \ -2\le t<-1 \\ \int_{t-1}^{t} dt = 1 & per\ \ t\ge -1 \end{cases}$$

Esercizio N. 3

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con la funzione:

$$h[n]=\begin{cases} \delta[n]-\delta[n-1] & se\ \ k\ge 0 \\ \delta[n+1] & se\ \ k<0 \end{cases}$$

Calcolare la risposta del sistema ai segnali riportati in figura 3a.

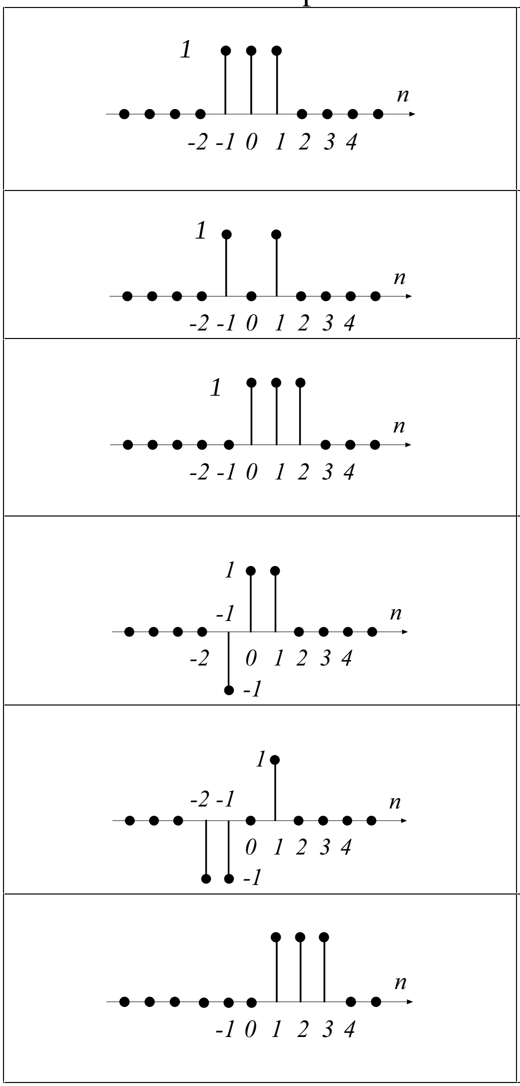


Fig. 3a

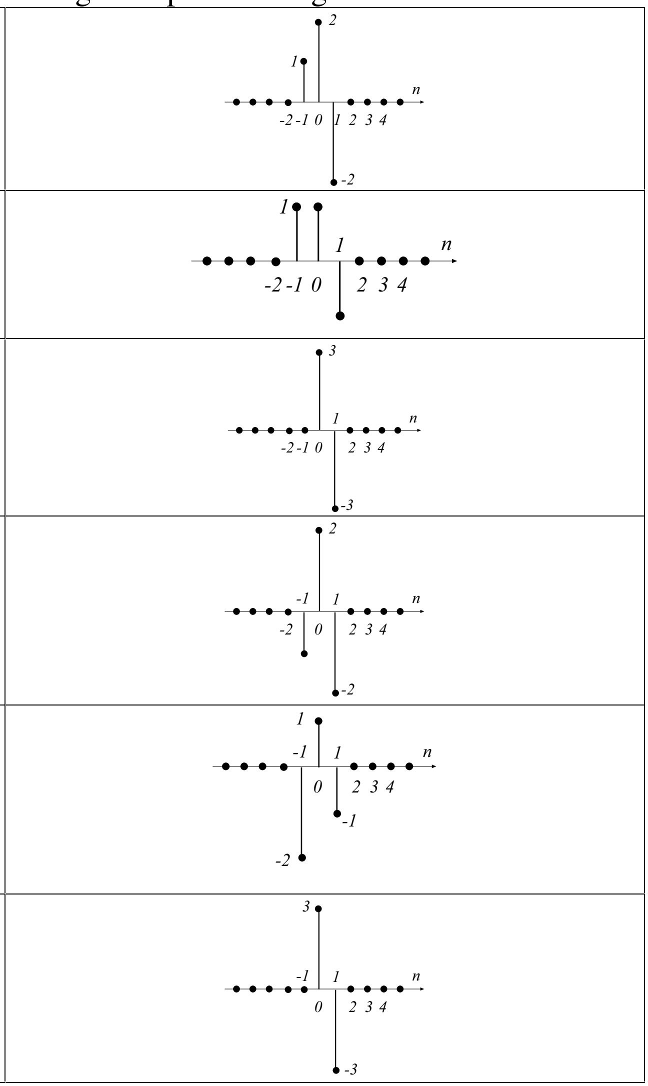


Fig. 3b - **Soluzione**

Esercizio N. 4

La risposta in frequenza di un sistema LTI tempo continuo è data da $H(\omega)=\frac{1}{2}e^{-j\omega}$.

Ricavare la risposta del sistema ai segnali:

1) $x(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$, 2) $x(t)=\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$, 3) $x(t)=\mathrm{rect}(t+1)$,

4) $x(t)=\sin(2\pi t)u(t)$, 5) $x(t)=\cos(6\pi t)u(t-1)$, 6) $x(t)=\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$

Soluzione

Il sistema non fa altro che dimezzare l'ampiezza del segnale di ingresso e ritardarlo di un tempo $t_0=1$. Pertanto le risposte sono:

1) $y(t)=\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{2}\right)$ 2) $y(t)=\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t-2}{2}\right)$ 3) $y(t)=\frac{1}{2}\mathrm{rect}(t)$

4) $y(t)=\frac{1}{2}\sin[2\pi(t-1)]u(t-1)=\frac{1}{2}\sin(2\pi t)u(t-1)$

5) $y(t)=\frac{1}{2}\cos[6\pi(t-1)]u(t-2)=\frac{1}{2}\cos(6\pi t)u(t-2)$

6) $y(t)=\frac{1}{2}\cos\left[10\pi(t-1)-\frac{\pi}{4}\right]=\frac{1}{2}\cos\left(10\pi t-\frac{\pi}{4}\right)$

Esercizio N. 5

Detta $H\left(e^{j\Omega}\right)$ la risposta in frequenza di un sistema LTI tempo discreto e $X\left(e^{j\Omega}\right)$ la trasformata di Fourier del segnale $x[n]$ posto al suo ingresso, si dica chi è il segnale $x[n]$ e qual è la relativa risposta $y[n]$ del sistema quando:

1) $H\left(e^{j\Omega}\right)=1+\frac{1}{3}e^{j\Omega}$ $\qquad X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$

2) $H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+\frac{1}{3}e^{j\Omega}$ $\qquad X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$

3) $H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{2}-e^{-j\Omega}$ $\qquad X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$

4) $H\left(e^{j\Omega}\right)=1+\frac{1}{3}e^{-j2\Omega}$ $\qquad X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$

5) $H\left(e^{j\Omega}\right)=1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}$ $\qquad X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$

6) $H\left(e^{j\Omega}\right)=1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}$ $\qquad X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$

Soluzione

1) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \Longrightarrow x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=X\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1+\frac{1}{3}e^{j\Omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}=\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{3}e^{j\Omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{3}x[n+1]=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}u[n+1]=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}\left\{u[n]-\frac{1}{9}u[n+1]\right\}$$

2) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}} \Longrightarrow x[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}u[n]$

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=X\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}+\frac{1}{3}e^{j\Omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}=\frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{3}e^{j\Omega}}{1+\frac{1}{3}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n]=\frac{1}{2}x[n-1]+\frac{1}{3}x[n+1]=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}u[n-1]+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}u[n+1]$$

3) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \Longrightarrow x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=X\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{\frac{1}{2}-e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n]=\frac{1}{2}x[n]-x[n-1]=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]$$

4) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad \Longrightarrow \quad x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=X\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1+\frac{1}{3}e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{3}e^{-j2\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{3}x[n-2]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$$

5) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad \Longrightarrow \quad x[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=X\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{\frac{1}{2}-e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n]=x[n]-\frac{1}{2}x[n-1]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}\{u[n]+u[n-1]\}$$

6) $X\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}} \quad \Longrightarrow \quad x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=X\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$y[n]=x[n]+\frac{1}{2}x[n-1]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}u[n-1]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\{u[n]+u[n-1]\}$$