Teoria dei Segnali

(Appello del 14 gennaio 2005)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ con la funzione $h(t,\tau)=u\left(\frac{t}{2}-\tau\right)$. Dire, giustificando la risposta se il sistema è causale. Calcolare la risposta al segnale $x(t)=e^{-t}u(t)$.

Soluzione

Questo sistema non è causale: infatti se al suo ingresso viene applicato un impulso ideale all'istante $\tau=-1$, la sua risposta inizia dall'istante $t=-2$.

Il sistema non è tempo invariante. La risposta pertanto va calcolata con il seguente integrale:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau=\int_{0}^{+\infty}e^{-\tau}u\left(\frac{t}{2}-\tau\right)d\tau=\begin{cases}0 & t<0\\ \int_{0}^{t/2}e^{-\tau}d\tau=1-e^{-t/2} & t\geq 0\end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta[n-k]$ con la funzione:

$$h[n,k]=\begin{cases}u[n]-u[n-k] & per\ \ k\geq 0\\ 0 & per\ \ k<0\end{cases}$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$.

Qual è la risposta impulsiva del sistema LTI che fornisce la medesima risposta a $x[n]$?

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante. La risposta pertanto va calcolata con la seguente sommatoria:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n,k] = \begin{cases} 0 \quad per \;\; n<0 \\ \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(u[n]-u[n-k]\right) \quad per \;\; n \geq 0 \end{cases}$$

Pertanto la risposta è:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(u[n]-u[n-k]\right) = 2u[n] - \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}\right)^k u[n] = 2u[n] - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} u[n]$$

$$= 2u[n] - \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{\frac{1}{2}} u[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Il sistema LTI che fornisce la medesima risposta ha risposta impulsiva pari a $\delta[n]$.

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto, causale e stabile, risponde al segnale $x[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$ con il segnale $y[n] = n\left(\frac{4}{5}\right)^n u[n]$. Ricavare la risposta in frequenza del sistema e la sua risposta impulsiva.

Soluzione

L'esercizio va risolto ricordando la seguente proprietà della trasformata di Fourier:

$$nx[n] \quad \leftrightarrow \quad j\frac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega}$$

Poiché $X\left(e^{j\Omega}\right) = \dfrac{1}{1-\frac{4}{5}e^{-j\Omega}}$, segue che $Y\left(e^{j\Omega}\right) = j\dfrac{dX\left(e^{j\Omega}\right)}{d\Omega} = \dfrac{\frac{4}{5}e^{-j\Omega}}{\left(1-\frac{4}{5}e^{-j\Omega}\right)^2}$.

In conclusione $H\left(e^{j\Omega}\right) = \dfrac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{X\left(e^{j\Omega}\right)} = \dfrac{\frac{4}{5}e^{-j\Omega}}{1-\frac{4}{5}e^{-j\Omega}}$, cui corrisponde la risposta impulsiva $h[n] = \left(\frac{4}{5}\right)^n u[n-1]$.

Esercizio N. 4

Calcolare la trasformata Z del segnale $x[n]=|n|\left(\frac{1}{2}\right)^{|n|}$.

Soluzione

Posto $x[n]=-n\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-1]+n\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$, vale a dire

$$x[n]=n\left\{-\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}u[-n-1]+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]\right\}$$

e ricordando la proprietà della trasformata Z:

$$nx[n] \quad \Leftrightarrow \quad -z\frac{dX(z)}{dz}$$

si ha:

$$-2^n u[-n-1] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-2z^{-1}} \quad RC\ |z|<2$$

$$-n2^n u[-n-1] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2} \quad RC\ |z|<2$$

e

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \quad RC\ |z|>\frac{1}{2}$$

$$n\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \quad RC\ |z|>\frac{1}{2}$$

In conclusione

$$X(z)=\frac{2z^{-1}}{\left(1-2z^{-1}\right)^2}+\frac{\frac{1}{2}z^{-1}}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)^2} \qquad RC \quad \frac{1}{2}<|z|<2$$

Esercizio N. 5

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo:

$$x(t)=A+B\cos(\omega_0 t+\phi)$$

con *A*, *B* e ϕ variabili aleatorie indipendenti. La variabile *A* può assumere solamente i valori $+1$ e -1, ciascuno con probabilità pari a $1/2$. La variabile *B* è uniformemente distribuita tra *0* e *1*, mentre la variabile ϕ è distribuita uniformemente tra 0 e 2π.

Soluzione

$$R_x(t,t+\tau)=E[(A+B\cos(\omega_0 t+\phi))(A+B\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi))]$$

$$R_x(t,t+\tau)=E\{A^2+AB(\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi)+\cos(\omega_0 t+\phi))\}+$$
$$+E\{B^2\cos(\omega_0 t+\phi)\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi)\}$$

$$E\{A^2+AB(\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi)+\cos(\omega_0 t+\phi))\}=E[A^2]=1$$

$$E\{B^2\cos(\omega_0 t+\phi)\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi)\}=\frac{1}{2}E[B^2]\cos(\omega_0\tau)=\frac{1}{6}\cos(\omega_0\tau)$$

Pertanto:

$$R_x(\tau)=1+\frac{1}{6}\cos(\omega_0\tau)$$

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha la seguente funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau)=e^{-|\tau|}$$

Esso viene posto all'ingresso di un sistema LTI caratterizzato da una relazione ingresso-uscita data da:

$$y(t)=x(t)+\frac{dx(t)}{dt}$$

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio presente all'uscita del sistema LTI.

Soluzione

La risposta in frequenza del sistema LTI è data da:

$$H(\omega)=1+j\omega$$

La densità spettrale di potenza del processo aleatorio all'ingresso del sistema corrisponde alla trasformata di Fourier di $R_x(\tau)$, e quindi si ha:

$$S_x(\omega)=\frac{2}{1+\omega^2}.$$

La densità spettrale di potenza del processo aleatorio all'uscita del sistema può essere calcolata tramite la relazione:

$$S_y(\omega) = S_x(\omega)|H(\omega)|^2 ,$$

che nel caso specifico risulta:

$$S_y(\omega) = \frac{2}{1+\omega^2}\left(1+\omega^2\right) = 2$$

Ad essa corrisponde una funzione di autocorrelazione $R_y(\tau) = 2\delta(\tau)$.