Teoria dei Segnali

(Appello del 19 luglio 2006)

Prova scritta

Esercizio N. 1

La risposta di un sistema lineare all'impulso ideale centrato in un generico istante t_0 è pari a $e^{-2t}\,u(t)$.

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x(t) = t[u(t) - u(t-1)]$.

Soluzione

Il sistema non risulta lempo invariante (perché?): Pertanto la risposta è data dal seguente integrale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tau e^{-2t} u(t)[u(\tau) - u(\tau - 1)] d\tau = e^{-2t} u(t) \int_0^1 \tau d\tau = \frac{1}{2} e^{-2t} u(t)$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la risposta impulsiva $h[n]$ indicata in figura1.

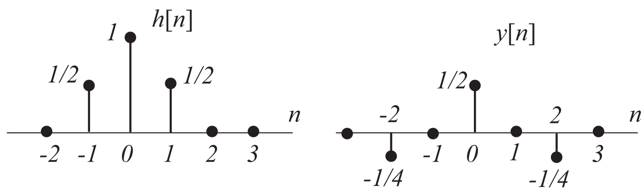


Fig. 1

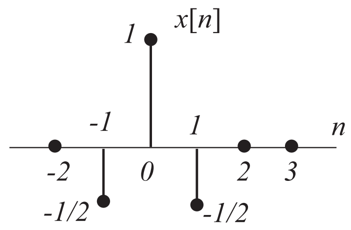
Individuare il segnale $x[n]$ cui corrisponde la risposta $y[n]$ di figura 1.

Soluzione

Il sistema ha la risposta in frequenza: $H\left(e^{j\Omega}\right) = 1 + \frac{1}{2} e^{j\Omega} + \frac{1}{2} e^{-j\Omega}$, mentre il segnale $y[n]$ ha come trasformata la funzione $Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} e^{j2\Omega} - \frac{1}{4} e^{-j2\Omega}$. Il segnale di ingresso dovrà pertanto avere trasformata di Fourier pari a

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}e^{j2\Omega}-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{j\Omega}+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}=\frac{\frac{1-\cos(2\Omega)}{2}}{1+\cos(\Omega)}=\frac{1-\cos^2(\Omega)}{1+\cos(\Omega)}=1-\cos(\Omega)$$

Ad essa corrisponde il seguente segnale:

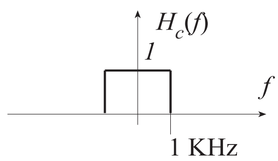


Esercizio N. 3

Un segnale a banda limitata tra 100 Hz e 2 KHz deve essere filtrato con un filtro ideale LTI avente risposta impulsiva $h(t)=\frac{\sin\left(2\pi 10^3 t\right)}{\pi t}$. Si desidera eseguire questa operazione per via numerica. A tale scopo il segnale viene campionato con frequenza di campionamento $f_s=5$ KHz. Si determini la risposta impulsiva del filtro tempo discreto equivalente con cui effettuare l'operazione richiesta.

Soluzione

Il filtro tempo continuo è un filtro passa basso ideale con risposta in frequenza pari a 1 e con frequenza di taglio $f_c=1$ KHz (vedi figura).



La sua risposta in frequenza è data pertanto da:

$$H_c(\omega)=\mathrm{rect}\left[\frac{\omega}{4\pi 10^3}\right]$$

Dalla relazione

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right)=H_p\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)=H_p\left(f_s\Omega\right)$$

si ottiene facilmente $H_d\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\text{rect}\left[\frac{5\times10^3(\Omega-k2\pi)}{4\pi10^3}\right]=\text{rect}\left[\frac{\Omega-k2\pi}{\frac{4\pi}{5}}\right]$

Ad essa corrisponde la risposta impulsiva $h[n]=\frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi/5}^{+2\pi/5}e^{j\Omega n}d\Omega=\frac{2}{5}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{5}n\right)}{\frac{2\pi}{5}n}$

Esercizio N. 4

La generica realizzazione di un processo aleatorio passa banda è data da:

$$s(t)=\sin(\Omega t)[\cos(\omega_0 t)+\cos(\omega_0 t+\phi)]$$

ove Ω e ω_0 sono due costanti $(\Omega<<\omega_0)$ e ϕ è una variabile aleatoria distribuita uniformemente tra 0 e π.

Calcolare la funzione di autocorrelazione dell'inviluppo naturale del processo $s(t)$.

Soluzione

Scrivendo $s(t)$ in forma canonica si vede immediatamente che l'inviluppo complesso ha la seguente espressione:

$$\tilde{s}(t)=\sin(\Omega t)\left(1+e^{j\phi}\right)$$

Il suo modulo, detto appunto "inviluppo naturale", è pari a:

$$a(t)=|\sin(\Omega t)|\sqrt{(1+\cos\phi)^2+\sin^2\phi}=|\sin(\Omega t)|\sqrt{2(1+\cos\phi)}=2\left|\cos\frac{\phi}{2}\right||\sin(\Omega t)|$$

La funzione di autocorrelazione del processo $a(t)$ è:

$$R_a(t,t+\tau)=E[|\sin(\Omega t)||\sin(\Omega(t+\tau))|\{2(1+\cos\phi)\}]=|\sin(\Omega t)||\sin(\Omega(t+\tau))|E[2(1+\cos\phi)]=$$
$$=2|\sin(\Omega t)||\sin(\Omega(t+\tau))|$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario ha la densità spettrale di potenza data da (fig. 2a):

$$S_x=\cos\left(\frac{\pi f}{2f_M}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{2f_M}\right).$$

Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI, la cui risposta in frequenza è (fig. 2b):

$$H(f)=\left|\sin\left(\frac{\pi f}{2f_M}\right)\right|\text{rect}\left(\frac{f}{4f_M}\right)$$

Calcolare la potenza media del processo all'uscita del sistema.

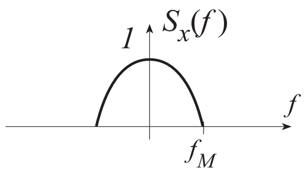


Fig. 2a

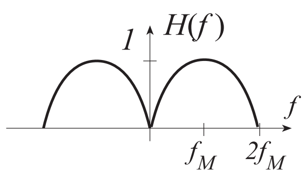


Fig. 2b

Soluzione

La densità spettrale di potenza del processo di uscita è data da:

$$S_y(f)=S_x(f)|H(f)|^2$$

Nel caso specifico si ha:

$$S_y(f)=\cos\left(\frac{\pi f}{2f_M}\right)\sin^2\left(\frac{\pi f}{2f_M}\right)\text{rect}\left(\frac{f}{2f_M}\right)$$

Per quanto riguarda la potenza media del processo di uscita, si ha:

$$P=2\int_0^{f_M}\sin^2\left(\frac{\pi f}{2f_M}\right)\cos\left(\frac{\pi f}{2f_M}\right)df=4\frac{f_M}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2(\alpha)\cos(\alpha)d\alpha=\frac{4f_M}{3\pi}$$

Esercizio N. 6

Un rumore gaussiano bianco di densità spettrale di potenza pari a 1 W/Hz è applicato all'ingresso di un sistema LTI avente risposta impulsiva riportata in figura 3.

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo all'uscita del sistema.

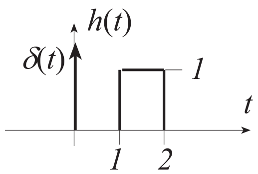


Fig. 3

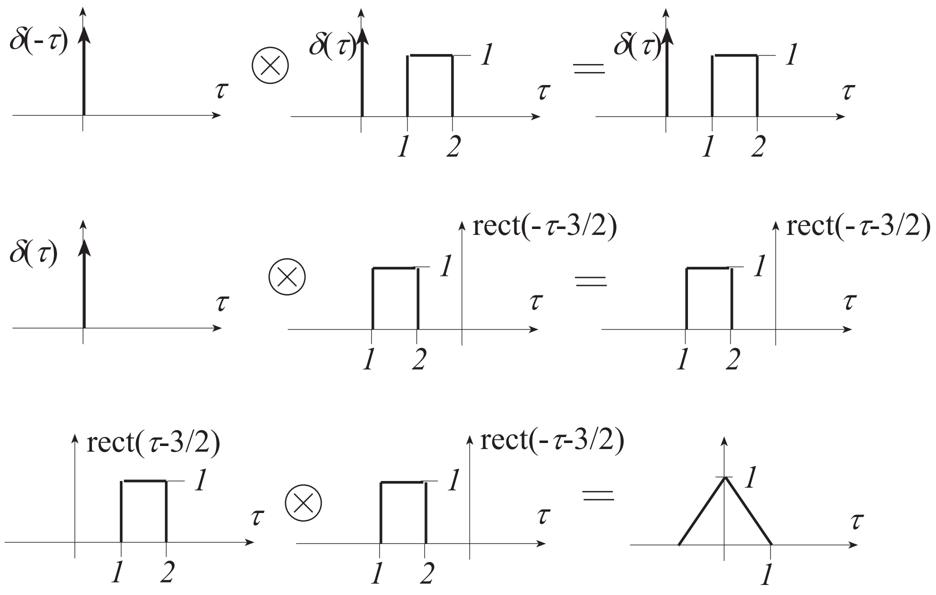
Soluzione

Poiché la funzione di autocorrelazione del processo di ingresso $R_x(\tau)=\delta(\tau)$, quella del processo di uscita sarà data da $R_y(\tau)=h(\tau)\otimes h(-\tau)$. Il calcolo di tale convoluzione risulta facilitato, scomponendo il relativo integrale in tre parti e cioè:

$$R_y(\tau)=\left\{\delta(\tau)+\text{rect}\left(\tau-\frac{3}{2}\right)\right\}\otimes\left\{\delta(-\tau)+\text{rect}\left(-\tau-\frac{3}{2}\right)\right\}=$$

$$= \left\{\delta(\tau) + \mathrm{rect}\left(\tau - \frac{3}{2}\right)\right\} \otimes \delta(-\tau) + \delta(\tau) \otimes \mathrm{rect}\left(-\tau - \frac{3}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(\tau - \frac{3}{2}\right) \otimes \mathrm{rect}\left(-\tau - \frac{3}{2}\right)$$

Le seguenti figure illustrano i risultati delle singole convoluzioni. Il calcolo si basa sulle proprietà della funzione $\delta(\tau)$ e su quelle della convoluzione.



Il risultato finale è il seguente: