Teoria dei Segnali

(Appello del 19 gennaio 2007)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Il segnale $x(t)$ ha la seguente trasformata di Fourier:

$$X(\omega) = \frac{3}{1 - j3\omega}$$

Scrivere l'espressione della trasformata di Fourier del segnale $y(t) = x\left(2 - \frac{t}{3}\right)$.

Soluzione

Il passaggio da $x(t)$ a $y(t) = x\left(2 - \frac{t}{3}\right)$ avviene attraverso le seguenti trasformazioni di variabile:

$$1)\quad t \to -t \qquad 2)\quad t \to t-2 \qquad 3)\quad t \to \frac{t}{3}$$

che produce sulla trasformata di Fourier i seguenti effetti:

$$1)\quad X(\omega) \to X^*(\omega) \qquad 2)\quad X(\omega) \to X(\omega)e^{-j2\omega} \qquad 3)\quad X(\omega) \to 3X(3\omega)$$

Pertanto la trasformata di $y(t)$ risulta essere $Y(\omega) = \dfrac{9e^{-j6\omega}}{1 + j9\omega}$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha, come risposta in frequenza, la funzione:

$$h[n] = u[n] - u[n-5]$$

Ricavare la risposta del sistema al segnale

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$$

Soluzione

Ricorrendo alle trasformate di Fourier, si ha:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1 - e^{-j5\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}} \qquad X\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1 - e^{-j\Omega}}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Pertanto: $Y\left(e^{j\Omega}\right)=X\left(e^{j\Omega}\right)H\left(e^{j\Omega}\right)=\dfrac{1-e^{-j5\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$, e quindi

$$y[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-5}u[n-5]$$

Esercizio N. 3 *(6CFU)*

Si consideri la funzione:

$$H(z)=\frac{1}{z^{2}+4z}$$

Quanti sono i sistemi LTI tempo discreto che possono avere questa $H(z)$ quale funzione di trasferimento?

Di essi uno è stabile: Si valuti la sua risposta impulsiva.

Soluzione

La funzione $H[z]$ ha due poli, rispettivamente in $z=0$ e $z=-4$. Le regioni di convergenza possibili sono due, caratterizzate rispettivamente da $|z|>4$ e $|z|<4$. La seconda di esse contiene la circonferenza di raggio unitario, quindi caratterizza un sistema stabile. La risposta impulsiva corrispondente è un segnale sinistro, dato da:

$$h[n]=-(-4)^{n-2}u[-n+1]$$

Esercizio N. 3 *(3CFU)*

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso centrato in $n=k$ con la funzione:

$$h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[n-k]$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n]$.

Soluzione

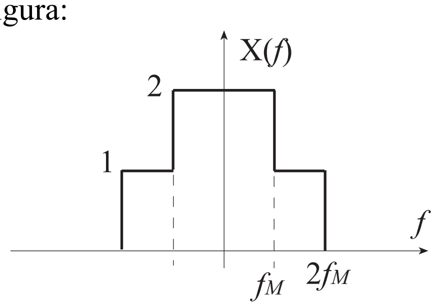
Il sistema non è tempo invariante: La sua risposta è fornita dalla seguente sommatoria:

$$y[n]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{k}u[n-k]=$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k} u[n-k] = \sum_{n=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^{k} = \left\{\frac{4}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{n}\right\} u[n]$$

Esercizio N. 4

Si calcoli il segnale analitico associato al segnale $x(t)$, avente lo spettro rappresentato nella seguente figura:



Soluzione

Conviene considerare lo spettro del segnale analitico, che coincide con la parte positiva di $2X(f)$. Tale spettro può essere scritto ad esempio come:

$$X(f) = \text{rect}\left[\frac{f - \frac{f_M}{2}}{f_M}\right] + \text{rect}\left[\frac{f - f_M}{2f_M}\right]$$

Sfruttando le proprietà di dualità e della traslazione in frequenza, si può scrivere subito la relativa anti trasformata:

$$x_+(t) = f_M \sin c(f_M t) e^{j\pi f_M t} + 2 f_M \sin c(2 f_M t) e^{j2\pi f_M t}$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ con densità spettrale di potenza

$$S_x(f) = 10^{-2}\delta(f) + 10^{-2}\,\text{rect}\left(\frac{f}{2\cdot 10^6}\right)$$

è posto all'ingresso di un sistema LTI avente la seguente risposta in frequenza:

$$H(f) = \frac{1}{100\pi + j\pi f}$$

Calcolare il valor medio del processo aleatorio presente all'uscita del sistema.

Soluzione

Il valor medio cercato è pari a:

$$m_y = m_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)dt = m_x H(0) = \frac{m_x}{100\pi}$$

Dalla densità spettrale di potenza si evince che il processo di ingresso ha una potenza media in continua pari a $10^{-2}\ W$. Quindi $m_x = 10^{-1}$ e $m_y = \frac{10^{-3}}{\pi}$.

Esercizio N. 6

La generica realizzazione di un processo aleatorio è: $x(t) = at$, ove a è una variabile aleatoria continua con densità di probabilità data da:

$$p(a) = \begin{cases} 1-|a| & \text{per } |a| < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare il valor medio e la funzione di auto correlazione del processo. Qual è la probabilità che all'istante $t = 2$ il processo abbia un valore superiore a 0.5?

Soluzione

In qualsiasi istante t il processo ha valor medio $m_x = tE(a) = 0$. La funzione di auto correlazione è:

$$R_x(t, t+\tau) = E\left[a^2 t(t+\tau)\right] = t(t+\tau)E\left[a^2\right] = \frac{1}{6}t(t+\tau)$$

All'istante $t = 2$ il processo assumerà un valore superiore a 0.5 se la variabile aleatoria avrà un valore maggiore di $0.5/2 = 0.25$. Pertanto:

$$P(2a) > 0.5 = P(a) > 0.25 = \int_{0.25}^{1} (1-a)da = \frac{9}{32}$$