Teoria dei Segnali

(Appello del 19 luglio 2007)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo continuo risponde all'impulso ideale centrato in $t=\tau$ con il segnale

$$h(t,\tau)=u(|\tau|-t)$$

Il sistema è tempo invariante? (giustificare la risposta)

Calcolare la sua risposta quando all'ingresso c'è il segnale $e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$.

Soluzione

IL sistema non è tempo invariante. Poiché la risposta all'impulso centrato in $t=0$ è data da $h(t,0)=u(-t)$, per essere tempo invariante quella a $\delta(t-\tau)$ dovrebbe essere $h(t,\tau)=u(\tau-t)\neq u(|\tau|-t)$.

La risposta a $x(t)$ è calcolabile con l'integrale:

$$y(t)=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau}u(|\tau|-t)d\tau$$

Quando t è negativo, la funzione $u(|\tau|-t)$ è uguale a 1 per tutti i valori di τ. Pertanto in questo caso

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau}u(|\tau|-t)d\tau=\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau}d\tau=2$$

Quando invece t è positivo, la funzione $u(|\tau|-t)$ è uguale a 1 per $|\tau|>t$ ed è nulla per $|\tau|<t$. Si avrà allora

$$\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau}u(|\tau|-t)d\tau=\int_t^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\tau}d\tau=2e^{-\frac{1}{2}t}$$

In conclusione: $y(t)=\begin{cases}2 & \text{per}\, t<0\\ 2e^{-\frac{1}{2}t} & \text{per}\, t>0\end{cases}$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n \left\{u[n] + \frac{1}{4}u[n+1]\right\}$$

Trovare quale segnale si deve porre al suo ingresso affinché quello di uscita sia

$$y[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

Soluzione

Ricorrendo alle trasformate di Fourier, si ha:

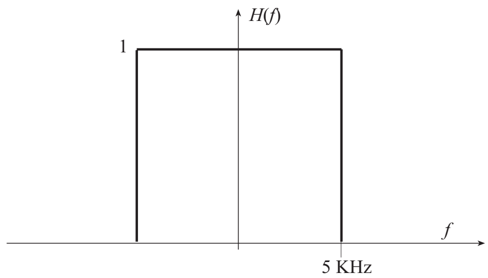
$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1 + \frac{1}{2}e^{j\Omega}}{\left(1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)} \qquad Y\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Pertanto: $X\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{H\left(e^{j\Omega}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{j\Omega}}$, cui corrisponde il segnale

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n] = (-2)^n u[-n]$$

Esercizio N. 3

Un segnale tempo continuo ha uno spettro con banda limitata a 10 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro avente la risposta in frequenza riportata in figura. A tale scopo, esso viene convertito in un segnale tempo discreto attraverso un campionamento alla frequenza di 30 KHz. Si calcoli la risposta impulsiva del filtro tempo discreto da usare per eseguire per via numerica il filtraggio desiderato.



Soluzione

Nella variabile ω la risposta in frequenza del filtro è espressa dalla formula:

$$H(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{20\pi \times 10^3}\right)$$

Il corrispondente filtro tempo discreto avrà quindi una risposta in frequenza nell'intervallo $(-\pi, \pi)$ data da :

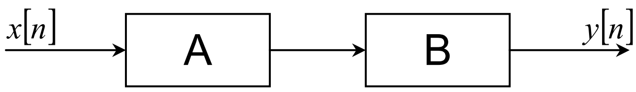
$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\text{rect}\left(\frac{3\Omega}{2\pi}\right)$$

Antitrasformando, si ottiene:

$$h[n]=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi/3}\cos(\Omega n)d\Omega=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(\Omega n)}{n}\Bigg|_0^{\pi/3}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{3\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{n}=\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}n\right)}{\frac{\pi}{3}n}$$

Esercizio N. 4

Nel seguente sistema il blocco A risponde a $x[n]$ con $\frac{1}{2}x[n-2]$, mentre il blocco B esegue la somma corrente del segnale di ingresso. Scrivere l'equazione alle differenze che descrive l'intero sistema, calcolare la sua funzione di trasferimento e la sua risposta impulsiva e dire, giustificando la risposta, se il sistema è stabile.



Soluzione

Indicando con $w[n]$ il segnale all'uscita del blocco A, si ha:

$$w[n]=\frac{1}{2}x[n-2]$$
$$y[n]=w[n]+y[n-1]$$

Eliminando il segnale $w[n]$ si ottiene la seguente equazione alle differenze:

$$y[n]-y[n-1]=\frac{1}{2}x[n-2]$$

Per mezzo della trasformata Z si ricava che la funzione di trasferimento del sistema è:

$$H(z)=\frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-z^{-1}}$$

cui corrisponde la seguente risposta impulsiva:

$$h[n]=\left(\frac{1}{2}\right)u[n-2]$$

La regione di convergenza di $H(z)$ non contiene la circonferenza di raggio unitario. Il sistema è pertanto instabile.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha la seguente densità di probabilità del primo ordine:

$$p_1(x(t)) = \begin{cases} C(1-|x|) & |x| \le 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

La sua densità spettrale di potenza è data da: $S_x(f) = \begin{cases} 10^{-3}\left(1-\dfrac{|f|}{B}\right) & |f| \le B \\ 0 & |f| > B \end{cases}$.

Determinare la larghezza di banda B del processo aleatorio.

Soluzione

Innanzitutto si deve determinare la costante C, imponendo che $\displaystyle\int_{-1/2}^{1/2} p_1(x)dx = 1$.

Si ricava $C = \dfrac{4}{3}$. Si calcoli ora il valore quadratico medio (cioè la potenza) del processo:

$$E\left[x^2(t)\right] = \int_{-1/2}^{+1/2} \frac{4}{3} x^2 (1-|x|)dx = \frac{5}{72} \text{ [W]}$$

La potenza media del processo è anche data dall'integrale della densità spettrale di potenza. Tale integrale (area di un triangolo!) è pari a $B \times 10^{-3}$, e pertanto

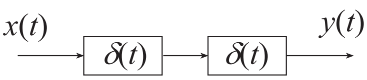
$$B \times 10^{-3} = \frac{5}{72} \Rightarrow B = 69.4\ Hz$$

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio stazionario ha la seguente funzione di auto correlazione:

$$R_x(\tau) = \begin{cases} 1-|\tau| & \text{per } |\tau| < 1 \\ 0 & \text{per } |\tau| > 1 \end{cases}$$

Esso è posto all'ingresso del sistema lineare tempo invariante rappresentato in figura:



Determinare la potenza media del processo all'uscita del sistema.

Soluzione:

Per ogni realizzazione si ha che $y(t) = x(t)$. Ricordando che la potenza media di un processo stazionario è pari a $R_y(0)$, si ricava che la potenza media del processo di uscita è di 1 W.