Teoria dei Segnali

(Appello del 30 giugno 2009)

Prova scritta

Parte prima

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso centrato in $t=\tau$ con il segnale $u(t-|\tau|)$.

Ricavare la sua risposta ai segnali $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$ e $x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$
(sugg.: è molto importante distinguere i due casi $t>0$ e $t<0$)

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante (perché)?

a) $x(t)=\cos(2\pi f_0 t)$

La risposta è data da $y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos(2\pi f_0\tau)u(t-|\tau|)d\tau$, che per $t>0$ diventa:

$$y(t)=\int_{-t}^{+t}\cos(2\pi f_0\tau)d\tau=\frac{2\sin(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0}$$

mentre per $t<0$ si ha $y(t)=0$

b) $x(t)=\sin(2\pi f_0 t)$

$$y(t)=\int_{-t}^{+t}\sin(2\pi f_0\tau)d\tau=0 \quad per\ t>0,$$

in questo caso la risposta è identicamente nulla.

Esercizio N. 2

Di un segnale tempo discreto $x[n]$ con trasformata di Fourier $X(e^{j\Omega})$ si sa che:

1). $x[n]=0$ per $n<0$

2). $\mathrm{Re}\{X(e^{j\Omega})\}=\cos(\Omega)+\cos(2\Omega)+A$

3). $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\left|X(e^{j\Omega})\right|^2 d\Omega=6$

Determinare la costante A e il segnale $x[n]$.
(sugg.: il punto 2 ci permette di conoscere la parte pari di $x[n]$; ma il punto 1 ci dice che $x[n]=0$ per $n<0$. Quindi come deve essere la parte dispari?...)

Soluzione

La parte pari è data da $\frac{1}{2}\delta[n+1]+\frac{1}{2}\delta[n+2]+A\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-2]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$. Poiché deve essere $x[n]=0$ per $n<0$, la parte dispari sarà:

$$x_d[n]=-\frac{1}{2}\delta[n+1]-\frac{1}{2}\delta[n+2]+\frac{1}{2}\delta[n-2]+\frac{1}{2}\delta[n-1],$$

e quindi $x[n]=A\delta[n]+\delta[n-1]+\delta[n-2]$. Il teorema di Parseval ci dice allora che A deve essere pari a 2 o -2.

Esercizio N. 3

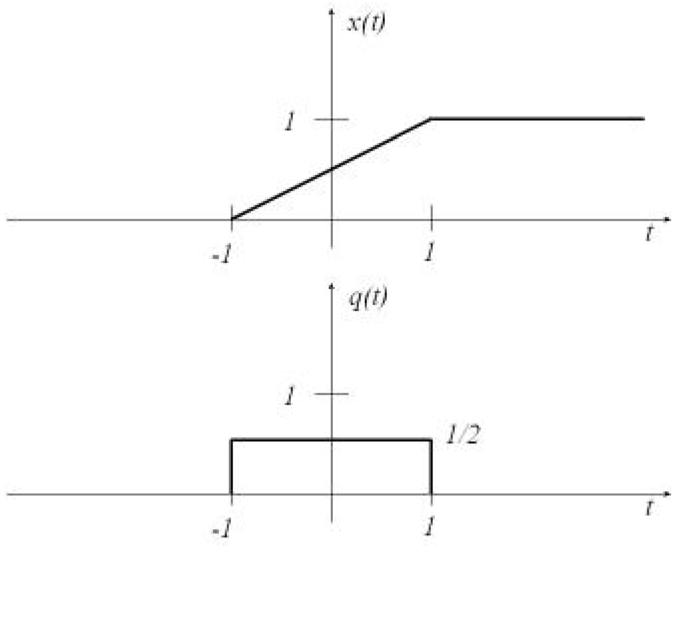
Si consideri il segnale tempo continuo così definito:

$$x(t)=\begin{cases}0 & per\ t<-1\\ \frac{(t+1)}{2} & per\ -1<t<1\\ 1 & per\ t>1\end{cases}$$

Calcolare la trasformata di Fourier della sua parte dispari.

Soluzione

In figura è riportato il grafico del segnale $x(t)$. Esso è pari all'integrale corrente del segnale del segnale $q(t)=\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{2}\right)$, pure rappresentato in figura



La trasformata di Fourier di $q(t)$ è pari a $\frac{\sin(\omega)}{\omega}$, per cui $X(\omega)=\frac{1}{j\omega}\frac{\sin(\omega)}{\omega}+\pi\delta(\omega)$. La trasformata della parte dispari di $x(t)$ è uguale alla parte immaginaria di $X(\omega)$ e cioè $\frac{1}{j}\frac{\sin(\omega)}{\omega^2}$

Parte seconda

Esercizio N. 4

Si consideri il segnale $x(t)=\cos^2(t)$. Qual è la sua trasformata di Hilbert?

Soluzione

Il segnale $x(t)$ può essere scritto come:

$$x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2t)$$

La trasformata di Hilbert è definita come la convoluzione tra $x(t)$ e la funzione $\frac{1}{\pi t}$. Essendo quest'ultima una funzione dispari, risulta che la trasformata di qualsiasi costante è una funzione ovunque nulla. Pertanto la trasformata di $x(t)$ è data dalla funzione $x(t)=\frac{1}{2}\sin(2t)$.

Esercizio N. 5

Calcolare la densità spettrale di potenza del processo aleatorio così definito:

$$x(t)=\cos^2(2\pi f t+\varphi)$$

con f e φ variabili aleatorie indipendenti, uniformemente distribuite rispettivamente tra 1 MHz e 2 MHz e tra 0 e 2π radianti.

Si tratta di un processo aleatorio stazionario? (almeno in senso debole).

Soluzione

Il segnale può essere posto nella forma $x(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2\pi 2 f t+2\varphi)$. Per quanto riguarda la stazionarietà, il fatto che la fase sia una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π fa sì che la funzione di auto correlazione $R_x(t,t+\tau)$sia dipendente solo da τ e che il valor medio sia indipendente da t. Pertanto il processo è stazionario in senso debole. Ogni realizzazione è caratterizzata da una potenza media in watt pari a $\frac{1}{4}$ (concentrata a frequenza zero), più $\frac{1}{8}$, distribuito tra 2 e 4 MHz. La densità spettrale di potenza (unilatera) pertanto è: $S_x(f)=\frac{1}{4}\delta(f)+\frac{10^{-6}}{16}\text{rect}\left(\frac{t-3\times10^6}{2\times10^6}\right)$

Esercizio N. 6

Il processo aleatorio $x(t)=\cos(2\pi f_0 t+\varphi)$, con φ variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π radianti, è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$. Calcolare la funzione di auto correlazione del processo all'uscita del sistema.

Soluzione

Ogni realizzazione costituisce un'auto funzione del sistema LTI. Quindi le realizzazioni del processo di uscita saranno ancora delle sinusoidi. Caratterizzate tutte dalla stessa ampiezza e da una fase aleatoria In particolare, essendo $H(\omega)=\dfrac{1}{\frac{1}{2}+j\omega}$, le realizzazioni del processo di uscita sono date da:

$$y(t)=\frac{2}{\sqrt{1+16\pi^2 f_0^2}}\cos(2\pi f_0 t+\psi_0+\varphi)$$

in cui $\psi_0=-\arctan(\pi f_0)$. Come è noto, la funzione di autocorrelazione di un simile processo è data da:

$$R_y(\tau)=\frac{1}{2(1+16\pi^2 f_0^2)}\cos(2\pi f_0\tau)$$