FUNZIONALE GENERATORE E ANOMALIA

Definiamo

$$Z[A] = e^{iW[A]} = \langle e^{i\int j^\mu A_\mu} \rangle_{free}$$

$j^\mu = \bar\psi \gamma^\mu \psi$

$$\stackrel{!}{=} \int D\psi D\bar\psi \, e^{iS[\psi,\partial\psi] + i\int j^\mu A_\mu} = \int D\psi \, D\bar\psi \, e^{iS[\psi, D_A\psi]}$$

$\downarrow$

Genera i correlatori fra le correnti $\langle j^\mu j^\nu \dots \rangle$

Es.: $$-i \frac{\delta Z[A]}{\delta A_\mu(x)}\Big|_{A=0} = \int D\psi D\bar\psi \, j^\mu(x) \, e^{iS[\psi, D_A\psi]}\Big|_{A=0} = \langle j^\mu(x) \rangle$$

$$\frac{\delta^{(n)} Z}{\delta A^n} \sim \langle \underbrace{j \cdots j}_{n} \rangle$$

- Il funzionale generatore è UNICO a meno di POLINOMI LOCALI nel campo esterno A e sue derivate

↳ diversi metodi di regolarizzazione inducono diversi polinomi $f[A]$

$$\tilde{W}[A] = W[A] + f[A]$$

diverse regolarizzazioni

polinomio in A e ∂A ed è locale, cioè $\int d^4x \; A(x)\, \partial A(x) \dots A(x)$

Qto avviene perché

$$iW[A] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \; A_{\mu_1}(x_1) \cdots A_{\mu_n}(x_n) \cdot \langle j^{\mu_1}(x_1) \cdots j^{\mu_n}(x_n) \rangle_{conn.}$$

e le ambiguità nei correlatori sono date da trasf. di Fourier di un POLINOMIO nei momenti esterni, che producono δ e derivate delle δ.

- Per es. $\widetilde{\langle j^{\mu_1}(x_1)\, j^{\mu_2}(x_2)\rangle}$ è def. a meno di $b\eta^{\mu_1\mu_2}$ POLINOMIO costante

$$\int dq\, (b\eta^{\mu_1\mu_2})\, e^{iq(x_1-x_2)} = b\,\eta^{\mu_1\mu_2}\,\delta(x_1-x_2)$$

→ ambiguità generata in $W[A]$ è

POLINOMIO LOCALE in A_μ

$$-\frac{1}{2}\int dx_1\, dx_2\, A_{\mu_1}(x_1) A_{\mu_2}(x_2)\, b\,\eta^{\mu_1\mu_2}\,\delta(x_1-x_2) = -\frac{b}{2}\int dx\, A_\mu(x) A^\mu(x)$$

- Che l'ambiguità nei correlatori sia un polinomio nei momenti esterni, si può capire dalle relazioni di dispersione:

$$f(z) = \underbrace{f(z_0) + f'(z_0)(z-z_0) + \dots}_{\text{POLINOMIO nei momenti}} + (\ )(\ )\int \frac{\mathrm{Disc}\, f(s)}{(\ )(\ )\cdots(\ )}\, ds$$

- Le WI per i corrl. di correnti sono equivalenti all'INVARIANZA DI GAUGE di $W[A]$, cioè

$$\underline{\underline{WI's}} \iff \delta W[A] \equiv W[A_\mu + \partial_\mu \Lambda] - W[A_\mu] \underline{\underline{= 0}}$$

$$iW[A] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n!}\int dx_1 \cdots dx_n\, A_{\mu_1}(x_1)\cdots A_{\mu_n}(x_n)\cdot \langle j^{\mu_1}(x_1)\cdots j^{\mu_n}(x_n)\rangle_{conn.}$$

$$i\delta W[A] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n\, n}{n!}\int dx_1 \cdots dx_n\, \partial^{x_1}_{\mu_1}\Lambda(x_1)\, A_{\mu_2}(x_2)\cdots A_{\mu_n}(x_n)\cdot \langle j^{\mu_1}(x_1)\cdots j^{\mu_n}(x_n)\rangle$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(n-1)!}\int dx_1 \cdots dx_n\, \Lambda(x_1)\, A_{\mu_2}(x_2)\cdots A_{\mu_n}(x_n)\cdot \partial^{x_1}_{\mu_1}\langle j^{\mu_1}(x_1)\cdots j^{\mu_n}(x_n)\rangle$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\forall \Lambda, A}{\delta W = 0} \iff \underset{\forall n}{\partial^{x_1}_{\mu_1}\langle j^{\mu_1}(x_1)\cdots j^{\mu_n}(x_n)\rangle = 0}$$

•) $\delta W[A] = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{chiamato} \\ \text{ANOMALIA}}}{G}(\Lambda, A) = \int dx\, \Lambda(x)\, G[A_\mu](x)$

questo funzionale è un POLINOMIO LOCALE in $A, \partial A$

•) Un'anomalia esiste se NESSUN POLINOMIO LOCALE può cancellare l'effetto dell'anomalia.

$$\delta W = G$$

prendo $\tilde{W} = W + f \;\rightarrow\; \delta\tilde{W} = \delta W + \delta f = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{variaz.} \\ \text{di un funz.} \\ \text{ALTAMENTE} \\ \text{NON-LOCALE}}}{G} + \underset{\substack{\uparrow \\ \text{variaz.} \\ \text{di un} \\ \text{funz.} \\ \text{LOCALE}}}{\delta f}$

$\rightarrow \underset{\substack{\uparrow \\ \text{non è banale da} \\ \text{ottenere}}}{\delta f}$ può cancellare G ?

•) Se ho due simm. ho bisogno di due campi esterni. Per es, prendiamo $U(1)_V \times U(1)_A$ e associamo campi A_μ, B_μ rispettivamente.

$$Z[A,B] = \int D\psi D\bar{\psi}\, e^{iS[\psi,\partial\psi]}\, e^{i\int A_\mu j^\mu}\, e^{i\int B_\mu j^\mu_A} \equiv e^{iW[A,B]}$$

Prendiamo la regolarizzazione che preserva $U(1)_V$:

- $\delta_A W = W[A+\partial\lambda, B] - W[A,B] = 0$
- invece $\delta_B W \neq 0$:

$$iW[A,B+\partial\Lambda] - iW[A,B] = \int dx_1 dx_2\, \Lambda(x_1)\,\cdot$$

$$\cdot\Big(A_{\mu_2}(x_2)\, \underbrace{\partial^{x_1}_{\mu_1} \langle j_A^{\mu_1}(x_1)\, j^{\mu_2}(x_2)\rangle}_{\frac{i}{\pi}\epsilon^{\mu_2 s}\partial_s \delta(x_1-x_2)} + B_{\mu_2}(x_2)\, \underbrace{\partial^{x_1}_{\mu_1} \langle j_A^{\mu_1}(x_1)\, j_A^{\mu_2}(x_2)\rangle}_{\frac{i}{\pi}\epsilon_{\sigma s}\partial^s\delta(x_1-x_2)\epsilon^{\mu_2\sigma} = \frac{i}{\pi}\partial^{\mu_2}\delta} \Big)$$

$$= \int dx \; \Lambda(x) \underbrace{\left[\frac{i}{2\pi} \epsilon^{\alpha\beta} F^{(A)}_{\alpha\beta}(x) - \frac{i}{\pi} \partial^\mu B_\mu(x) \right]}_{G[A,B](x)}$$

$\leftarrow$ Polinomio locale nei campi esterni

$$= \delta_\beta \left[\int dx \left(\frac{i}{\pi} \epsilon^{\alpha\beta} A_\alpha B_\beta + \frac{i}{2\pi} B_\mu B^\mu \right) \right]$$

cioè l'anomalia è uguale alla variazione di un funzionale polinomiale locale nei campi esterni A e B.

$\rightarrow$ quindi sembra ELIMINABILE con opportuni CONTROTERMINI

Ciò nonostante, se aggiungiamo questi controtermini a $W[A,B]$, otteniamo $W'[A,B] = W[A,B] + \int (AB + B^2)$
che non è più invariante sotto $A \to A + \partial\lambda$ (W lo era)

$\rightarrow$ Abbiamo riprodotto quanto visto precedentemente: se regolarizziamo W in modo da preservare $U(1)_V$, $U(1)_A$ è anomalo; se cambiamo regolarizzazione (controtermini locali e polinomiali) possiamo preservare $U(1)_A$, ma allora $U(1)_V$ risulta anomalo.

•) GAUGIARE simmetria associata a j^μ vuol dire integrare sul campo esterno A_μ. Il P.I. diventa

$$\int \mathcal{D}A\, e^{-\frac{i}{4}\int F^2} \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi}\, e^{iS[\psi,\bar{\psi}] + i\int j^\mu A_\mu} = \int \mathcal{D}A\, e^{-\frac{i}{4}\int F^2}\, e^{iW[A]}$$

cioè dobbiamo integrare $e^{iW[A]}$ sullo sp. delle config. $\mathcal{Q}$ di A;

- se $W[A]$ <u>non</u> è gauge invariante, non è una funzione ben definita su $\mathcal{Q} = \mathcal{C}/\Omega_x$ e quindi non possiamo integrarla
- detto diversam., il proced. di FP non può essere applicato se $W[A]$ non è gauge inv.

$\Rightarrow$ Per definire una TEORIA di GAUGE CONSISTENTE, la simmetria gaugiata NON deve essere ANOMALA.

Riprendiamo esempio di prima.

Adesso gaugiamo A_μ. Abbiamo ora

campo esterno

$$Z[B] = \int \mathcal{D}\psi \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}A \, e^{-\frac{i}{4}\int F_A^2} \, e^{iS + i\int j^\mu A_\mu + i\int j_A^\mu B_\mu}$$

$$iW[B] = \sum_n \frac{i^n}{n!} \int dx_1 \cdots dx_n \, B_{\mu_1}(x_1) \cdots B_{\mu_n}(x_n) \, \langle j_A^{\mu_1}(x_1) \cdots j_A^{\mu_n}(x_n) \rangle_G$$

where $\langle j \cdots j \rangle_G = \int \mathcal{D}A \, e^{-\frac{i}{4}\int F_A^2} \langle j \cdots j \rangle_A$

correlatori in presenza di campo esterno A

$$i\delta W = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{(n-1)!} \int dx_1 \cdots dx_n \, \Lambda(x_1) B_{\mu_2}(x_2) \cdots B_{\mu_n}(x_n) \cdot \partial^{x_1}_{\mu_1} \langle j_A^{\mu_1}(x_1) \cdots j_A^{\mu_n}(x_n) \rangle_G$$

Ora $F_{\mu\nu}$ è un operatore della teoria e abbiamo uguaglianza fra operatori $\partial_\mu j^\mu = \epsilon^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta}$, quindi in

$$\langle \partial_\mu j_A^\mu \, j_A^{\mu_1} \cdots j_A^{\mu_n} \rangle_G = \epsilon^{\alpha\beta} \langle F_{\alpha\beta} \, j_A^{\mu_1} \cdots j_A^{\mu_n} \rangle_G$$

non è zero ed inoltre non è proporzionale a δ-functions

$\Rightarrow$ tutti $\int dx_1 \ldots dx_n \, B_1 \cdots B_n$ appaiono

δW è NON-LOCALE : ora la simmetria è completamente rotta, nel senso che non valgono più le regole di selezione (e.g. $\pi^0 \to 2\gamma$), a differenza di una 't Hooft anomaly.