Algebra Lineare ed Elementi di Geometria
Matematica per l'Economia e la Statistica 2
A.A. 2023/24
Prova scritta del 16.01.2024

Cognome	Nome

(1) **(5 punti)** Si dia la definizione di base di uno spazio vettoriale V su un campo K e di indipendenza lineare di n vettori $v_1, \ldots, v_n \in V$.

Si enunci e si dimostri il Teorema di Dimensione per applicazioni lineari.

(2) Sia $f \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ x_2 + 2x_3 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) **(2 punti)** Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

(b) **(4 punti)** Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{im} f$ e delle loro basi.
Si esibisca un vettore v che appartiene a $\ker f \cap \mathrm{im} f$.

(c) **(3 punti)** Si trovi $\alpha \in \mathbb{R}$ tale per cui il sistema lineare $A \cdot X = \begin{pmatrix} 1+\alpha \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ sia compatibile e si trovi la sua generica soluzione.

(3) Si consideri la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 9 & -12 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 5 \end{pmatrix}.$$

(a) **(4 punti)** Si determini il polinomio caratteristico di $L_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(b) **(5 punti)** Si trovi una base $\mathcal{B}$ di autovettori per L_A.
Si calcolino le matrici di cambio di base $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(L_A)$ e $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(L_A)$ dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$.

(4) (a) **(3 punti)** Si determinino delle equazioni parametriche della retta piana $r \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ tale che:
- r sia parallela alla retta piana $s \subset \mathbb{A}^2_{\mathbb{R}}$ di equazione cartesiana $x + 2y = 1$;
- r passi per il punto $Q = (1, -2)$.

(b) **(5 punti)** Nello spazio affine $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ si considerino le due rette r ed s:

$$r : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 1 - t \\ z = -t \end{cases} \qquad s : \begin{cases} x + z = 2 \\ x - y = -1 \end{cases}$$

Si dica se r ed s sono incidenti, parallele, o sghembe.
Se le rette sono incidenti o parallele, si determini un piano H che le contiene entrambe.
Se sono sghembe, si determinino due piani paralleli H_r ed H_s tali che $r \subset H_r$ e $s \subset H_s$.