Decimo foglio - Esercizio 1.

Consideriamo la seguente applicazione lineare $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -x \\ -8x+6z \\ -4x-y+5z \end{pmatrix}$$

i. Scriviamo la matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ dove $\mathcal{E}$ è la base standard di $\mathbb{R}^3$.

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 6 \\ -4 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

ii. Calcoliamo il polinomio caratteristico

sviluppiamo lungo la prima riga

$$p_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -8 & -\lambda & 6 \\ -4 & -1 & 5-\lambda \end{pmatrix} = -(\lambda+1) \cdot \det \begin{pmatrix} -\lambda & 6 \\ -1 & 5-\lambda \end{pmatrix}$$

$$= -(\lambda+1)\left[-\lambda(5-\lambda)+6\right] = -(\lambda+1)\left[\lambda^2-5\lambda+6\right] =$$

$$= -(\lambda+1)(\lambda-2)(\lambda-3)$$

iii. Lo spettro di f è dunque l'insieme

$$\{-1, 2, 3\}$$

iv. Dal momento che il polinomio caratteristico si fattorizza in fattori lineari distinti abbiamo che f è diagonalizzabile.

v. Per determinare una base $\mathcal{B}$ di autovettori di f determiniamo gli autospazi relativi ai tre autovalori.

<u>Aut(-1)</u>: dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 6 \\ -4 & -1 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

portiamo la matrice dei coefficienti in una forma a gradini:

$$\begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ -8 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque un sistema equivalente è

$$\begin{cases} -4x-y+6z=0 \\ y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -4x = y-6z \\ y = 2z \end{cases} \qquad \begin{cases} x = z \\ y = 2z \end{cases}$$

la cui generica soluzione è della forma $\begin{pmatrix} z \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $z \in \mathbb{R}$

pertanto $Aut(-1) = span\left(\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)$

<u>Aut(2)</u>: dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

portiamo la matrice dei coefficienti nella forma a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -2 & 6 \\ -4 & -1 & 3 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque un sistema equivalente è

$$\begin{cases} x = 0 \\ y-3z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 3z \end{cases}$$

la cui generica soluzione è della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 3z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $z \in \mathbb{R}$

pertanto $Aut(2) = span\left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)$

<u>Aut(3)</u>: dobbiamo risolvere

$$\begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

portiamo la matrice dei coefficienti nella forma a gradini

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8 & -3 & 6 \\ -4 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

dunque un sistema equivalente è

$$\begin{cases} x = 0 \\ y-2z=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 0 \\ y = 2z \end{cases}$$

la cui generica soluzione è della forma $\begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ z \end{pmatrix} = z\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ con $z \in \mathbb{R}$

pertanto $Aut(3) = span\left(\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)\right)$

Otteniamo quindi che una base di autovettori è data da

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

La matrice $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3})$ è quindi

$$M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{B}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Per ottenere $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3})$ calcoliamo l'inversa della matrice precedente

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & -3 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 3 \end{array}\right)$$

Pertanto $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}}(id_{\mathbb{R}^3}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$