1 Fondamenti di elettronica

1.1 Quantita' fondamentali

Tensione La differenza di potenziale V, anche detta *potenziale* o *forza elletromotrice* o *tensione* (*Voltage* in inglese), e' il costo in energia (o lavoro effettuato) per muovere una carica positiva da un potenziale elettrico inferiore a un potenziale superiore. Visto dal punto di vista della carica, e' l'energia rilasciata dalla carica che si muove dal potenziale superiore a quello inferiore.

Tipicamente la tensione e' espressa in Volt (V) con multipli dai mV ai kV. Vi si riferisce come a un "potenziale tra due punti del circuito o ai capi del componente elettrico", in quanto rappresenta sempre una differenza di potenziale, oppure come al "potenziale in un punto del circuito", sottintendendo che si prende il *ground*, o livello di terra, come riferimento.

Corrente La corrente e' la frequenza di cariche che passano in un certo punto di un circuito.

Tipicamente la corrente si misura in ampere (A) con multipli dai pA agli A. Vi si riferisce come a "una corrente che attraversa un ramo del circuito o un componente elettrico".

Generazione di tensione La differenza di potenziale puo' essere generata da batterie, da generatori veri e propri, da celle solari, ecc.

Conduttori I componenti di un circuito si collegano tra loro con segmenti di materiale conduttore, detti appunto *conduttori*, che in prima approssimazione hanno lo stesso potenziale ovunque sul singolo segmento. Vedremo che in regime di alte frequenze o basse impedenze questo puo' non risultare vero.

I circuiti

Regole fondamentali Osservando i circuiti si possono dedurre alcune regole fondamentali:

Legge di Kirchhoff per le tensioni: come e' facilmente intuibile, due tratti di circuito collegati in parallelo, ovvero dal polo entrante e dal polo uscente, vedono la stessa differenza di potenziale ai due poli. Questo significa che la somma algebrica del V sul primo tratto e l'opposto del V sul secondo tratto e' zero. Ne deriva che la somma algebrica dei potenziali e delle forze elettromotrici di un circuito chiuso (*maglia*) e' nulla.

Legge di Kirchhoff per le correnti: la somma delle correnti entranti e uscenti da un qualsiasi punto del circuito e' nulla. Questo vuol dire che tratti di circuito connessi in sequenza, cioe' in serie, sono percorsi dalla stessa corrente.

Potenza: la potenza, ovvero il lavoro per unita' di tempo, consumata da un dispositivo in un circuito e' data dal prodotto della corrente che attraversa il dispositivo moltiplicata per la tensione ai capi del dispositivo stesso: $P = VI$. La potenza si misura in Watts (W), con $1\ \mathrm{W} = 1\ \mathrm{J/s}$. La potenza di solito si tramuta in calore dissipato, lavoro meccanico, energia irraggiata o immagazzinata. Il calore dissipato e' in particolare un problema di cui tener conto nella progettazione dei circuiti.

Resistenza e resistori La relazione che lega tensione e corrente governa il comportamento e la funzione dei componenti elettrici. Una relazione di proporzionalita' diretta tra le due grandezze e' detta *resistenza*: la corrente che attraversa un conduttore e' proporzionale alla tesione ai capi, quindi:

$$V = IR$$

Tale relazione va sotto il nome di Legge di Ohm e vale solo per materiali, contatti e dispositivi ohmici, appunto. La costante di proprozionalita' R si misura appunto in ohm (Ω).

I resistori, ovvero i componenti fisici che vengono inclusi in un circuito per aggiungere una determinata resistenza, sono realizzati con un avvolgimento di filo di leghe metalliche a base di ferro, cromo, tungsteno. Per evitare, parzialmente, che questo tipo di resistori a filo si comporti da induttore (perché si vuole avere un comportamento resistivo puro o si vuole evitare la generazione di interferenze elettromagnetiche) l'avvolgimento viene fatto sia in un senso che in quello opposto.

I resistori reali sono caratterizzati dal valore della loro resistenza elettrica, espressa in ohm (Ω), nonché dalla massima potenza (ovvero energia per unità di tempo) che possono dissipare, senza distruggersi, espressa in watt.

Dalla definizione di resistenza (cioe' dalla legge di Ohm), segue che:

- Resistori connessi **in serie** danno una resistenza equivalente uguale alla somma delle singole resistenze. La resistenza di due resistori in serie e' sempre piu' grande delle singole resistenze.

- Resistori connessi **in parallelo** danno una resistenza equivalente il cui reciproco e' la somma dei reciproci delle singole resistenze. La resistenza di due resistori in parallelo e' sempre piu' piccola delle singole resistenze.

La potenza dissipata in un resistore come per qualunque altro dispositivo e' $P = VI$, che per la legge di Ohm in questo caso si puo' anche scrivere come $P = I^2R$ o $P = V^2/R$.

Entrata, uscita e funzione di trasferimento di un circuito I circuiti elettronici normalmente accettano una forma di ingresso (solitamente una tensione) e producono un'uscita. La relazione tra uscita e entrata viene descritta come funzione di trasferimento $\boldsymbol{H}$. Per un amplificatore audio che produce una tensione in uscita variabile che e' 100 volte piu' grande della tensione in ingresso variabile, H e' solo una costante (100).

Partitori di tensione Un partitore di tensione e' un circuito che per una data tensione in entrata V_{in} produce una tensione in uscita V_{out} piu' piccola di V_{in} e variabile grazie alle resistenze introdotte nel circuito (vedi circuito in Fig. 1.1).

In particolare il rapporto tra R2 e la somma delle resistenze R1 e R2 sara' proporzionale al rapporto tra i due potenziali:

$$V_{out} = IR_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}$$

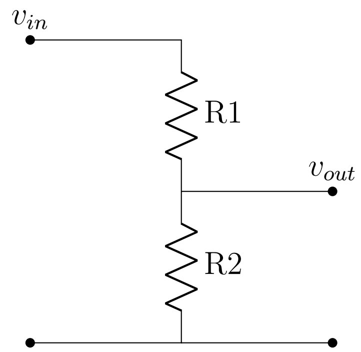

Figura 1: Partitore di tensione

Il partitore di tensione e' normalmente usato per ridurre la tensione in entrata a una uscita piu' piccola. R_2 viene presa regolabile per ottenere un controllore del volume. Piu' direttamente, posso inserire un potenziometro, che in un unico componente rappresenta il rapporto R1R2.

Il partitore di tensione puo' essere pensato come un circuito: R1 e la tensione in entrata possono essere pensate come l'uscita di un amplificatore, mentre R2 come l'entrata dello stadio successivo. In questo caso il partitore di tensione mi sta dicendo quindi quanto segnale arriva all'ingresso nello stadio successivo.

Sorgenti di tensione e di corrente Un generatore di tensione ideale e' un oggetto con un input e un output che mantenga una caduta di potenziale costante tra i due terminali qualunque sia la resistenza di carico.

Per esempio dovrebbe garantire una corrente $I{=}V/R$ in uscita quando la resistenza R e' collegata tra i suoi terminali. Le batterie ne sono un ottima approssimazione nella vita reale. Un generatore realistico ha un massimo di corrente erogabile e in generale si comporta come un generatore ideale collegato con una piccola resistenza in serie.

Una sorgente di corrente ideale invece e' un oggetto che mantiene una corrente costante tra input e output qualunque sia la resistenza di carico o la tensione applicata. La sorgente di corrente realistica ha una tensione massima applicabile, e non garantisce corrente costante in uscita.

1.1.1 Condensatori

I condensatori sono dispositivi in grado di immagazzinare una carica Q quando sottoposti a una differenza di potenziale V, secondo un rapporto $Q/V = C$ che e' chiamato appunto *capacita'*.

In presenza di una tensione variabile nel tempo *V(t)*, prendendo la derivata dell'eguaglianza, avremo

$$C\frac{dV}{dt} = \frac{dQ}{dt} = I$$

che indica come la corrente sia in qualche maniera non proporzionale alla tensione, ma al suo tasso di cambiamento. Se la tensione cambia piu' velocemente, anche la corrente fornita e' piu' alta.

Essi sono quindi piu' complicati dei resistori: se variamo 1V / 1s, forniamo un A di corrente. Viceversa se forniamo un Amp, la tensione variera di 1 V/s. uF, nF, pF sono normalmente le unita' con cui abbiamo a che fare. Fornendo una corrente di 1 mA a 1 uF la tensione sale di 1000V al secondo. Un impulso di 10 ms ci da' una differenza di 10 V.

Quando carichiamo un condensatore stiamo fornendo energia, e il condensatore non si scalda ma immagazzina l'energia nei suoi campi elettrici interni. La quantita' di energia immagazzinata in un condensatore carico e' $U_C = 1/2CV^2$. Se infatti $dU = Vdq$ e' l'energia infinitesima immagazzinata dal trasporto di dq su una differenza di potenziale V, abbiamo visto che V = q/C, quindi $dU = q/Cdq$ dove q e' la carica gia' presente nel condensatore. Se integriamo su tutta la carica:

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{CV^2}{2}$$

In maniera opposta alle resistenze, le capacita' di condensatori in parallelo si sommano, mentre per la capacita' di condensatori in serie si calcola il reciproco della somma dei reciproci delle singole capacita'.

1.1.2 Induttori

Gli induttori sono molto simii ai condensatori: il tasso di variazione di corrente attraverso un induttore e' proporzionale alla tensione ai suoi capi (contrariamnte ai condensatori, in cui il tasso di variazione della tensione era proprozionale alla corrente attraverso di essi):

$$V = L\frac{dI}{dt}$$

Tale costante di proprozionalita' L e' l'induttanza e si misura in henry (H). Applicando una tensione costante ai capi di un induttore, la corrente cresce secondo una rampa lineare: per 1 V ai capi di 1 H si ha un aumento di 1 A al secondo. Come per i condensatori, anche negli induttori l'energia iniettata per far aumentare la corrente e' immagazzinata internamente in forma di campo magnetico:

$$U_L = \frac{1}{2}LI^2$$

analogo a

$$U_C = \frac{1}{2}CV^2$$

Gli induttori sono disposiviti magnetici:

- la corrente che scorre nella bobina genera un campo magnetico coassiale alla bobina
- variazioni di tale campo magnetico producono una tensione tale da tentare di neutralizzare le variazioni del campo (forza controlettromotrice) che neutralizzano le variazione del campo

L'induttanza L di una bobina e' il rapporto tra flusso magnetico e corrente attraverso la bobina generatrice. L'induttanza dipende da geometria e proprieta' del materiale magnetico.

1.1.3 Trasformatori

Con due bobine accoppiate possiamo costruire un dispositivo in grado di trasformare una tensione in un altra tensione mantenendo la potenza costante. Ovviamente la corrente sara' cambiata in maniera inversamente proporzionale alla tensione. Per esempio, la tensione applicata alla bobina primaria appare ai capi della secondaria moltiplicata per un fattore proprozionale al rapport tra le spire e con una corrente inversamente proprozionale a tale rapporto.

Per converitre la potenza della tensione alternata a 60 Hz utilizza per esempio un trasformatore a nucleo laminato. Un trasformatore con rapporto di spire n aumenta l'impedenza di n^2.

Sono molto usati per convertire potenza tra reti a 230 V e 110 V: oltre a trasformare la tensione alternata di linea in una piu' conveniente, isolano il dispositivo dalla rete elettrica. Trasformatori tipici per gli strumenti elettronici possono avere tensioni sul secondario da 10 a 50 V con correnti da 0.1 a 5 A.

1.2 Teorema di Thevenin per i circuiti

Il teorema di Thevenin afferma che qualunque circuito lineare comprensivo di resistori e sorgenti di tensioni visto da due nodi è equivalente a un generatore di tensione V_{Th} in serie a un resistore R_{Th}. La tensione V_{Th} e' uguale alla tensione (calcolata o misurata) a circuito aperto. La resistenza R_{Th} e' uguale al rapporto tra V_{Th} e la corrente misurata nel circuito in corto (= chiuso).

Riferendoci al partitore di tensione in Fig. 1.1, a circuito aperto:

$$V_{Th} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} V_{in}$$

A circuito in corto:

$$I_{oc} = V_{in}/R_1$$

.

Dunque:

$$R_{Th} = V_{Th}/I_{oc} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Aggiungendo una resitenza di carico in output al partitore di tensione, c'e' una caduta di tensione considerevole attraverso tale resistenza, a causa della resistenza finita della sorgente, ovvero la R_{Th} del partitore visto come sorgente di tensione.

1.3 Segnali

Analizziamo alcuni tipi di segnali.

1.3.1 Segnali sinusoidali

I segnali piu' diffusi sono quelli di forma sinusoidale, per esempio la tensione fornita dalla rete elettrica casalinga: sono caratterizzati da un'ampiezza (massima) A e da una frequenza di oscillazione *f*, espressa in cicli per secondo, o hertz.:

$$V = Asin2\pi ft \tag{1}$$

A volte e' importante sapere il valore di V ad una certa distanza temporale da $t = 0$, in quel caso si esprime esplicitamente anche la fase ϕ di oscillazione:

$$V = A\ sin\ (2\pi ft + \phi)$$

Se si esprime in funzione della frequenza angolare $\omega = 2\pi f$ allora l'equazione si puo' scrivere come:

$$V = A\ sin\ \omega t$$

. I vantaggi che caratterizzano i segnali sinusoidali sono:

- I segnali sinusoidali sono soluzioni di equazioni differenziali lineari che descrivono molti dei fenomeni della natura e le proprieta' dei circuiti lineari
  - un circuito lineare ha la proprieta' che, quando un segnale in entrata e' la somma di due segnali, manda in uscita la somma delle uscite dei singoli segnali: se $A \rightarrow O(A)$ e $B \rightarrow O(B)$, allora $A + B \rightarrow O(A + B)$.
  - se la risposta del circuito e' $U = f(I)$, allora
    * $f(A + B) = f(A) + f(B)$
    * $f(nA) = nf(A)$
- La risposta di un circuito lineare ad un segnale sinusoidale sara' in generale un segnale sinusoidale alla stessa frequenza, con fase ed ampiezza differenti
- L'effetto del circuito sul segnale di ingresso cambiera' al variare della frequenza del segnale di ingresso
- Il comportamento in funzione della frequenza e' la caratterizzazione del circuito in frequenza (cioe' la definizione di come variano l'ampiezza e la fase dell'uscita in funzione della frequenza)

Anche per queste ragioni e' comune analizzare la risposta *in frequenza* dei circuiti, piuttosto che in funzione del tempo. Cosi' ad esempio un amplifcatore ad alta fedelta' dovrebbe dare una risposta in frequenza uniforme tra almeno 20 Hz e 20 kHz.

Come vedremo in seguito, la **potenza** di un segnale tipo quello definito dall'Eq. 1 si calcola come l'integrale del modulo quadro di tale funzione:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T |V(t)|^2\, dt = \frac{A^2}{2} \tag{2}$$

1.3.2 Altri tipi di segnale

Oltre ai segnali piu' regolari e comuni, quali rampe, rampe limitate, dente di sega, triangolare, a gradino e a picco, prendiamo in considerazione alcuni casi specifici:

Rumore Il rumore, di solito rumore termico di origine termica, si mischia con qualsiasi segnale nel mondo reale, e lo "sporca". Uno dei rumori piu' diffusi e' il *rumore bianco gaussiano limitato in banda*, ovvero un rumore con ampiezza distribuita gaussianamente e con frequenze uniformi, la cui potenza su una certa banda e' costante. I resistori sono ad esempio affetti da questo rumore (detto anche *rumore Johnson*).

Onde quadre Ha ampiezza e frequenza determinate, rararmente un'onda quadra in entrata e' preservata in uscita come onda quadra. L'ampiezza rms eguaglia l'ampiezza. I fronti di salita e discesa non sono veramente verticali: hanno un tempo di salita e discesa non nullo, che viene definito tra il 10% e il 90% della massima transizione.

Impulso Viene definito da larghezza e frequenza dell'impulso. Puo' essere periodico in treni, o con una frequenza di impulsazione (o di ripetizione di impulso) e di un "duty cycle", definito come rapporto tra larghezza e ripetizione dell'impulso. Gli impulsi possono essere a polarita' positiva o negativa, e possono andare in positivo o in negativo.

1.3.3 Caratterizzazione dei segnali

Oltre all'ampiezza A dei segnali, si possono considerare altre caratteristiche per descriverli:

- *ampiezza picco-picco*, ovvero la distanza tra massimo e minimo del segnale, espressa come $V\ pp$
- l'*ampiezza quadratica media* del segnale. Per i segnali sinusoidali equivale alla radice quadrata dell'Eq. 2:

$$V_{rms} = \sqrt{\frac{A^2}{2}} = \frac{A}{\sqrt{2}} = 0.707A \tag{3}$$

Casi pratici Nelle reti elettriche USA, la tensione in uscita e' 117 V rms, 60 Hz. L'ampiezza e' 165 V (330 V pp). Nelle reti europee, la tensione in uscita e' 160 V rms, 50 Hz. L'ampiezza e' 230 V (460 V pp).

1.3.4 Decibel e confronto tra segnali

Per confrontare due segnali vorremmo usarne l'ampiezza (A_1, A_2) o la potenza (P_1, P_2). Visto che normalmente ci troviamo con molti ordini di grandezza di differenza, e' piu' comodo usare una funzione logaritmica, come il decibel (dB), derivato dall'unita' *bel*, che non si usa. Il decibel e' definito come un multiplo (20 o 10, rispettivamente) del logaritmo in base 10 del rapporto tra le ampiezze:

$$dB = 20\ log_{10}\ \frac{A_2}{A_1} \tag{4}$$

Ad esempio un segnale doppio dell'altro, risultera' in $log_{10}\ 2 = 0.3010$, ovvero l'esponente a cui elevare 10 per ottenere 2, moltiplicato per 20, quindi +6 dB. Se un segnale e' meta' dell'altro, allora $log_{10}\ 0.5 = -0.3010$, quindi -6 dB.

Se un segnale e' 10 volte l'altro, allora $20\ log_{10}\ 10 = +20\ dB$. Se un segnale e' 1/10 dell'altro, allora $20\ log_{10}\ 0.1 = -20\ dB$.

Il decibel si puo' anche esprimere in funzione delle potenze:

$$dB = 10\ log_{10}\ \frac{P_2}{P_1} \tag{5}$$

Nel caso di segnali con la stessa (per esempio, sinusoidali), le due equazioni si equivalgono. Nel caso di funzioni casuali, come per esempio l'andamento del rumore nel tempo, e' necessario usare la definizione Eq.5, in quanto l'effetto "quadratico medio" tiene conto del contributo di una funzione che puo' oscillare casualmente intorno a una baseline.

Il decibel viene usato anche in senso "assoluto", sottintendendo un livello di riferimento convenzionale.

1.4 Circuiti RC

Circuiti con V e I variabili possono essere considerati nello spazio dei tempi o delle frequenze. Nello spazio dei tempi, un semplice circuito che includa un resistore R e un capacitore C come in fig. 2, ha il comportamento visualizzato nel grafico in fig. 3:

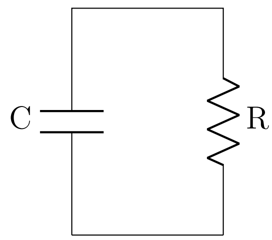

Figura 2: Semplice circuito RC con sola scarica

Dalla derivata rispetto al tempo della definizione di C ($Q = C\ V$) otteniamo che, per un condensatore con capacita' C ai cui capi e' presente una differenza di potenziale V e in cui e' quindi immagazzinata una carica Q, la variazione di carica nel tempo, ovvero la corrente, sara' equivalente alla variazione di tensione nel tempo per la capacita', con un segno negativo visto che la corrente sta uscendo dal condensatore:

$$C\frac{dV}{dt} = I = -\frac{V}{R}$$

La soluzione a questa equazione differenziale e' $V = Ae^{-t/RC}$, con A ampiezza massima del potenziale, o potenziale iniziale. Quindi un condensatore carico collegato a una resistenza si scarica nel tempo come in Fig 3. Dopo un tempo caratteristico (o costante di tempo) equivalente al prodotto RC, la carica residua nel condensatore sara' pari a 1/e, ovvero a circa il 37% della carica iniziale e si scarica (entro l'1 %) in 5 RC.

La costante di tempo RC si misura in secondi se R e' espressa in Ω e C in F. Se il condensatore da 1 μF collegato a un resistore da 1 $k\Omega$ e' inizialmente caricato con un

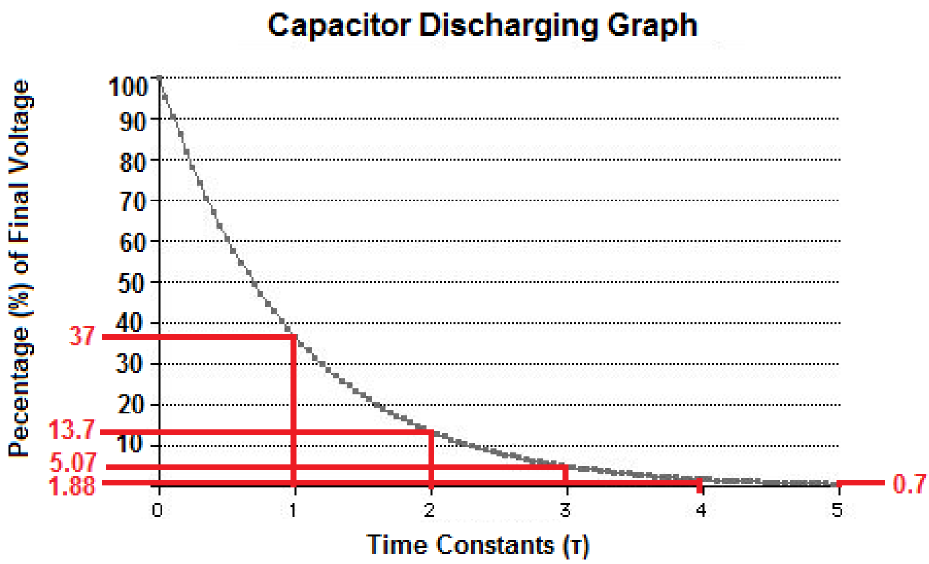

Figura 3: Scarica condensatore

potenziale di 1 V, si scarichera' con una corrente iniziale di I = V/R = 1 mA e una costante di tempo di 0.1 ms.

Ora aggiungiamo una batteria che fornisce V_i in entrata nel circuito e un interruttore, e misuriamo la tensione in uscita $V(t)$, in parallelo al condensatore e in serie al resistore.

$$C\frac{dV(t)}{dt} = I = \frac{V_i - V(t)}{R}$$

La soluzione e' $V(t) = V_i + Ae^{-t/RC}$, ove A e' determinata dalle condizioni iniziali, ovvero dal valore della tensione al tempo t = 0. Immaginiamo di chiudere il circuito connettendo la batteria a t=0. Per t = 0, $V(t = 0) = V_i + A = 0$, quindi la soluzione e'

$$V(t) = V_i(1 - e^{-t/RC})$$

.

Per t ≫ RC, il condensatore e' completamente carico, e $V_f = V_i$ costante. A grandi linee, il condensatore si carica entro l'1% del massimo in 5 tempi caratteristici ($t = 5 \cdot RC$).

Se invertiamo l'equazione possiamo esprimere il tempo necessario per raggiungere un determinato livello di V verso la sua tensione finale $V_f = V_i$:

$$t = RC\ ln\left(\frac{V_i}{V_i - V(t)}\right)$$

Se ora cambiamo V_i in un valore diverso e piu' basso, il condensatore si scarichera' con costante RC fino a raggiungere il nuovo valore V_i con andamento esponenziale $e^{-t/RC}$. Per esempio, un'onda quadra in input produce in output un'onda del tipo descritto in fig. **??**.

Cosa succede se la funzione V_i in input e' arbitraria? Allora la risposta sara' l'integrale della funzione in input pesata con l'esponenziale, in modo da mantenere memoria

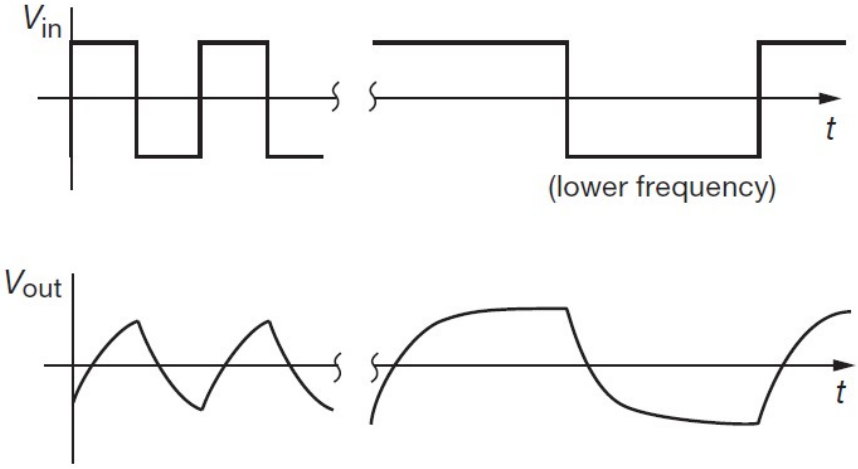

Figura 4: Enter Caption

dell'evoluzione passata, normalizzato su RC:

$$V(t) = \frac{1}{RC}\int_{-\infty}^{t} V_i(\tau)e^{-(t-\tau)/RC}d\tau$$

Di solito non ci si preoccupa troppo del comportamento del circuito in funzione del tempo ma delle frequenze, e ci si interessa particolarmente alle componenti in frequenze che sopravvivono alla presenza di un circuito RC.

1.4.1 Differenziatori o derivatori

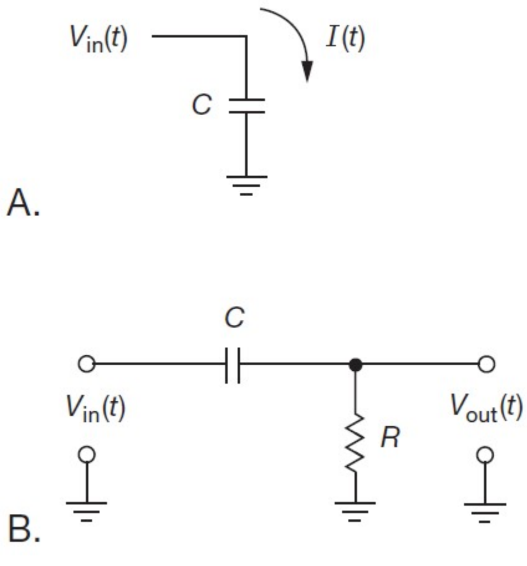

Figura 5: A. Differenziatore ideale perfetto. B. Differenziatore approssimato.

Prendiamo il circuito $A.$ in alto in Fig. 5: dalla definizione della capacita', dovremmo avere che $I_C = C\ dV_{in}/dt$, ma nella realta' non passa corrente a valle del condensatore, quindi non possiamo usare l'output. Aggiungiamo dunque una piccola resistenza per rilevare la corrente fuori dal condensatore (circuito $B.$ in fig. 5). Ora potremo vedere la risposta del circuito, ma la risposta sara' condizionata dal fatto che la tensione ai capi non e' piu' la tensione iniziale. Il differenziatore sara' quindi approssimato. La tensione ai capi di C infatti e' la differenza $V_{in} - Vout$, e R scarica la C con una corrente che e' $I = V/R$. Di conseguenza:

$$I = C\frac{d}{dt}(V_{in} - V) = \frac{V}{R} \tag{6}$$

che si puo' scrivere anche come:

$$\frac{dV_{in}}{dt} - \frac{dV}{dt} = \frac{V}{RC} \tag{7}$$

Se scegliamo R e C abbastanza piccole da avere $dV/dt \ll dV_{in}/dt$, allora

$$C\frac{dV_{in}}{dt} \simeq \frac{V}{R} \tag{8}$$

e quindi

$$V(t) = RC\frac{d}{dt}V_{in}(t) \tag{9}$$

ovvero otteniamo in uscita una tensione che e' proporzionale alla derivata temporale della tensione in entrata, da cui il nome di differenziatore. Dal punto di vista delle frequenze del segnale, possiamo notare che la frequenza di cutoff 1/RC deve essere grande ripetto a quella del segnale in entrata: in tal modo tutta la tensione in entrata appare ai capi della C la tensione su R e' quasi tutta dovuta alla corrente, che la derivata della tensione in input.

Notiamo che questo circuito e' un derivatore soprattutto nella fase in cui la velocita' di crescita di V e' molto piu' lenta della velocita' di crescita di V_{in}. Per RC grandi, la V cresce molto lentamente. V_{in} con brusche crescite saranno ben differenziate. *Per tenere la variazione di tensione in uscita molto piu' piccola di quella in entrata dobbiamo avere un prodotto RC molto piccolo.*

1.4.2 Integratori

Il circuito con C e R invertiti e' mostrato in Fig. 6. La tensione ai capi di R e' $V_{in} - V$, la tensione ai capi di C e' V, quindi la corrente fornita a C e' I = C dV/dt, che e' anche la corrente che attraversa R, quindi:

$$I = C\frac{dV}{dt} = \frac{V_{in} - V}{R} \tag{10}$$

Se teniamo la tensione in uscita molto piu' piccola di quella in entrata, ponendo un RC molto grande e un t molto lungo, allora

$$\frac{dV}{dt} \simeq \frac{V_{in}}{RC} \tag{11}$$

e quindi

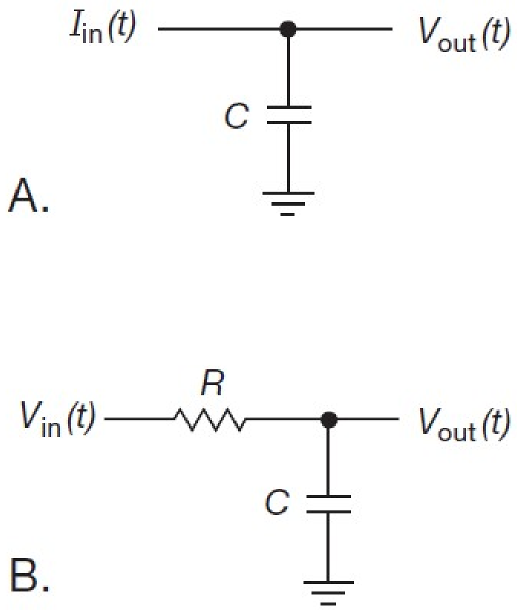

Figura 6: A. Integratore ideale perfetto. B. Integratore approssimato.

$$V(t) = \frac{1}{RC}\int^{t} V_{in}(t)dt + costante \tag{12}$$

da cui il nome di *integratore* dato al circuito: la risposta del circuito e' l'integrale della funzione del segnale in entrata a meno di una costante. Questo tipo di integratore e' efficace soprattutto per $V \gg Vin$, per esempio nella fase iniziale di crescita. Per una funzione d'onda quadra, la prima parte sara' una rampa effettiva come dovrebbe essere l'integrale di una costante, poi comincia a deviare. Stessa cosa quando torna a zero: l'integrale scende linearmente, poi devia.

1.5 Diodi

Resistori, condensatori e induttori sono componenti lineari. Anche i reattivi, cioe' condensatori e induttori, sono lineari.

Il diodo e' un dispositivo non lineare passivo a due terminali. Il suo principio di funzionamento sara' estensivamente trattato nel prosieguo del corso, ma anticipiamo ora alcuni comportamenti.

Si rappresenta col simbolo del triangolo che punta a una linea perpendicolare alla punta. E' caratterizzato da una curva tensione corrente di questo tipo: se si alimenta con tensione positiva, presenta corrente elevatissima molto presto. A tensione negativa invece una corrente piccola e costante fino a un aumento improvviso.

Il verso della freccia punta alla corrente in polarizzazione diretta (ovvero con alimentazione positiva).

Per esempio se c'e' una corrente di 10 mA nel circuito che sta scorrendo dall'anodo al catodo, l'anodo e' a 0.6V piu' positivo del catodo. Se si polarizza inversamente, la corrente che scorre in direzione opposta e' quasi nulla, fino a quando si alimenta al punto di rottura.

Il diodo non ha una resistenza interna, e non puo' essere semplificato col teorema di Thevenin.

1.5.1 Applicazioni: raddrizzatori

Con un diodo in serie a una sorgente di tensione alternata, solo la parte positiva del segnale sinusoidale passa. Con un raddrizzatore a ponte a onda intera: ci sono sempre due diodi in serie all'ingresso, per ogni polarita del segnale. A questo punto pero' il raddrizzatore e' solo un lasciapassare, non mantiene un livello costante come ci piacerebbe. Per fare cio' bisogna connettere un condensatore verso terra, che si carica ad ogni ciclo positivo ma non si scarica al negativo, vista la presenza dei diodi.

1.5.2 Applicazioni: filtraggio alimentazione

Nella pratica le forme d'onda rettificate non sono molto utili perche sono a polarita' unica, si', ma hanno grandi oscillazioni (*ripple*) periodiche della tensione attorno al valore stabile.

Per smussare l'oscillazione bisogna colelgare un condnsatore di valore relativamente grande tra i due poli, detta Capacita' di filtro: esso si carica fino alla tensione d'uscita di picco durante la condizione di diodo e fornisce la corrente in uscita tra un ciclo di carica e l'altro. Il diodo evita che il condensatore si carichi all'indietro attraverso la sorgente alternata. Il condensatore e' un dispostivi per il deposto di energia.

Il valore del condesatore e' scelto in modo che $R_{carico}C \gg 1/f$ dove qui f e' la frequenza dei ripple.

Si puo' calcolare la tensione dei ripple quando e' piccola rispetto alla tensione continua.

Il carico fa si' che il condensatore si scarichi un po' tra un cicol e l'altro. Se si assume che la corrente sul carico rimane costante si ha

$$I = C\frac{dV}{dt}$$

e quindi

$$\Delta V = \frac{I}{C}\Delta t$$

Sostituendo 1/f a Δt (o 1/2f per il raddrizzamento a onda intera) in prima approssimazione otteniamo per la semionda:

$$\Delta V = \frac{I_{carico}}{fC}$$

E per l'onda intera:

$$\Delta V = \frac{I_{carico}}{2fC}$$

E' un'approssimazione perche il C comincia caricarsi di nuovo dopo meno di un semiciclo, ma viste le tolleranze nei valori delal resistenza si puo' mantenere questa assunzione conservativa per Δt.

1.6 Filtri

I circuiti contenenti anche condensatori e induttori sono piu' complessi di quelli con soli resistori in quanto il loro comportamento dipende dalla frequenza. Tali componenti sono *reattivi* e quindi corrompono la forma d'onda per esempio delle onde quadre. Inoltre anche semplici funzioni, come il rapporto di un partitore di tensione, sara' dipendente dalla frequenza dell'onda in entrata se contiene almeno un condensatore o induttore.

L'uscita di un circuito lineare, pilotato da una sinusiode a una certa frequenza *f*, e' anch'essa una sinusioide alla stessa frequenza, al piu' con ampiezza e fase variate. E' comodo studiare la risposta del circuito a una funzione in ingresso sinusoidale a singola frequenza. Si puo' poi variare tale frequenza e compilare un grafico della risposta espressa come rapporto tra uscita e ingresso.

Si puo' generalizzare la legge di Ohm cone l'impedenza al posto della resistenza: i resistori mantengono la Resistenza con I e V in fase, mentre i condensatori e gli induttori sono reattivi e prensentano quindi una reattanza *X*, e hanno corrente e tensione sempre sfasati di 90^o.

In generale la tensione e la corrente in un determinato punto avranno una relazione di fase in qualche modo intermedia, descritta da un'impedenza complessa.

quaderno viola

1.6.1 Impedenza

I circuiti con conduttori (C) e induttori (L) sono piu' complicati di quelli con soli Resistori perche' la risposta di questi elementi dipende dalla frequenza f, ovvero da $\omega = 2\pi f$.

- per esempio, un **partitore di tensione** con C o L ha un rapporto di partizione che dipende da f
- questi componenti corrompono alcune forme d'onda, come le onde quadre

ma:

- tali circuiti sono comunque **lineari**: l'ampiezza in uscita cresce come l'ampiezza in ingresso
- hanno una particolarita' importante: un circuito lineare pilotato da sinusoide $V(t) = sin 2\pi f t$ ha una risposta a sua volta sinusoidale con la stessa frequenza f

Per questo conviene studiare i circuiti lineari attraverso la loro risposta a un segnale sinusoidale a una singola frequenza, chiedendosi come l'ampiezza e la fase dipendano dalla V in ingresso, anche se il circuito non era stato pensato o costruito per operare con segnali sinusoidali. Quello che entra nel circuito e' raramente completamente previsto, infatti, e saperne la risposta alle diverse frequenze e' un passo importante della sua caratterizzazione.

Quando si ha a che fare con L e C si deve generalizzare il concetto di resistenza con quello di *impedenza Z*, in quanto L e C sono elementi **reattivi**, ovvero hanno V e I sfasate di 90^o.

- **L** e **C** hanno **reattanza *X***
- **R** ha **resistenza *R***

Un circuito misto ha comportamento misto, descritto dall'*impedenza complessa*

$$Z = R \; + \; jX$$

di cui la Resistenza e' la parte reale e la Reattanza la parte immaginaria.

1.6.2 Analisi in frequenza

Un circuito pilotato da generazione di tensione $V(t) = V_0 \; sen \; \omega t$, produce una corrente

$$I(t) = C\frac{dV}{dt} = C\omega V_0 cos \; \omega t$$

cioe' una corrente di ampiezza $\omega C V_0$ con la fase che anticipa quella della tensione in ingresso di 90^o (si noti il cos invece del sen). Se consideriamo solo le ampiezze e trascuriamo le fasi (e quindi i seni e coseni),

$$I = \frac{V}{1/\omega C} = \frac{V}{1/2\pi f C}$$

Il termine a denominatore e' come una R che dipende dalla frequenza, ma sfasa la corrente di 90^o (vedi fig. 7). Esempio: un $C = 1\mu F$ ai capi della rete elettrica a 115 V (rms), 60 Hz,

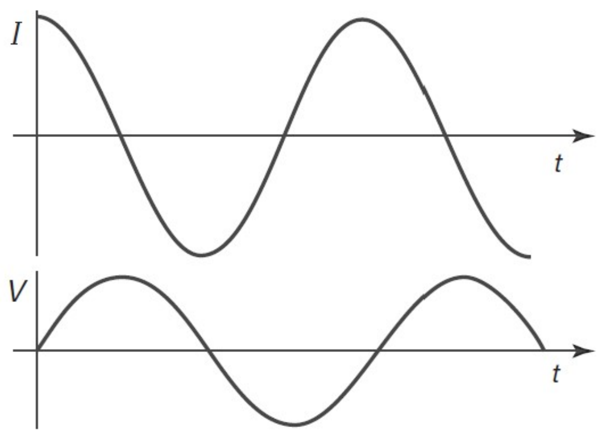

Figura 7: Sfasamento tra tensione ai capi di un condensatore e corrente prodotta dalla capacita' per reazione. Si noti lo sfasamento di 90^o.

assorbe una corrente di ampiezza rms

$$I = \frac{115}{1/(2\pi \times 60 \times 10^{-6})} = 115 \times 43194 \times 10^{-6} = 43.4mA(rms)$$

Notiamo che

$$\frac{|V|}{|I|} = \frac{1}{\omega C}$$

termine che possiamo associare a quella che sarebbe una resistenza. Si chiama *reattanza* e ha simbolo X. Per un condensatore, la reattanza e' X_C:

$$X_C = \frac{1}{\omega C}$$

quindi una capacita maggiore ha reattanza minore. Ha senso: per caricare una capacita' doppia a pari di velocita' di variazione di tensione e' necessaria una corrente doppia, ovvero la reattanza e' minore: $I = C\ dV/dt$. Anche per la frequenza, la reattanza cala al crescere della frequenza: raddoppiando la frequenza ad ampiezza di V costante, raddoppia la velocita' di variazione della tensione percio' si richiede il doppio della corrente, quindi meta' della reattanza. Si puo' dire che un condensatore e' una resistenza dipendente dalla *f*.

Filtro passa-basso RC (approssimato) Riprendiamo quindi il circuiti visti prima con R e C e trattiamoli in funzione delle frequenze. Il filtro passa basso con R e C verso massa, e' passa-basso perche lascia passare le basse frequenze e blocca le alte frequenze. Se immaginate come un partitore di tensione, il ramo inferiore del partitore (C) ha una reattanza decrescente al crescere della frequenza, quindi V_{out}/V_{in} decresce in modo corrispondente:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{X_C}{R + X_C} = \frac{1/\omega C}{R + 1/\omega C} = \frac{1}{1 + \omega RC}$$

Cosa otteniamo? Per frequenze piccole la reattanza del condensatore e' molto alta, quindi e' come un partitore con resistore piccolo sopra a uno piu' grande, e lascia passare tutta la tensione. Ad alte frequenze la reattanza e' bassa, quindi il partitore lascia passare poco. La frequenza di "cambio" o di transiszione e' $\omega_0 = 1/RC$. A tale frequenza il rapporto approssimato

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} \sim 1/2$$

Filtro passa-alto RC (approssimato) Allo stesso modo ma scambiando R e C nel partitore di prima, abbiamo:

$$\frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{R + X_C} = \frac{R}{R + 1/\omega C} = \frac{\omega RC}{\omega RC + 1}$$

e ora al crescere della frequenza cresce la V output mentre si abbatte per le basse frequenze.

Questi circuiti approssimati falliscono nel predire qualunque cosa sugli sfasamenti di questo circuito. La fase di segnale in uscita e' 90^o alle alte frequenze per progressivamente scendere a 45^o alla frequenza di taglio ω_o, e a 0^o per basse frequenze.

Condensatori di blocco Si vuole far passare una banda di frequenze di segnale bloccando la componente continua: passa-alto RC con ω_o appropriata. Per esempio, ho un amplificatore audio in cui voglio far passare da 20 Hz a 20 kHz senza attenuazione. Voglio bloccare tutto sotto i 20 Hz, quindi $t = RC = 1/\omega_{min} = 1/2\pi f_{min} = 30\ ms$ per circa $f_{min} = 5\ Hz$.

Da RC possiamo ora scegliere R e C, R deve avere un carico ragionevole, cioe' non cosi' piccola da essere faticosa da pilotare e non cosi' grande da rendere il circuito capace di captare segnali da altri circuiti. Ricordiamo che una R di carico, ovvero percepita dalla sorgente di tensione come resistenza verso massa, risulta in parallelo con la resistenza interna (verso massa) dell'alimentatore. Se la R di carico e' piu' bassa della resistenza interna, diventa dominante, e agisce come un partitore di tensione con R_2 piu' bassa, andando ad attenuare la tensione erogata. La R di carico deve essere abbastanza grande. 10 $k\Omega$ e' un valore molto usato nel campo audio, quindi 3.3 μF si accoppia bene. Lo stadio successivo dovrebbe avere resistenza di ingresso molto maggiore di 10 $k\Omega$ per evitare effetti di caricamento sull'uscita del filtro, e il circuito pilota (quindi a monte) dovrebbe essere in gradi dpilotare tale carico di 10 $k\Omega$ senza attenuazione di ampiezza, per evitare che il filtro possa caricare la sorgente del segnale.

Per evitare distorsioni nel campo del tempo, incurvamenti e sovraelongazioni, in caso stiamo accoppiando impulsi o onde quadre, possiamo scegliere una costante di tempo τ molto maggiore del periodo T dell'onda $\tau = RC \gg T$. L'incurvamento risultante risulta di circa T/τ.

1.6.3 Tensioni e correnti nel campo complesso

Nonstante la linearita' del circuito con R, C e L rimanga valida anche quando entra in gioco uno sfasamento, dobbiamo trovare una generalizzazione dei concetti di tensione, corrente e resistenza che salvi la legge di Ohm nonostante le fasi cambino. Potremmo scrivere esplicitamente ampiezza e sfasamento di V e I, per esempio $V(t) = 15.4sen(320t + 0.40)$ ma esiste un modo piu' semplice. Basta rappresentare V e I con numeri complessi, sommarli e sottrarli. Dobbiamo trovare una conversione *reale* ai loro valori misurati.

Ricordiamo che stiamo usando I e V sinusoidali a una singola frequenza.

Impedenza e reattanza L'impedenza e' una resistenza generalizzata a tutti i componenti lineari (resistori, capacitori e induttori). I resistori presentano tensione e corrente sempre in fase, e sono *resistivi*, ovvero possiedono una *resistenza*. Capacitori e induttori presentano corrente e tensione sempre sfasati di 90^o, e si dicono quindi *reattivi*, ovvero possiedono una *reattanza*. In generale un circuito che combina elementi resistivi e reattivi avra' tensione e corrente in qualche relazione intermedia di fase, descritta dall'impedenza complessa, somma di resistenza e reattanza, ovvero:

$$\mathbf{Z} = R + jX$$

Legge di Ohm generalizzata Esprimendo **I** e **V** in forma complessa, possiamo scrivere l'impedenza come loro rapporto, ottenendo una versione generalizzata della Legge di Ohm:

$$\mathbf{V} = \mathbf{IZ}$$

dove la tensione **V** applicata ai capi di un circuito con impedenza **Z** produce una corrente **I**.

L'impedenza segue le regole della resistenza per quanto riguarda le somme di impedenze in serie e parallelo. Le impedenze complesse di resistenze, condensatori e induttori sono rispettivamente:

$$Z_R = R$$

$$Z_C = -j/\omega C = 1/j\omega C$$
$$Z_L = j\omega L$$

Potenza nei circuiti reattivi La potenza istantanea e' sempre data dal prodotto $P = IV$ per ogni elemento circuitale, ma quando ci sono componenti reattivi in cui V e I non sono semplicemente proporzionali, non si possono solo moltiplicare le ampiezze. Per esempio con uno sfasamento di 90^o tra I e V di un circuito con un condensatore, la potenza media e' nulla: nel primo e terzo quarto del periodo, viene fornita potenza al condensatore che si carica; la sua energia immagazzinata aumenta, e la potenza e' la velocita' di variazione dell'energia. Durante il secondo e quarto quarto la potenza fornita e' negativa, si sta scaricando. Questo e' sempre vero per i componenti puramente reattivi (induttori, condensatori e loro combinazioni).

Si determina la potenza media integrando il prodotto sul tempo trascorso e normalizzando, come al solito:

$$P = \frac{1}{T}\int_0^T V(t)I(t)dt$$

oppure piu' semplicemente considerando il prodotto dell'uno per il complesso coniugato dell'altro e prendendone la parte reale.:

$$P = \Re(\mathbb{V}\mathbb{I}^*) = \Re(\mathbb{V}^*\mathbb{I})$$

Con **V** e **I** le ampiezze rms complesse. Prendiamo per esempio una sinusioide con rms = 1 V che pilota un condensatore.

$$\mathbb{V} = 1$$
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{-j/\omega C} = j\omega C$$

Allora

$$P = \Re(\mathbf{VI^*}) = \Re(-j\omega C) = 0$$

Prendiamo ora un circuito RC

$$\mathbf{Z} = R - \frac{j}{\omega C}$$
$$\mathbf{V} = V_0$$
$$\mathbf{I} = \frac{\mathbf{V}}{\mathbf{Z}} = \frac{V_0}{R - (j/\omega C)} = \frac{V_0[R + (j/\omega C)]}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}$$
$$P = \Re(\mathbf{VI^*}) = \frac{V_0^2 R}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)}$$

Si usa considerare il rapporto tra potenza e il prodotto delle ampiezze di V e I, ovvero dei loro moduli:

$$|\mathbf{V}||\mathbf{I}| = \frac{V_0^2}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)]^{1/2}}$$

e si chiama tale rapporto *fattore di potenza*:

$$\frac{P}{|\mathbf{V}||\mathbf{I}|} = \frac{R}{R^2 + (1/\omega^2 C^2)]^{1/2}}$$

In questo caso il fattore di potenza e' il coseno dell'angolo di fase tra V e I e va da 0 (puramente reattivo) a 1 (piramente resistivo). Se c'e' componente reattivo, il fattore e' minore di 1. Esso tende all'unita', e la potenza dissipata a

$$V^2/R$$

per capacita' grandi o alle alte frequenze dove la reattanza del condensatore e' molto minore di R.

Partitori e filtri I partitori di tensione si possono generalizzare sostituendo alla resistenza l'impedenza totale, e scrivendo, sempre in notazione complessa:

$$I = \frac{V_{in}}{Z}$$

$$Z_{totale} = Z_1 + Z_2$$

$$V_{out} = IZ_2 = V_{in}\frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Cio' porta a trattare facilmente i filtri passa-basso e passa-alto in maniera non approssimata.

Filtro passa-alto Il circuito in fig. 5 si puo' descrivere in campo complesso come:

$$\mathbf{V}_{out} = \mathbf{V}_{in}\frac{R}{R - j/\omega C} = \mathbf{V}_{in}\frac{R(R + j/\omega C)}{R^2 + 1/\omega^2 C^2}$$

Se interessa solo il modulo e non la fase, si puo' tornare al campo reale:

$$V_{out} = (\mathbf{V}_{out}\mathbf{V}^*_{out})^{1/2} = V_{in}\frac{R}{[(R^2 + 1/\omega^2 C^2)]^{1/2}}$$

Si noti l'analogia con il partitore resistivo.

Filtro passa-basso Per il circuito in fig. 2 si ottiene invece

$$V_{out} = V_{in}\frac{1}{(1 + \omega^2 R^2 C^2)^{1/2}}$$