Corso di GEOMETRIA 1 - Prova scritta
A.A. 2023/2024 - 30 gennaio 2024
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome	Corso di Laurea

(1) Si consideri la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$ e sia

$$U := \{Y \in M_2(\mathbb{R}) \mid A \cdot Y = Y \cdot A\} \subset M_2(\mathbb{R}).$$

(a) **(2 punti)** Si dimostri che U è un sottospazio vettoriale di $M_2(\mathbb{R})$.
(b) **(2 punti)** Si determini una base $\mathcal{B}_U$ di U e la sua dimensione.
(c) **(2 punti)** Si prolunghi $\mathcal{B}_U$ a una base di $M_2(\mathbb{R})$.

(2) Usando il Teorema della dimensione e il Teorema di struttura per Applicazioni Lineari definire, se esistono, in ciascuno dei tre casi seguenti, applicazioni lineari che soddisfino le condizioni indicate, motivando esplicitamente il rispetto di tali condizioni:

(a) **(2 punti)** $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva;

(b) **(2 punti)** $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ suriettiva e tale che $\ker(g) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$;

(c) **(2 punti)** $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ iniettiva e tale che $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$.

(3) **(6 punti)** Si consideri il seguente sistema lineare dipendente dal parametro reale $\beta \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \beta x + y - z = \beta \\ 2y + z = 1 \\ x + \beta y - \beta z = 2\beta. \end{cases}$$

Si determinino i valori di β per cui il sistema lineare è compatibile.

(4) (a) **(4 punti)** Si dimostri che esiste un'applicazione lineare $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tale che $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ e tale che $\mathrm{Aut}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 - x_3 = 0 \right\}$ sia l'autospazio relativo all'autovalore 2.

(b) **(4 punti)** Si dimostri (senza usare matrici associate ad f) che una tale f è diagonalizzabile.

(5) Sia V uno spazio euclideo e sia $f : V \to V$ un endomorfismo ortogonale.

(a) **(2 punti)** Si dimostri che ogni autovalore λ di f soddisfa $|\lambda| = 1$.

(b) **(2 punti)** Si dimostri che ogni matrice $M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}(f)$ di f in una base ortonormale $\mathcal{B}$ è una matrice ortogonale.

(c) **(2 punti)** Si dimostri che $|\det f| = 1$.

(d) **(2 punti)** Si dimostri che autovettori relativi ad autovalori diversi di f sono tra loro ortogonali.