Tutorato di Fisica Generale

Lezione 1 - Soluzioni

Moto rettlineo uniforme

Esercizio 1. Il tempo t impiegato dalla luce a compiere $x = 1$ m è:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{1\ m}{3 \cdot 10^8\ m/s} \simeq 3.33 \cdot 10^{-9} s$$

Mentre la distanza x percorsa in $t = 1$ anno è data da:

$$x = v \cdot t = (3 \cdot 10^8\ m/s) \cdot (1 \text{ anno}) = (3 \cdot 10^8 \text{ m/s}) \cdot (365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ s}) \simeq 9.46 \cdot 10^{15} \text{ m}$$

Questa distanza è nota come anno luce ed è utilizzata come unità di misura per quantificare le distanze astronomiche.

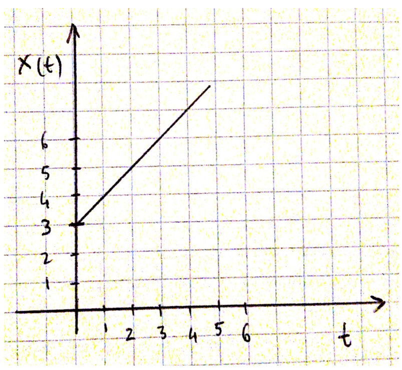
Esercizio 2. Ricordiamo l'espressione della legge oraria per il moto rettilineo uniforme:

$$x(t) = x_0 + vt$$

Dove x_0 è la posizione iniziale del corpo, v la sua velocità (costante nel tempo) e t il tempo.
Nel nostro caso, essendo $x_0 = 3\ m$ la posizione iniziale e $v = 1\ m/s$, sarà:

$$x(t) = 3 + t$$

Questa legge descrive la posizione x (espressa in metri) del corpo a qualsiasi istante t (in secondi) ed è rappresentata graficamente da una retta di intercetta x_0 e coefficiente angolare v:



Esercizio 3. Il grafico rappresenta una relazione lineare (una retta) tra la posizione x e il tempo t e descrive pertanto un moto rettilineo uniforme. L'intercetta è $x_0 = 10\ m$, mentre per trovare v prendiamo le coordinate di due punti a scelta, ad esempio A e B, e calcoliamo il coefficiente angolare come:

$$v = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{(20 - 10)\ m}{(3 - 0)\ s} = 3.33\ m/s$$

La legge oraria sarà dunque:

$$x(t) = 10 + 3.33\ t$$

Esercizio 4. Scriviamo innanzitutto le leggi orarie per i due treni. Per il treno A, che parte all'origine del rettilineo:

$$x_A(t) = 70\ t$$

con x espresso in km e t in ore. Per il treno B, che parte dall'estremo del rettilineo ($x_{0,B} = 435\ km$) e si muove nel verso opposto ad A, abbiamo invece:

$$x_B(t) = 435 - 75\ t$$

Per trovare l'istante in cui A e B si incontrano, basta imporre la condizione $x_A = x_B$ e risolvere rispetto al tempo t:

$$x_A = x_B \rightarrow$$

$$\rightarrow 70\ t = 435 - 75\ t$$

Da cui:

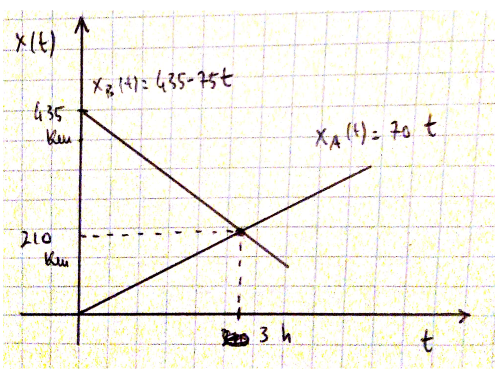
$$t = \frac{\cancel{435}}{\cancel{145}}\ h = 3\ h$$

Quindi A e B si incontrano dopo 3 ore dalla loro partenza. Un modo per trovare la posizione (rispetto all'origine) del loro punto di incontro è quello di sostituire tale valore di t all'interno della legge oraria del treno A:

$$x_A(t = 3) = 70 \cdot 3 = 210$$

Ciò vuol dire che i due treni si incontrano a 210 km rispetto alla stazione di partenza di A.

Dal punto di vista grafico-matematico, trovare il punto di incontro di A e di B vuol dire trovare l'intersezione delle due rette che ne rappresentano il moto. Per cui la soluzione sarà illustrata graficamente da:



Esercizio 1. Per trovare l'accelerazione a cui sono sottoposti gli elettroni, una formula che ci torna utile è quella che lega le velocità iniziale e finale, la distanza d percorsa e l'accelerazione stessa (senza, dunque, bisogno di conoscere il tempo t). Si trova quindi direttamente:

$$a = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2d} = \frac{(8 \cdot 10^4)^2 - (2 \cdot 10^3)^2}{2 \cdot 0.03}\ m/s^2 = 1.07 \cdot 10^{11}\ m/s^2$$

Una volta nota l'accelerazione, calcoliamo il tempo t impegato ad attraversare la regione attraverso la formula che lega le due velocità iniziale e finale e l'accelerazione:

$$v_2 = v_1 + at \ \longrightarrow$$

$$\longrightarrow t = \frac{v_2 - v_1}{a} = \frac{8 \cdot 10^4 - 2 \cdot 10^3}{1.07 \cdot 10^{11}}\ s = 7.3 \cdot 10^{-7}\ s$$

Esercizio 2. Ricordiamo la legge oraria per il moto uniformemente accelerato:

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Nel nostro caso, possiamo semplificarla ponendo $x_0 = 0$ (l'automobile parte nell'origine del sistema di riferimento) e $v_0 = 0$ (l'automobile parte da ferma). Quindi:

$$x = \frac{1}{2} a t^2 \ \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{2000\ m}{25^2\ s^2} = 3.2\ m/s^2$$

Da cui calcoliamo la velocità finale v come:

$$v = \cancel{v_0} + at = 3.2 \cdot 25\ m/s = 80\ m/s$$

Che equivale a:

$$v = \frac{80\ m}{s} = \frac{80 \cdot 10^{-3}\ km}{1/60/60\ h} = 80 \cdot 3.6\ km/h = 288\ km/h$$

Esercizio 3. Definiamo t come la somma del tempo t_1 impiegato dal sasso a cadere e il tempo t_2 impiegato dal suono a percorrere l'altezza h del pozzo e raggiungere la superficie:

$$t = t_1 + t_2 \tag{1}$$

Troviamo allora un modo per legare h a t_1 e t_2 utilizzando le leggi orarie. Per il sasso usiamo quella del moto uniformemente accelerato, dato che si tratta di un corpo che cade con accelerazione costante pari a quella di gravità $g = 9.8\ m/s^2$. Poichè il sasso parte da fermo, vale semplicemente:

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \tag{2}$$

Mentre il suono viaggia a velocità costante, per cui vale la legge oraria del moto rettilineo uniforme:

$$h = v t_2 \tag{3}$$

Eguagliando la (2) e la (3) si trova:

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = vt_2$$

Da cui, usando la (1):

$$\frac{1}{2}gt_1^2 = (t - t_1)v$$

Risolvendo l'equazione di secondo grado in t_1, ricaviamo $t_1 = 4.5\ s$.

L'altezza del pozzo è dunque:

$$h = \frac{1}{2}gt_1^2 \simeq 99\ m$$

Esercizio 4. Nei tratti ① e ③, la velocità è in relazione lineare con il tempo, pertanto il moto è uniformemente accelerato. Nel tratto ②, invece, la velocità è costante nel tempo e ciò vuol dire che il moto è rettilineo uniforme.

- tratto ①: ricaviamo l'accelerazione dalla relazione:

$$v_B = v_A + a_1(t_B - t_A)$$

dove v_B e v_A sono rispettivamente la velocità nei punti B e A, a_1 l'accelerazione di questo primo tratto ① e $t_B - t_A$ l'intervallo di tempo. Da cui:

$$a_1 = \frac{v_B - v_A}{t_B - t_A} = \frac{5}{4}\ m/s^2 = 1.25\ m/s^2$$

Ricaviamo lo spazio percorso dalla legge oraria del moto uniformemente accelerato:

$$x_B = x_A + v_A t + \frac{1}{2}a_1 t_B^2$$

Poichè $x_A = 0$ e $v_A = 0$, si trova:

$$x_B = \frac{1}{2}(1.25\ m/s^2) \cdot 4^2\ s^2 = 10\ m$$

- tratto ②: applichiamo la legge oraria per il moto rettilineo uniforme:

$$x_C = x_B + v_C(t_C - t_B) = (10 + 5 \cdot 2)\ m = 20m$$

- tratto ③: analogamente al tratto ①, calcoliamo prima l'accelerazione a_3:

$$v_D = v_C + a_3(t_D - t_C) \ \longrightarrow$$

$$\longrightarrow a_3 = \frac{v_D - v_C}{t_D - t_C} = -1.25\ m/s^2$$

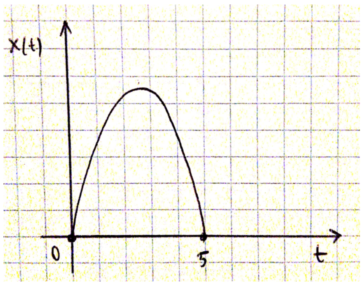
Il segno meno conferma quello che ci aspettavamo dal grafico, e cioè che il corpo sta decelerando. La lunghezza totale percorsa sarà:

$$x_D = x_C + v_C(t_D - t_C) + \frac{1}{2}a_3(t_D - t_C)^2 = (20 + 5 \cdot 4 - \frac{1}{2} \cdot 1.25 \cdot 4^2)\ m = 30\ m$$

Esercizio 5. Abbiamo la legge oraria nella forma $x(t) + x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$ e dobbiamo ricavare l'espressione per la velocità in un moto uniformemente accelerato. Per farlo, basta derivare l'espressione della $x(t)$ rispetto al tempo:

$$v(t) = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{dt}} = 5 - 2t$$

Graficamente, il moto è rappresentato dalla parabola in figura.
Essa ha soluzioni in $t = 0$ e $t = 5$ s e un massimo in $t = 2.5$ s.



Esercizio 6. Come abbiamo visto nell'Esercizio 1, la formula che ci torna più utile in questo caso è quella che lega velocità iniziale (v_0), velocità finale ($v = 0$ perchè nell'istante in cui raggiunge l'altezza massima, il sasso è fermo), altezza percorsa h, l'accelerazione (uguale a $-g$) e che non contiene il tempo. Da essa ricaviamo direttamente:

$$h = \frac{v^2 - v_0^2}{-2g} = \frac{(70/3.6)^2}{2 \cdot 9.8}\ m = 19.29\ m$$

Ricaviamo infine il tempo usando la seguente:

$$v = v_0 - gt \ \longrightarrow t = v_0/g = (70/3.6)/9.8\ s = 1.98\ s$$

Vettori e operazioni con i vettori

Esercizio 1.

- I moduli dei due vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ sono dati dalla somma in quadratura delle loro componenti in x e in y:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{3^2 + 9^2} \simeq 9.49$$

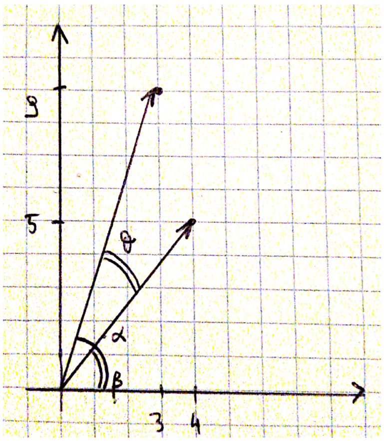
$$|\vec{b}| = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} = \sqrt{4^2 + 5^2} \simeq 6.40$$

- Per quanto riguarda il modulo delle componenti s_x e s_y del vettore somma, esse si ottengono sommando separatamente le componenti x e y dei vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$:

$$s_x = a_x + b_x = 3 + 4 = 7$$
$$s_y = a_y + b_y = 9 + 5 = 14$$

E dunque il modulo:

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^2 + s_y^2} = \sqrt{7^2 + 14^2} \simeq 15.65$$



- Per trovare l'angolo θ compreso fra i vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$ c'è più di un modo. Possiamo calcolare separatamente gli angoli α e β che i singoli vettori formano rispetto all'asse x e poi sottrarli (dal disegno si vede che $\theta = \alpha - \beta$), oppure possiamo calcolare θ conoscendo il valore del prodotto scalare (vedremo questo metodo nel punto successivo).
  Troviamo quindi α applicando le regole di trigonometria alle componenti di $\vec{a}$:

$$\alpha = \arctan \frac{a_y}{a_x} = \arctan \frac{\cancel{9}}{\cancel{3}} = \arctan 3 \simeq 71.6°$$

  Alternativamente, conoscendo il modulo, potevamo calcolarlo come:

$$\alpha = \arccos \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \arccos \frac{3}{9.49} \simeq 71.6°$$

$$\alpha = \arcsin \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \arcsin \frac{9}{9.49} \simeq 71.6°$$

  Analogamente, β è dato da una delle seguenti:

$$\beta = \arctan \frac{b_y}{b_x} = \arctan \frac{5}{4} \simeq 51.4°$$

$$\beta = \arccos \frac{b_x}{|\vec{b}|} = \arccos \frac{4}{6.40} \simeq 51.4°$$

$$\beta = \arcsin \frac{b_y}{|\vec{b}|} = \arcsin \frac{5}{6.40} \simeq 51.4°$$

  Calcoliamo infine θ:

$$\theta = \alpha - \beta \simeq 20.2°$$

- Dal momento che ora conosciamo il valore dell'angolo compreso tra i due vettori, calcoliamo il prodotto scalare $\vec{a} \cdot \vec{b}$ come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\theta = 9.49 \cdot 6.40 \cdot \cos(20.2°) = 57$$

  Nota. Potevamo calcolare il prodotto scalare senza conoscere l'angolo compreso:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y = 3 \cdot 4 + 5 \cdot 9 = 12 + 45 = 57$$

Da cui era possibile ricavare l'angolo θ usando la formula inversa:

$$\cos\theta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{57}{9.49 \cdot 6.40} = 0.938 \rightarrow$$

$$\rightarrow \theta = \arccos(0.938) \simeq 20.2°$$

- Il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$ è un vettore di modulo:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = ab\sin\theta = 9.49 \cdot 6.40 \cdot \sin(20.2°) \simeq 21$$

Ed il verso, dato dalla regola della mano destra, è entrante nel foglio.

Alternativamente, potevamo calcolarlo direttamente dal metodo del determinante:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = a_x b_y - a_y b_x = 3 \cdot 5 - 9 \cdot 4 = 15 - 36 = -21$$

Il segno meno indica che è diretto lungo l'asse z di un sistema di riferimento destrorso, nel verso opposto alla direzione dell'asse (in altre parole, entrante nel foglio).

Esercizio 2. Imponiamo le tre condizioni date dal problema e usiamole per ricavare le componenti di $\vec{c}$. La prima equazione è:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \longrightarrow a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z = 0$$

da cui

$$c_x - \frac{1}{2}c_y + c_z = 0 \tag{4}$$

L'altra condizione invece è:

$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 0 \longrightarrow c_x b_x + c_y b_y + c_z b_z = 0$$

Che, sostituendo le componenti note $b_x = 0$ e $b_y = 0$, diventa:

$$c_z = 0 \tag{5}$$

Infine l'ultima condizione:

$$\vec{c} \cdot \vec{c} = 1 \longrightarrow c_x c_x + c_y c_y + c_z c_z = 1$$

E cioè:

$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = 1 \tag{6}$$

Inserendo l'equazione (5) nella (4) ricaviamo allora:

$$c_x - \frac{1}{2}c_y = 0 \longrightarrow c_y = 2c_x$$

La quale, inserita assieme alla (5) nella (6), diventa:

$$c_x^2 + (2c_x)^2 = 1 \longrightarrow$$

$$\longrightarrow 5c_x^2 = 1 \longrightarrow c_x = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

Da cui $c_y = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.
Quindi, il vettore $\vec{c}$ può essere definito in due modi:

$$\vec{c} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

oppure

$$\vec{c} = \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}, -\frac{2}{\sqrt{5}}, 0\right)$$

Esercizio 3. Il prodotto scalare si calcola come:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 3 - 4 \cdot 2 = -4$$

Per calcolare invece il modulo del prodotto vettoriale, usiamo il metodo del determinante. Costruiamo una matrice 3×3, che chiamiamo A, in cui la prima riga è data dai versori $\hat{x}, \hat{y}$ e $\hat{z}$, la seconda dalle componenti di $\vec{a}$ e la terza dalle componenti di $\vec{b}$:

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ 2 & 2 & -4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

il prodotto vettoriale $\vec{a} \times \vec{b}$ è uguale al determinante di A, che si calcola come:

$$\det A = (2 \cdot 2 + 4 \cdot 3)\hat{x} - (2 \cdot 2 - 4)\hat{y} + (2 \cdot 3 + 2)\hat{z} = 16\hat{x} + 8\hat{z}$$

Quindi il risultato del prodotto vettoriale è il vettore $\vec{a} \times \vec{b} = (16, 0, 8)$. Esso è diretto lungo il piano perpendicolare a quello formato dai vettori $\vec{a}$ e $\vec{b}$.