ISBN 978-88-08-18229-6

per $0 \leq t \leq 3{,}0 \cdot 10^{-3}$, con t in secondi. Trovate i moduli (a) dell'impulso impresso alla palla, (b) della forza media esercitata dal piede del calciatore sulla palla durante il periodo di contatto, (c) della forza massima esercitata dal piede del calciatore sulla palla durante il periodo di contatto e (d) della velocità della palla immediatamente dopo la perdita di contatto con il piede del calciatore.

67. Due blocchi di masse 1,0 kg e 3,0 kg sono legati tra loro mediante una molla e sono inizialmente fermi su una superficie priva d'attrito. Si imprime loro una certa velocità in modo che si avvicinino; il blocco minore ha ora velocità di 1,7 m/s verso il centro di massa, che resta a riposo. Che velocità ha l'altro blocco?

68. Un vagone merci di massa $3{,}18 \cdot 10^4$ kg urta un altro vagone fermo sui binari. Si agganciano fra loro, e il 27,0 % dell'energia cinetica iniziale è trasformata in calore, rumore, vibrazioni e altre forme di energia. Trovate la massa del secondo vagone.

69. Un uomo di massa 75 kg sta su un carrello di massa 39 kg che viaggia alla velocità di 2,3 m/s. A un tratto l'uomo salta giù con velocità orizzontale zero rispetto al terreno. Di quanto fa così variare la velocità del carrello?

70. Nella figura 9.56 una palla di massa $m = 60$ kg viene spinta alla velocità $v_i = 22$ m/s nella canna di una pistola a molla di massa $M = 240$ kg, che è ferma su una superficie priva di attrito. La palla rimane incastrata nella canna nel punto di massima compressione della molla. Non si ha perdita di energia per attrito. (a) Qual è la velocità della pistola dopo che la palla si è arrestata? (b) Quale frazione dell'energia cinetica iniziale della palla viene immagazzinata nella molla?

Figura 9.56 Problema 70.

71. Un nucleo radioattivo, inizialmente fermo, decade trasformandosi in un nucleo diverso ed emettendo un elettrone e un neutrino, in direzioni fra loro perpendicolari. (Il *neutrino* è una particella elementare.) La quantità di moto dell'elettrone è $(-1{,}2 \cdot 10^{-22}$ kg · m/s)**i**, quella del neutrino $(-6{,}4 \cdot 10^{-23}$ kg · m/s)**j**. Trovate (a) il modulo e (b) la direzione della quantità di moto del nucleo che rincula dopo il decadimento. (c) La massa del nucleo residuo è $5{,}8 \cdot 10^{-26}$ kg. Qual è la sua energia cinetica?

72. Un elettrone urta elasticamente un atomo di idrogeno inizialmente a riposo. (Tutti i movimenti avvengono su una stessa linea retta.) Quale percentuale dell'energia cinetica iniziale dell'elettrone è trasferita all'atomo di idrogeno? La massa di quest'ultimo è circa 1840 volte quella dell'elettrone.

73. Un razzo si sta allontanando dal sistema solare alla velocità di $6{,}0 \cdot 10^3$ m/s. Accende i motori che espellono il propellente alla velocità relativa di $3{,}0 \cdot 10^3$ m/s. La massa del razzo in quell'istante è $4{,}0 \cdot 10^4$ kg e la sua accelerazione è 2,0 m/s^2. (a) Qual è la spinta dei motori? (b) Quanto propellente consuma, in kg/s, durante la spinta?

74. Un blocco di massa $m_1 = 6{,}6$ kg è posato su un lungo tavolo privo di attrito, che va a finire contro una parete. Un altro blocco, di massa m_2, collocato fra il primo e la parete come nella figura 9.57, è messo in moto verso m_1 a velocità costante v_2. Ammettendo che tutte le collisioni siano perfettamente elastiche, trovate il valore di m_2 per il quale i due blocchi si muovono alla stessa velocità dopo che m_2 ha urtato una volta m_1 e una volta la parete. Supponete che la parete abbia massa infinita.

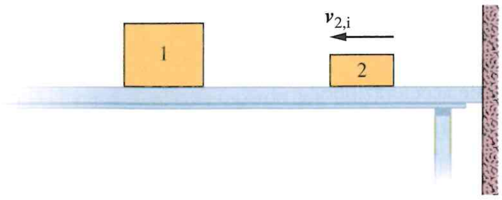


Figura 9.57 Problema 74.

75. Durante una missione verso la Luna occorre aumentare di 2,2 m/s la velocità della sonda spaziale, mentre sta viaggiando alla velocità di 400 m/s rispetto alla Luna. La velocità relativa di espulsione dei prodotti di combustione è di 1000 m/s. Che frazione della massa iniziale della sonda occorre bruciare ed espellere per raggiungere lo scopo?

76. Una palla di massa 140 g alla velocità di 7,8 m/s colpisce un muro perpendicolarmente e rimbalza con la medesima velocità in modulo. L'urto dura 3,80 ms. Determinare i moduli (a) dell'impulso e (b) della forza media applicata dalla palla sul muro.

77. Una palla 1 con velocità iniziale di 10 m/s entra in collisione elastica con altre due palle, 2 e 3, identiche e ferme, a contatto fra loro, allineate in direzione perpendicolare alla velocità della prima, come appare nella figura 9.58. La prima palla è diretta esattamente verso il punto di contatto delle altre due, e ogni moto avviene in assenza di attrito. Trovate (a) modulo e (b) direzione della velocità dopo l'urto della palla 2. Trovate (c) modulo e (d) direzione della velocità dopo l'urto della palla 3. Trovate (e) modulo e (f) direzione della velocità dopo l'urto della palla 1. (*Suggerimento*: in assenza di attrito gli impulsi sono tutti orientati come la linea che unisce i centri delle due palle che si urtano, normalmente alle superfici di contatto.)

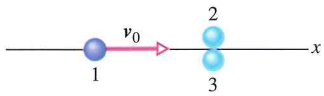


Figura 9.58 Problema 77.

78. Nella disposizione di figura 9.21 una palla da biliardo colpisce di striscio, alla velocità di 2,2 m/s, un'altra palla identica ferma. Dopo l'urto si rileva che una delle due ha velocità di 1,1 m/s in una direzione che forma un angolo di 60° con quella primitiva della palla giocata. Trovate (a) il modulo e (b) la direzione della velocità dell'altra palla. (c) In base a questi dati può trattarsi di una collisione anelastica?

79. In una partita a biliardo la palla giocata ne colpisce un'altra che era ferma. Dopo l'urto, la prima corre alla velocità di 3,50 m/s su una linea che forma un angolo di 22,0° con la direzione originaria del suo moto, mentre la seconda assume una velocità di 2,00 m/s. Trovate (a) l'angolo fra la direzione del moto della seconda palla e la direzione originaria del moto della prima e (b) la velocità iniziale della prima palla. (c) Si ha conservazione dell'energia cinetica (ipotizzando la mancanza di rotazioni)?

80. (a) Quanto dista dal centro della Terra il centro di massa del sistema Terra-Luna? (Cercate nell'appendice C le masse della Terra e della Luna, e la loro distanza.) (b) Esprimete il risultato di (a) come frazione del raggio della Terra.

81. Un razzo di massa 6100 kg è pronto a essere lanciato verticalmente dalla superficie terrestre. Se la velocità all'ugello è 1200 m/s, quanto gas deve essere espulso ogni secondo affinché la spinta (a) sia uguale al peso del razzo, e (b) imprima al razzo un'accelerazione iniziale verso l'alto di 21 m/s^2?

82. Una stecca da biliardo colpisce una palla ferma con una forza media di 32 N per una durata di 14 ms. Sapendo che la massa della palla è di 0,20 kg, che velocità assume dopo l'impatto?

CAPITOLO 10

Rotazione

10.1 VARIABILI ROTAZIONALI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

10.01 Sapere che, quando tutte le parti di un corpo ruotano attorno a un asse fisso rimanendo solidali fra loro, quel corpo si dice rigido. Il presente capitolo tratta del moto di tali corpi.

10.02 Capire che la posizione angolare di un corpo rigido in rotazione è l'angolo formato da una linea di riferimento interna al corpo con un'altra linea di riferimento esterna.

10.03 Applicare la relazione tra lo spostamento angolare e le posizioni angolari iniziale e finale.

10.04 Applicare la relazione tra la velocità angolare media, lo spostamento angolare e l'intervallo di tempo in cui esso avviene.

10.05 Applicare la relazione tra l'accelerazione angolare media, la variazione di velocità angolare e l'intervallo di tempo in cui essa avviene.

10.06 Sapere che si assume positivo il verso di rotazione antiorario e negativo quello orario.

10.07 Calcolare, data la posizione angolare in *funzione del tempo*, la velocità angolare istantanea a un qualsiasi istante e la velocità angolare media tra due particolari istanti.

10.08 Determinare, dato il *grafico* che descrive la posizione angolare in funzione del tempo, la velocità angolare istantanea a un dato istante e la velocità angolare media tra due particolari istanti.

10.09 Riconoscere la differenza tra velocità angolare scalare e vettoriale.

10.10 Calcolare, data la velocità angolare in *funzione del tempo*, l'accelerazione angolare istantanea a un qualsiasi istante e la velocità angolare media tra due particolari istanti.

10.11 Determinare, dato il *grafico* che descrive la velocità angolare in funzione del tempo, l'accelerazione angolare istantanea a un dato istante e la velocità angolare media tra due particolari istanti.

10.12 Calcolare la variazione di velocità angolare di un corpo integrando la sua funzione accelerazione angolare rispetto al tempo.

10.13 Calcolare la variazione di posizione angolare di un corpo integrando la sua funzione velocità angolare rispetto al tempo.

Idee chiave

- Per descrivere la rotazione di un corpo rigido attorno a un asse fisso, chiamato asse di rotazione, stabiliamo una linea di riferimento fissa all'interno del corpo, perpendicolare all'asse e rotante in modo solidale col corpo. Misuriamo la posizione angolare θ di tale linea rispetto a una direzione fissa anch'essa perpendicolare all'asse di rotazione. Misurando θ in radianti, si ha

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(angoli misurati in radianti)},$$

ove s è la lunghezza dell'arco, sotteso dall'angolo θ, di una circonferenza di raggio r.

- L'unità di misura radiante è legata all'unità grado sessagesimale e all'unità angolo-giro dalla seguente relazione:

$$1 \text{ angolo-giro} = 360° = 2\pi \text{ rad}.$$

- Se un corpo ruota attorno a un asse variando la propria posizione angolare da θ_1 a θ_2, subisce lo spostamento angolare dato da

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1,$$

ove $\Delta\theta$ è positivo quando la rotazione è antioraria e negativo nel caso contrario.

- Se un corpo realizza uno spostamento angolare $\Delta\theta$ nell'intervallo di tempo Δt, la sua velocità angolare media $\overline{\omega}$ è

$$\overline{\omega} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}.$$

La velocità angolare istantanea ω, detta brevemente velocità angolare, è

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}.$$

Sia ω sia $\overline{\omega}$ sono vettori, il cui verso è determinato dalla regola della mano destra. Sono positivi per rotazioni orarie, negativi viceversa.

- Quando la velocità angolare di un corpo varia da ω_1 a ω_2 nell'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$, l'accelerazione angolare media $\overline{\alpha}$ del corpo è

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}.$$

L'accelerazione angolare (istantanea) $\overline{\alpha}$ del corpo è

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}.$$

Sia α sia $\overline{\alpha}$ sono vettori.

ISBN 978-88-08-18229-6

Figura 10.1 La pattinatrice artistica Sasha Cohen in moto (a) di pura traslazione e (b) di pura rotazione intorno a un asse verticale.

L'aspetto fisico

Preminente interesse della fisica – lo abbiamo detto – è il moto dei corpi. Finora però abbiamo esaminato solo moti di **traslazione**, cioè corpi che seguono traiettorie rettilinee o curvilinee, come quello in figura 10.1a. Dedichiamoci ora al moto di **rotazione**, quello di corpi che ruotano attorno a un asse, come in figura 10.1b.

Il numero di volte che incontriamo il moto rotatorio nella nostra vita quotidiana è incalcolabile. È presente in quasi tutte le macchine. Lo pratichiamo strappando la linguetta di una lattina di bibita. E ogni volta che andiamo in un parco di divertimenti paghiamo per provarne l'ebbrezza. La rotazione è insita in molte attività ricreative, come un tiro lungo al golf (la pallina deve ruotare per far sì che l'aria la sostenga maggiormente) o facendo un servizio «tagliato» al ping pong (la pallina ruotando incurva la sua traiettoria). La rotazione è anche responsabile di fenomeni di ben più seria portata, come il cedimento dei metalli nell'invecchiamento degli aeroplani.

Cominciamo il nostro approccio alla rotazione definendo le variabili che intervengono in tale tipo di moto, come abbiamo fatto nel capitolo 2 per il moto traslatorio. Come vedremo, le variabili che si presentano nel fenomeno della rotazione sono analoghe a quelle già viste per la traslazione lineare e, come nel capitolo 2, un importante caso è rappresentato dall'esistenza di un'accelerazione costante, qui di tipo angolare. Vedremo pure che la seconda legge di Newton ha la sua forma per il moto rotatorio, in cui la forza è sostituita da una nuova grandezza, detta *momento torcente*. Anche il lavoro e il teorema dell'energia cinetica sono concetti che si applicano al caso rotazionale, una volta avuta l'accortezza di sostituire alla massa la grandezza chiamata *momento d'inerzia*. In definitiva quasi tutto ciò che abbiamo appreso finora può essere applicato ai moti di rotazione, talora con le dovute modifiche.

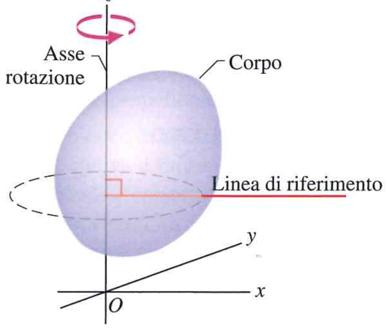
Attenzione. Nonostante molti dei concetti fisici esposti siano una ripetizione adattata di analoghi concetti precedenti, molti studenti trovano difficili questo capitolo e i seguenti. I docenti lo spiegano in molti modi ma due sono le ragioni che primeggiano: (1) abbiamo a che fare con una gran quantità di simboli, spesso rappresentati con lettere greche; (2) se da una parte i moti di traslazione ci sono perfettamente familiari (ci muoviamo con agilità attraversando stanze e percorrendo strade), non è altrettanto vero per i moti rotatori (è un motivo per cui molti sono disposti perfino a pagare per goderne nei parchi di divertimento!) Quando un problema vi si presenta come se parlasse una lingua diversa, provate sempre a cercare l'analogia con il moto lineare, quello visto nel capitolo 2. Se, ad esempio, trovandovi di fronte a una distanza *angolare*, questo vi confondesse, cancellate mentalmente l'aggettivo *angolare* e vedete se i concetti fisici e le notazioni espresse nel capitolo 2 vi aiutano nel capire il problema.

Variabili rotazionali

Tratteremo della rotazione di un corpo rigido intorno a un asse fisso. Un **corpo rigido** è un corpo capace di ruotare mantenendo tutte le sue parti reciprocamente vincolate tra di loro e conservando quindi la sua forma. Un **asse fisso** significa che la rotazione avviene attorno a un asse che non modifica la sua posizione. Sicché non esamineremo la rotazione di oggetti simili al Sole, perché il Sole – una palla di gas – non è affatto un corpo rigido. E nemmeno la rotazione di una palla da bowling che rotola verso i birilli: si tratta di un moto di *rotolamento*, ossia di una rotazione intorno a un *asse mobile* (un misto di rotazione e traslazione).

La figura 10.2 rappresenta un corpo rigido di forma qualunque in *rotazione pura intorno a un asse fisso*, chiamato **asse di rotazione**. Tutti i punti del corpo si muovono su circonferenze i cui centri giacciono sull'asse di rotazione, e i rispettivi vettori posizione descrivono tutti lo stesso angolo durante un certo intervallo di tempo. Confrontiamo questa descrizione con quella di un corpo rigido in moto di pura traslazione in una direzione fissa: in questo caso ogni punto del corpo si muove in linea retta e copre la stessa *distanza lineare* durante un certo intervallo di tempo. (Il confronto e l'analogia fra moto lineare e moto angolare sarà il motivo dominante di questo capitolo.)

Tratteremo ora, una alla volta, le grandezze angolari equivalenti a quelle lineari posizione, spostamento, velocità e accelerazione.



a linea di riferimento è solidale
ol corpo e normale all'asse di rotazione.
i serve per misurare la posizione
el corpo rotante rispetto a una direzione fissa

Figura 10.2 Un corpo rigido di forma qualsiasi in pura rotazione intorno all'asse z di un sistema di coordinate. La posizione della *linea di riferimento* rispetto al corpo rigido è arbitraria, ma la linea deve essere tracciata perpendicolarmente all'asse di rotazione. È fissa rispetto al corpo e ruota solidalmente con esso.

ISBN 978-88-08-18229-6

Posizione angolare

La figura 10.2 presenta anche una *linea di riferimento*, fissa rispetto al corpo e perpendicolare all'asse di rotazione, che ruota solidale con il corpo. Possiamo descrivere il moto del corpo rotante specificando la **posizione angolare** di questa linea, ossia l'angolo formato da questa linea rispetto a un asse di riferimento prefissato, che definisce la **posizione angolare zero**. Nella figura 10.3 la posizione angolare θ si misura rispetto all'asse x, e θ è dato da

$$\theta = \frac{s}{r}. \tag{10.1}$$

Qui s è la lunghezza dell'arco (ossia la distanza misurata sull'arco) della circonferenza descritta da un generico punto della linea di riferimento a partire dall'asse x, ed r è il raggio di quel cerchio.

Un angolo così definito è misurato in **radianti** (rad) piuttosto che in angoli giro o in gradi. Il radiante, essendo il rapporto fra due lunghezze, è un numero puro, cioè rappresenta la misura di una grandezza adimensionale. Poiché la circonferenza di raggio r ha lunghezza $2\pi r$, in un cerchio vi sono 2π radianti:

$$1 \text{ angolo giro} = 360° = \frac{2\pi r}{r} = 2\pi \text{ rad}, \tag{10.2}$$

e quindi

$$1 \text{ rad} = 57{,}3° = 0{,}159 \text{ angoli giro}. \tag{10.3}$$

L'angolo θ non si riazzera a ogni rotazione completa della linea di riferimento intorno all'asse di rotazione. Se essa compie due rotazioni, sarà $\theta = 4\pi$ rad.

Per un moto di pura traslazione nella direzione x, tutte le informazioni sul moto di un corpo in movimento sono racchiuse nella funzione $x(t)$: la sua posizione in funzione del tempo. Analogamente, per la rotazione pura, tutte le informazioni su un corpo in rotazione sono espresse dalla funzione $\theta(t)$: la posizione angolare della sua linea di riferimento in funzione del tempo.

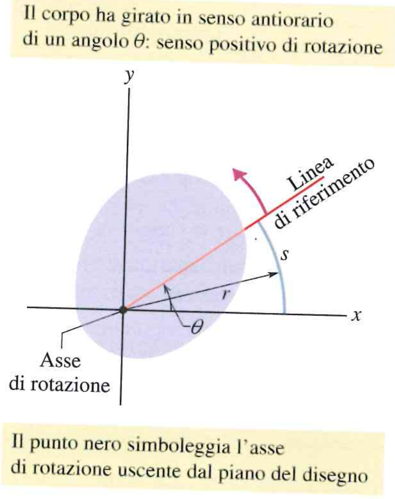


Figura 10.3 Sezione, vista dall'alto, del corpo rigido rotante della figura 10.2. Il piano della sezione è perpendicolare all'asse di rotazione. In questa posizione la linea di riferimento forma un angolo θ con l'asse x.

Spostamento angolare

Se il corpo della figura 10.3 ruota intorno al suo asse di rotazione come nella figura 10.4, variando la posizione angolare della sua linea di riferimento da θ_1 a θ_2, il corpo subisce uno **spostamento angolare** $\Delta\theta$ dato da

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1. \tag{10.4}$$

Questa definizione dello spostamento angolare è valida non soltanto per il corpo rigido nel suo complesso, ma anche *per ogni punto del corpo stesso*, perché ogni punto del corpo rigido occupa la stessa posizione in rapporto agli altri suoi punti.

Gli orologi ruotano nel verso negativo. Se un corpo è in moto di traslazione lungo un asse x, il suo spostamento può essere positivo o negativo, a seconda che il corpo si sposti nel verso delle x crescenti o decrescenti. Analogamente, lo spostamento angolare $\Delta\theta$ di un corpo rotante può essere positivo o negativo, secondo la seguente regola:

Se il corpo ruota nel verso degli angoli θ trigonometricamente crescenti (in senso antiorario, visto dall'osservatore, come nelle figure 10.3 e 10.4), lo spostamento angolare è positivo. Se ruota in senso contrario (in senso orario), è negativo.

Ricordatela così: le lancette dell'orologio ruotano nel verso negativo.

VERIFICA 1

Si abbia un disco capace di ruotare sul suo asse centrale come una giostra. Quali delle seguenti coppie di valori per la posizione angolare iniziale e finale, rispettivamente, danno luogo a uno spostamento angolare negativo: (a) –3 rad, 5 rad; (b) –3 rad, –7 rad; (c) 7 rad, –3 rad?

(b), (c)

 ISBN 978-88-08-18229-6

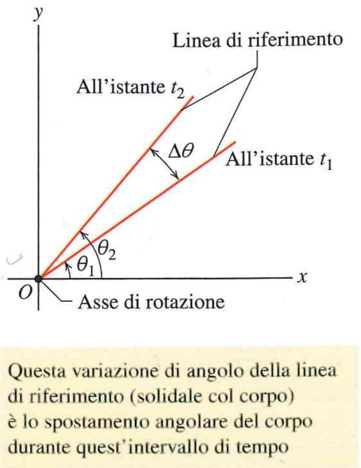


Figura 10.4 La linea di riferimento del corpo rigido delle figure 10.2 e 10.3 si trova nelle posizioni angolari θ_1 al tempo t_1 e θ_2 a un tempo successivo t_2. La quantità $\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1$ rappresenta lo spostamento angolare effettuato durante l'intervallo di tempo $\Delta t = t_2 - t_1$. Nel disegno il corpo non è raffigurato.

Velocità angolare

Supponete che il corpo rotante della figura 10.4 sia nella posizione angolare θ_1 all'istante t_1, e nella posizione angolare θ_2 all'istante t_2. Definiamo **velocità angolare media** del corpo

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}, \tag{10.5}$$

ove $\Delta\theta$ è lo spostamento angolare compiuto nell'intervallo di tempo Δt. (ω è la lettera greca omega minuscola.)

La **velocità angolare (istantanea)** ω, nella quale ci imbatteremo molto spesso, è il limite dell'equazione 10.5 quando si fa tendere a zero Δt:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}. \tag{10.6}$$

Se conosciamo $\theta(t)$, calcolandone la derivata rispetto al tempo possiamo trovare la velocità angolare ω.

Questa definizione della velocità angolare è valida non soltanto per il corpo rigido nel suo complesso, ma anche *per ogni punto del corpo stesso*. La più comune unità di misura della velocità angolare è il radiante al secondo (rad/s). Un'altra unità di misura non coerente con il SI, ma molto usata in motoristica, è il giro al minuto (giri/min): i vecchi dischi fonografici in vinile ruotavano per esempio a 45 giri/min. È facile calcolare che 1 rad/s = 30/π giri/min.

Se una particella è in moto di traslazione lungo un asse x, la sua velocità lineare v può essere positiva o negativa, a seconda che si muova nel verso delle x crescenti o decrescenti. Analogamente, la velocità angolare ω di un corpo rigido rotante può essere positiva o negativa, a seconda che il corpo ruoti nel verso delle θ crescenti (in senso antiorario), o decrescenti (in senso orario). Alla velocità angolare, come vedremo fra poco, si può associare un vettore, che si chiama anch'esso, usualmente, velocità angolare e si rappresenta con la medesima lettera ω.

Accelerazione angolare

Se la velocità angolare di un corpo rotante non è costante, si dice che il corpo ha un'*accelerazione angolare*. Siano ω_2 e ω_1 le velocità angolari di un corpo rigido agli istanti t_2 e t_1 rispettivamente. L'**accelerazione angolare media** del corpo rotante è così definita:

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \tag{10.7}$$

ove $\Delta\omega$ è la variazione della velocità angolare nell'intervallo di tempo Δt. L'**accelerazione angolare (istantanea)** α, che incontreremo pure frequentemente, è il limite dell'equazione 10.7 quando si fa tendere a zero Δt:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}. \tag{10.8}$$

Questa definizione dell'accelerazione angolare è valida non soltanto per il corpo rigido nel suo complesso, ma anche *per ogni punto del corpo stesso*. La più comune unità di accelerazione angolare è il radiante al secondo quadrato (rad/s²).

ISBN 978-88-08-18229-6

PROBLEMA SVOLTO 10.1 Velocità angolare tramite la posizione angolare

Il disco di figura 10.5a gira attorno all'asse centrale come una giostra. La posizione angolare $\theta(t)$ della linea di riferimento sul disco indicata in figura è data da

$$\theta = -1{,}00 - 0{,}600t + 0{,}25t^2, \qquad (10.9)$$

con t in secondi, i coefficienti numerici tali che θ risulta in radianti e lo zero angolare come indicato in figura. Se volete, potete tradurre tutto ciò nella notazione del capitolo 2 cancellando mentalmente la specificazione *angolare* e sostituendo l'angolo θ con la lunghezza x. Otterrete l'equazione che dà la posizione in funzione del tempo per il moto unidimensionale trattato nel capitolo 2.

(a) Riportate su grafico la posizione angolare del disco dall'istante $t = -3{,}0$ s all'istante $t = 5{,}4$ s. Individuate la posizione angolare del riferimento per $t = -2{,}0$ s, 0 s e 4,0 s; trovate anche i punti di intersezione con l'asse delle ascisse.

SOLUZIONE

L'idea chiave consiste nell'identificare la posizione angolare del disco con la posizione angolare della linea di riferimento, data dall'equazione 10.9. Ci basta quindi riportare l'andamento di questa equazione, illustrato nella figura 10.5b. Per $t = -2{,}0$ s, abbiamo

$$\theta = -1{,}00 - (0{,}600)(-2{,}0) + (0{,}250)(-2{,}0)^2 =$$

$$= 1{,}2 \text{ rad} = 1{,}2 \text{ rad}\,\frac{360°}{2\pi \text{ rad}} = 69°.$$

Ciò significa che a $t = -2{,}0$ s la linea di riferimento sul disco ha compiuto una rotazione, a partire dalla posizione angolare zero, di 1,2 rad, ovvero 69° (in senso antiorario dato che θ risulta positivo). Il punto 1 segnato nella figura 10.5b indica questa posizione angolare della linea di riferimento.

In maniera analoga troviamo, per $t = 0$, $\theta = -1{,}00$ rad $= -57°$, indicato dal punto 3. E per $t = 4{,}0$ s, $\theta = 0{,}60$ rad $= 34°$ (punto 5). Per trovare l'intersezione con l'asse delle ascisse poniamo $\theta = 0$, corrispondente al passaggio della linea di riferimento dalla posizione angolare zero (punti 2 e 4).

(b) In quale istante t_{min} la posizione angolare raggiunge il valore minimo mostrato nella figura 10.5b? Quanto vale questo angolo minimo?

SOLUZIONE

L'idea chiave consiste nel cercare il valore di minimo ponendo uguale a zero la derivata prima della funzione.

La derivata di $\theta(t)$ è

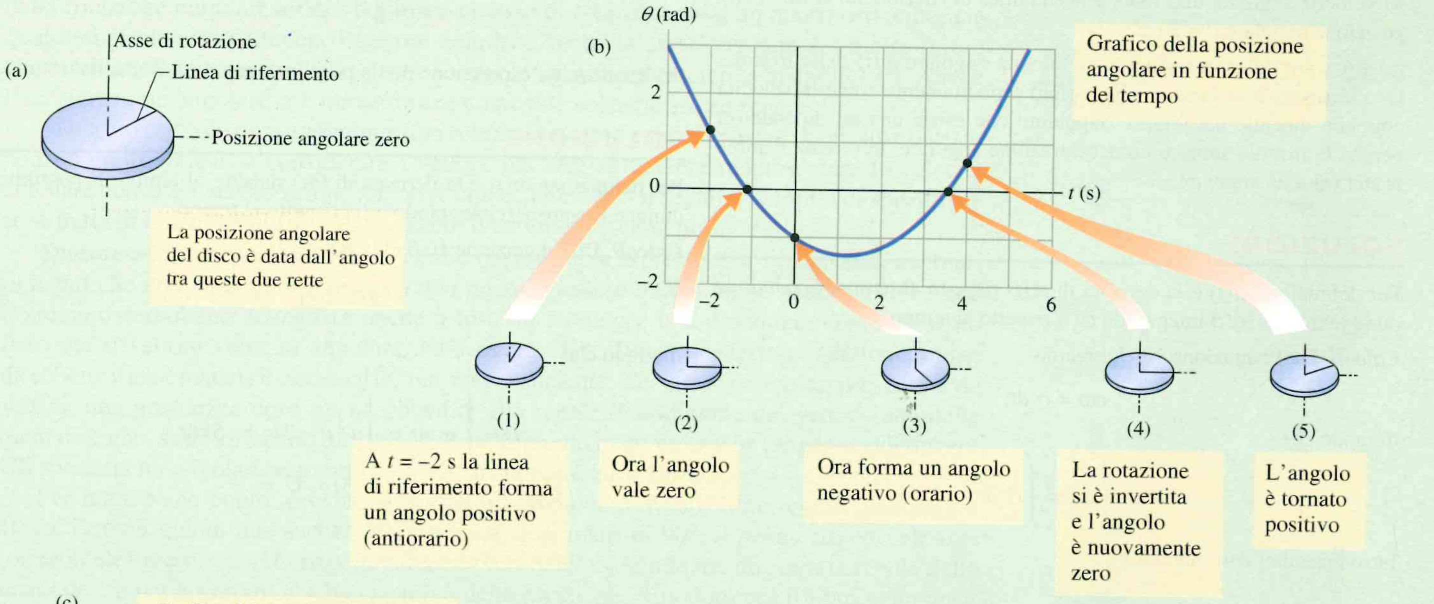
$$\frac{d\theta}{dt} = -0{,}600 + 0{,}500t. \qquad (10.10)$$

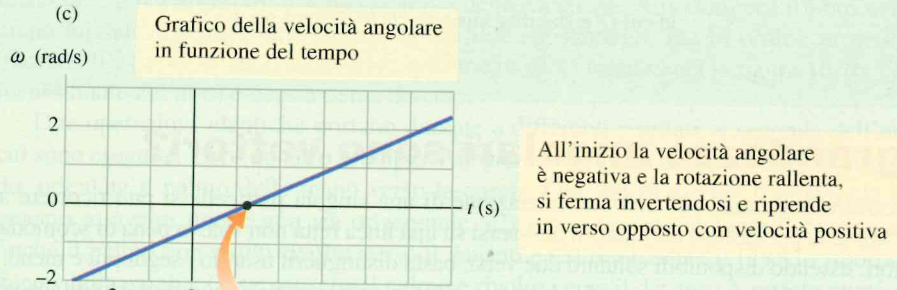
Eguagliando a zero e risolvendo rispetto a t otteniamo

$$t_{min} = 1{,}20 \text{ s}.$$

Per ottenere il valore minimo dell'angolo introduciamo ora questo valore t_{min} nella (10.9):

$$\theta = -1{,}36 \text{ rad} \approx -77{,}9°.$$





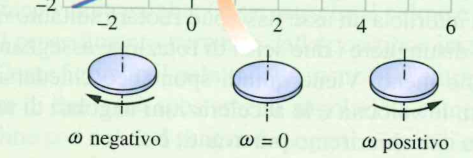


Figura 10.5 Problema svolto 10.1. (a) Un disco in rotazione. (b) Diagramma della posizione angolare del disco $\theta(t)$. Cinque disegni suggeriscono la posizione angolare della linea di riferimento sul disco per cinque punti della curva. (c) Grafico della velocità angolare del disco $\omega(t)$. Valori positivi di ω corrispondono a rotazioni in senso antiorario e viceversa.

ISBN 978-88-08-18229-6

Il *minimo* di $\theta(t)$ corrisponde alla rotazione *oraria massima* del disco a partire dalla posizione angolare zero, un punto vicino a quello rappresentato dal punto 3.

(c) Riportate su grafico la velocità angolare ω in funzione del tempo dall'istante $t = -3{,}0$ s all'istante $t = 6{,}0$ s. Indicate il verso di rotazione e il segno di ω a $t = -2{,}0$ s e 4,0 s, oltre che a t_{min}.

SOLUZIONE

L'idea chiave è di considerare che, secondo l'equazione 10.6, la velocità angolare ω è uguale a $d\theta/dt$ espressa dall'equazione 10.10. Si ha quindi

$$\omega = -0{,}600 + 0{,}500t. \tag{10.11}$$

Il grafico di questa funzione $\omega(t)$ è illustrato nella figura 10.5c. Dato che questa funzione è lineare, il grafico è rappresentato da una linea retta. La sua pendenza è 0,500 rad/s^2 e l'intercetta con l'asse verticale (non indicata) si ha per $y = -0{,}600$ rad/s.

Introducendo nella (10.11) il valore $t = -2{,}0$ s, otteniamo

$$\omega = -1{,}6 \text{ rad/s}.$$

Il segno meno indica che in questo momento il disco sta girando in senso orario, come suggerisce il disegno in basso a sinistra di figura 10.5c.

Introducendo nella (10.11) il valore $t = 4{,}0$ s, otteniamo

$$\omega = +1{,}4 \text{ rad/s}.$$

Il segno positivo sta a indicare che il disco in questo momento gira in senso antiorario (disegno in basso a destra di figura 10.5c).

Per t_{min} sappiamo già che $d\theta/dt = 0$. Quindi deve essere pure $\omega = 0$. Ciò significa che per il disco, quando la linea di riferimento raggiunge il valore minimo di θ nella figura 10.5b, si ha un istante di arresto come suggerito dal disegno centrale nella figura 10.5c. Sul grafico di ω in funzione di t dato nella figura 10.5c, tale arresto momentaneo è indicato dal punto con ordinata zero in cui si passa da una velocità angolare negativa (oraria) a una positiva (antioraria).

(d) In base ai risultati ottenuti descrivete ora il moto del disco in tutto l'intervallo di tempo considerato.

Descrizione. Alla prima osservazione del disco ($t = -3{,}0$ s) esso ha una posizione angolare positiva, sta ruotando in senso orario e sta rallentando. Si ferma quando raggiunge la posizione angolare $\theta = -1{,}36$ rad e poi comincia a girare in senso antiorario, sicché la posizione angolare a un certo punto diventa di nuovo positiva.

PROBLEMA SVOLTO 10.2 Velocità angolare tramite l'accelerazione angolare

Un bambino avvia una trottola con accelerazione angolare data da

$$\alpha = 5t^3 - 4t,$$

in cui i coefficienti numerici sono tali che α risulta in radianti al secondo quadrato quando t è espresso in secondi. All'istante $t = 0$ la trottola ha velocità angolare di 5 rad/s e la sua linea di riferimento si trova alla posizione angolare $\theta = 2$ rad.

(a) Ricavare un'espressione della velocità angolare $\omega(t)$ della trottola. Ossia, trovare una formula che indichi esplicitamente come la velocità angolare dipende dal tempo. Sappiamo che esiste una tal dipendenza perché la trottola subisce un'accelerazione angolare, ovverosia cambia la sua velocità angolare.

SOLUZIONE

Per definizione $\alpha(t)$ è la derivata di $\omega(t)$ rispetto al tempo. È possibile dunque trovare $\omega(t)$ integrando $\alpha(t)$ rispetto al tempo.

Calcoli. Dall'equazione 10.8 abbiamo

$$d\omega = \alpha\, dt,$$

di modo che

$$\int d\omega = \int \alpha\, dt.$$

Introducendo i dati otteniamo

$$\omega = \int (5t^3 - 4t)\, dt = \tfrac{5}{4}t^4 - \tfrac{4}{2}t^2 + C.$$

Al fine di determinare la costante d'integrazione C, osserviamo che $\omega = 5$ rad/s per $t = 0$. Assumendo tali valori si ha

$$5 \text{ rad/s} = 0 - 0 + C,$$

da cui ricaviamo $C = 5$ rad/s. Dunque

$$\omega = \tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5.$$

(b) Ricavare un'espressione per la posizione angolare $\theta(t)$ della trottola.

SOLUZIONE

Per definizione $\omega(t)$ è la derivata di $\theta(t)$ rispetto al tempo. È possibile dunque trovare $\theta(t)$ integrando $\omega(t)$ rispetto al tempo.

Calcoli. Dall'equazione 10.6 abbiamo

$$d\theta = \omega\, dt,$$

di modo che

$$\begin{aligned}\theta &= \int \omega\, dt = \int \left(\tfrac{5}{4}t^4 - 2t^2 + 5\right) dt = \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + C' = \\ &= \tfrac{1}{4}t^5 - \tfrac{2}{3}t^3 + 5t + 2,\end{aligned}$$

in cui C' è stabilita sapendo che $\theta = 2$ rad per $t = 0$.

Le grandezze angolari sono vettori?

Per descrivere posizione, velocità e accelerazione di una singola particella si può ricorrere ai vettori. Ma se la particella è obbligata a muoversi su una linea retta non vale la pena di scomodare i vettori: essendo disponibili soltanto due versi, basta distinguerli usando i segni più e meno.

Allo stesso modo, un corpo rigido che ruota intorno a un asse fisso può ruotare soltanto in senso antiorario o orario, e anche qui possiamo distinguere i due sensi di rotazione assegnando loro, rispettivamente, il segno più e il segno meno. Viene quindi spontaneo chiedersi: "Possiamo trattare come vettori gli spostamenti, le velocità e le accelerazioni angolari di un corpo rotante?" La risposta, con qualche riserva che chiariremo più avanti, è sì.

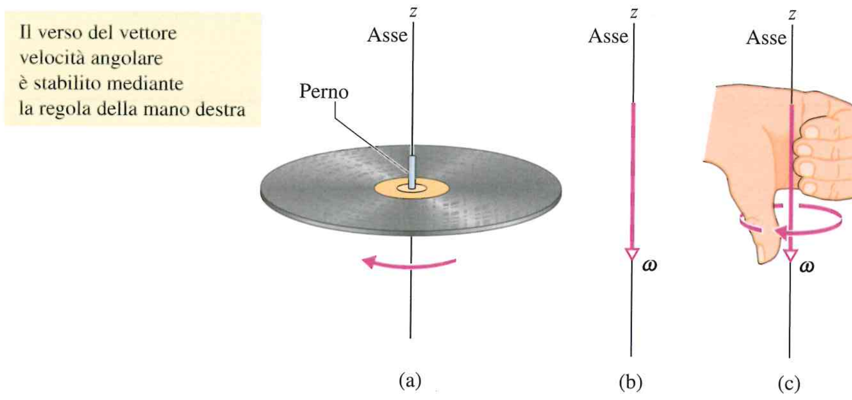


Figura 10.6 (a) Un disco fonografico ruota intorno a un asse verticale coassiale al suo perno. (b) La velocità angolare del disco rotante può essere rappresentata dal vettore $\boldsymbol{\omega}$, che giace sull'asse ed è rivolto verso il basso. (c) Si constata che la direzione del vettore velocità angolare è rivolta verso il basso applicando la regola della mano destra. Avvicinando la mano destra al bordo del disco rotante con le dita incurvate rivolte nella direzione del moto, il pollice steso ad angolo retto indica la direzione del vettore $\boldsymbol{\omega}$.

Velocità angolari. Consideriamo la velocità angolare. Nella figura 10.6a è rappresentato un disco che ruota su un perno fisso. Il disco ha una velocità di rotazione ω che è fissa (ad esempio 33,33 giri/min) e un senso di rotazione anch'esso fisso (orario per un osservatore che lo vede dall'alto). Per convenzione, rappresentiamo la sua velocità angolare con un vettore $\boldsymbol{\omega}$ diretto secondo l'asse di rotazione, come nella figura 10.6b; la sua lunghezza rappresenta l'intensità ω della velocità angolare secondo una scala appropriata (per esempio ponendo 1 cm uguale a 10 giri/min). Per assegnare il verso del vettore $\boldsymbol{\omega}$ usiamo la **regola della mano destra**, illustrata nella figura 10.6c. Mettete la mano destra vicino al disco rotante, con le dita piegate e orientate *nel senso del moto* (cioè con le unghie corrispondenti alla punta della freccia) della periferia del disco: il pollice, portato ad angolo retto rispetto alle altre dita, indicherà il verso positivo del vettore velocità angolare. Se il disco inverte il senso di rotazione, per la regola della mano destra il pollice punterà nella direzione opposta.

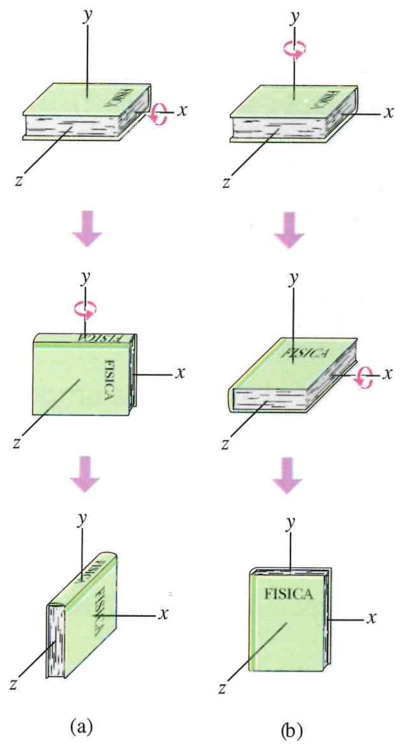
Non è facile abituarsi a «vedere» le grandezze angolari come vettori. Ci si aspetterebbe, d'istinto, che *qualcosa* si muovesse *nella direzione indicata* dal vettore. Ma non è così. Al contrario, qualcosa, cioè un corpo rigido, ruota *intorno* a quella direzione. Nel mondo della rotazione pura, un vettore definisce un asse di rotazione, non un punto verso il quale qualcosa si muove. Tuttavia, il vettore definisce anche le caratteristiche del moto. E, ciò che è più importante, obbedisce a tutte le regole sui vettori enunciate al capitolo 3. Anche l'accelerazione angolare $\boldsymbol{\alpha}$ è un vettore, e come tale segue le stesse regole.

In questo capitolo considereremo solo rotazioni attorno a un asse fisso. In questo contesto non saremo obbligati a considerare i vettori, ma sarà sufficiente rappresentare la velocità angolare con ω e l'accelerazione angolare con α, lasciando al segno il compito di specificare se si tratta di rotazione oraria (segno meno) o antioraria (segno più).

Spostamenti angolari. Veniamo ora alle riserve sopra espresse. Gli *spostamenti* angolari (a meno che non siano molto piccoli) *non possono* essere trattati come vettori. Perché no? Potremmo certamente assegnare anche a loro un modulo e una direzione, come abbiamo fatto per il vettore velocità angolare della figura 10.6. Tuttavia questa condizione, come direbbero i matematici, è necessaria, ma non sufficiente. Per poter essere rappresentata da vettori, una grandezza deve *anche* obbedire alle regole di addizione dei vettori, una delle quali dice che, se si sommano due vettori, è indifferente in quale ordine vengano addizionati. Gli spostamenti angolari non sono in grado di superare questa prova.

Per rendervene conto, provate a posare sul pavimento questo libro, come nella figura 10.7a. Dategli quindi due successivi spostamenti angolari di 90°, il *primo* rispetto all'asse (orizzontale) x, e il *secondo* rispetto all'asse (verticale) y, usando nei due casi la regola della mano destra per accertare il senso positivo della rotazione. Riportato poi il libro nella posizione iniziale, eseguite nuovamente questi due spostamenti, ma in ordine inverso: *prima* intorno all'asse y, *poi* intorno all'asse x. Come mostra chiaramente la figura 10.7b, l'orientamento finale del libro è decisamente diverso.

Due operazioni identiche portano dunque a differenti risultati, a seconda dell'ordine in cui sono eseguite. Ecco un altro esempio. Abbassate il braccio destro e, tenendo il polso rigido, orientate il palmo della mano verso la coscia. Ora, senza ruotare il polso, (1) alzate il braccio in avanti finché non sia orizzontale, (2) girate orizzontalmente il braccio a destra finché il palmo non risulti rivolto verso il davanti e (3) riabbassate il braccio riportandolo a fianco della gamba. Osservate che il palmo è rivolto verso il davanti. A questo punto ripetete il procedimento partendo dalla posizione iniziale, ma invertendo l'ordine dei tre movimenti. Come è rivolto il palmo della mano? Da entrambi gli esempi possiamo dedurre che l'addizione di due o più spostamenti angolari ha come risultato uno spostamento che dipende dall'ordine con cui essi vengono eseguiti, e quindi non possono essere vettori.



L'ordine di esecuzione delle rotazioni produce risultati diversi

Figura 10.7 (a) Al libro, dalla posizione iniziale in alto a sinistra, sono impresse due rotazioni successive di 90°, la prima intorno all'asse x (orizzontale), e la seconda intorno all'asse y (verticale). (b) Il libro subisce ancora le stesse due rotazioni, ma in ordine inverso.

ISBN 978-88-08-18229-6

10.2 ROTAZIONE CON ACCELERAZIONE ANGOLARE COSTANTE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

10.14 Applicare, per un'accelerazione angolare costante, le relazioni che intercorrono tra la posizione angolare, lo spostamento angolare, la velocità angolare, l'accelerazione angolare e il tempo (tabella 10.1).

Idee chiave

- La condizione di accelerazione angolare costante (α = costante) è un caso particolare di grande importanza nel moto rotatorio. Si applicano le seguenti equazioni cinematiche:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t,$$
$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2,$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0),$$
$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t,$$
$$\theta - \theta_0 = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Rotazione con accelerazione angolare costante

Nella traslazione pura, un moto con *accelerazione lineare costante* (quello, per esempio, di un corpo in caduta libera) rappresenta un caso particolare molto importante. Nella tabella 2.1 è riportata una serie di equazioni che si riferiscono a questo tipo di moto.

Nella rotazione pura, il caso di *accelerazione angolare costante* è ancora molto importante, e anche per questo caso è valida un'analoga serie di equazioni. Non ricaveremo qui queste equazioni per via analitica, ma le trascriveremo semplicemente dalle corrispondenti equazioni lineari, sostituendo opportunamente le grandezze angolari a quelle lineari corrispondenti. La tabella 10.1 mette a confronto le due serie di equazioni.

Non dimenticate che le equazioni 2.11 e 2.15 sono le equazioni fondamentali per l'accelerazione lineare costante; le altre equazioni per il caso lineare possono essere ricavate da queste. Analogamente le equazioni 10.12 e 10.13 sono le equazioni base per l'accelerazione angolare costante e le altre equazioni angolari derivano da queste. Per risolvere semplici problemi che coinvolgono un'accelerazione angolare costante, di solito potete scegliere un'opportuna equazione tra quelle della lista (se però ricordate tutta la lista): dovete prendere l'equazione in cui l'unica variabile per voi incognita è quella richiesta dal problema. In alternativa potete tenere a mente solo le equazioni 10.12 e 10.13 e poi risolverle come un sistema di equazioni. Un esempio è illustrato nel problema svolto 10.4.

VERIFICA 2

In quattro situazioni diverse un corpo rotante ha la posizione angolare $\theta(t)$ data da (a) $\theta = 3t - 4$, (b) $\theta = -5t^3 + 4t^2 + 6$, (c) $\theta = 2t^2 - 4/t$, (d) $\theta = 2t^2 - 3$. (I coefficienti numerici sono tali che θ risulti in rad.) A quali di queste situazioni si applicano le equazioni angolari della tabella 10.1?

(a), (d)

TABELLA 10.1 Equazioni del moto per accelerazione costante (lineare e angolare)

Numero dell'equazione	Moto lineare	Variabile mancante		Moto rotatorio	Numero dell'equazione
(2.11)	$v = v_0 + at$	$x - x_0$	$\theta - \theta_0$	$\omega = \omega_0 + \alpha t$	(10.12)
(2.15)	$x - x_0 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$	v	ω	$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10.13)
(2.16)	$v^2 = v_0^2 + 2a(x - x_0)$	t	t	$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0)$	(10.14)
(2.17)	$x - x_0 = \frac{1}{2}(v_0 + v)t$	a	α	$\theta - \theta_0 = \frac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t$	(10.15)
(2.18)	$x - x_0 = vt - \frac{1}{2}at^2$	v_0	ω_0	$\theta - \theta_0 = \omega t - \frac{1}{2}\alpha t^2$	(10.16)

PROBLEMA SVOLTO 10.3 Accelerazione angolare costante, mola circolare

La mola circolare della figura 10.8 ha un'accelerazione angolare costante di modulo $\alpha = 0{,}35$ rad/s^2. Parte all'istante $t = 0$ quando $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s, con una linea di riferimento orizzontale quando la posizione angolare è $\theta_0 = 0$.

(a) In che istante successivo la linea di riferimento ha posizione angolare $\theta = 5{,}0$ giri?

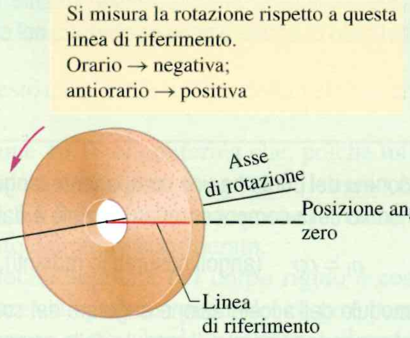


Figura 10.8 Problema svolto 10.3. Una mola circolare. Per $t = 0$ la linea di riferimento (che immaginiamo sia tracciata sul disco) è orizzontale.

SOLUZIONE

Dato che l'accelerazione angolare è costante è idea chiave utilizzare le equazioni della tabella 10.1. Scegliamo la (10.13),

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2,$$

visto che l'unica variabile a noi ignota che vi compare è il tempo t, la grandezza che cerchiamo. Introducendo i valori noti $\theta_0 = 0$ e $\theta = 5{,}0$ giri $= 10\pi$ rad, si ottiene

$$10\pi \text{ rad} = (-4{,}6 \text{ rad/s})t + \tfrac{1}{2}(0{,}35 \text{ rad/s}^2)t^2.$$

La conversione 5,0 giri $= 10\pi$ rad si è resa necessaria per rispettare la coerenza nelle unità di misura. Risolvendo rispetto a t quest'equazione di secondo grado, troviamo

$$t = 32 \text{ s}.$$

Qui si nota qualcosa di un po' strano. Vediamo inizialmente la mola passare dalla posizione angolare zero mentre sta girando con velocità angolare negativa, cioè in senso orario. Però troviamo che 32 s dopo passa dalla medesima posizione dopo aver percorso uno spostamento angolare positivo, cioè in senso antiorario, di 5,0 giri. Che cosa è successo in quest'intervallo di tempo?

(b) Descrivere il moto di rotazione tra l'istante $t = 0$ e l'istante $t = 32$ s.

SOLUZIONE

La mola inizialmente gira nel verso negativo (senso orario) con velocità angolare $\omega_0 = -4{,}6$ rad/s, ma la sua accelerazione angolare è positiva. Se questi due segni sono opposti, significa che la mola sta rallentando nel suo moto orario; a un certo punto si arresta e comincia a ruotare in senso opposto (verso positivo). Dopo che la linea di riferimento è tornata alla sua posizione iniziale $\theta = 0$, la mola ruota ancora per cinque giri finché il cronometro segna $t = 32$ s.

(c) Qual è l'istante t di arresto della mola?

SOLUZIONE

Ricorriamo ancora alla tabella delle equazioni per moto rotatorio accelerato uniforme; anche qui ci serve un'equazione che contenga la grandezza da cercare, t. Però serve anche un'altra idea chiave: l'equazione deve contenere la variabile ω, affinché la si possa porre uguale a zero e trovare l'istante corrispondente a questa velocità angolare. Prendiamo dunque l'equazione 10.12, da cui otteniamo

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{0 - (-4{,}6 \text{ rad/s})}{0{,}35 \text{ rad/s}^2} = 13 \text{ s}.$$

PROBLEMA SVOLTO 10.4 Accelerazione angolare costante, una corsa sul Rotore

Mentre siete ai comandi di manovra del *Rotore*, il grande cilindro rotante che si trova nei luna park, osservate che un passeggero dà segni di grave disagio. Decidete dunque di rallentare il rotore da 3,40 rad/s a 2,00 rad/s in 20,0 giri applicando un'accelerazione angolare costante.

(a) Che valore ha l'accelerazione angolare costante?

SOLUZIONE

Posto che l'accelerazione angolare è costante, possiamo applicare le equazioni 10.12 e 10.13 per il caso di accelerazione costante.

Calcoli. Vediamo rapidamente se possiamo risolvere le equazioni base ponendo $\omega_0 = 3{,}40$ rad/s, lo spostamento angolare $\theta - \theta_0 = 20{,}0$ giri e la velocità angolare al termine dell'intervallo di tempo $\omega = 2{,}00$ rad/s. Le due equazioni, oltre all'incognita α di nostro interesse, contengono anche l'incognita t che non ci è richiesta.

Per eliminare quest'ultima scriviamo l'equazione 10.12 nel seguente modo:

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha},$$

che sostituiamo nella (10.13):

$$\theta - \theta_0 = \omega_0\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right) + \tfrac{1}{2}\alpha\left(\frac{\omega - \omega_0}{\alpha}\right)^2.$$

Risolvendo rispetto ad α, introducendo i dati e convertendo 20,0 giri in 125,7 rad, otteniamo

$$\alpha = \frac{\omega^2 - \omega_0^2}{2(\theta - \theta_0)} = \frac{(2{,}00 \text{ rad/s})^2 - (3{,}40 \text{ rad/s})^2}{2(125{,}7 \text{ rad})} = -0{,}0301 \text{ rad/s}^2.$$

(b) Quanto tempo ha richiesto l'operazione?

SOLUZIONE

Ora che conosciamo α, per trovare t possiamo servirci della (10.12):

$$t = \frac{\omega - \omega_0}{\alpha} = \frac{2{,}00 \text{ rad/s} - 3{,}40 \text{ rad/s}}{-0{,}0301 \text{ rad/s}^2} = 46{,}5 \text{ s}.$$

 ISBN 978-88-08-18229-6

10.3 VARIABILI LINEARI E ANGOLARI

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

10.15 Trovare il legame, applicabile a un corpo rigido in rotazione attorno a un asse fisso, tra le variabili angolari del corpo (posizione, velocità e accelerazione angolari) e le variabili lineari (posizione, velocità e accelerazione lineari) relative a un punto appartenente al corpo e caratterizzato da un certo raggio.

10.16 Distinguere tra accelerazione tangenziale e radiale, nonché disegnare un vettore per ciascuna delle due accelerazioni per una particella appartenente a un corpo rigido rotante attorno a un asse, sia nel caso di accelerazione positiva sia nel caso opposto.

Idee chiave

- Un punto determinato di un corpo rigido in rotazione, individuato da una distanza radiale r dall'asse di rotazione, si muove su una circonferenza di raggio r. Se il corpo gira percorrendo uno spostamento angolare θ, il punto si muove lungo un arco di lunghezza s data da

$$s = \theta r \quad \text{(angoli misurati in radianti)},$$

ove θ è espresso in radianti.

- La velocità lineare $\boldsymbol{v}$ del punto è tangente alla circonferenza; il suo modulo è dato da

$$v = \omega r \quad \text{(angoli misurati in radianti)},$$

in cui ω è il modulo della velocità angolare, espresso in radianti al secondo, sia del corpo sia del punto.

- L'accelerazione $\boldsymbol{a}$ del punto ha una componente tangenziale e una radiale. Il modulo della componente tangenziale è data da

$$a_t = \alpha r \quad \text{(angoli misurati in radianti)},$$

ove α è il modulo dell'accelerazione angolare del corpo espresso in radianti al secondo quadrato. Il modulo della componente radiale di $\boldsymbol{a}$ è invece

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(angoli misurati in radianti)}.$$

- Se il moto circolare del punto è uniforme, il suo periodo T di rivoluzione è, come per il corpo,

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(angoli misurati in radianti)}.$$

Variabili lineari e angolari

Nel paragrafo 4.5 abbiamo studiato il moto circolare uniforme, nel quale una particella viaggia a velocità lineare costante v su una circonferenza intorno a un asse di rotazione. Quando un corpo rigido, come una giostra, ruota intorno a un asse di rotazione, ciascun punto di quel corpo si muove su una propria circonferenza intorno a quell'asse. Poiché il corpo è rigido, tutti i punti fanno un giro nello stesso intervallo di tempo: hanno, cioè, la stessa velocità angolare ω.

Ma quanto più distante dal centro è un punto, tanto maggiore è il raggio del cerchio da esso descritto, e maggiore deve quindi essere la sua velocità lineare v. Di questo fatto potete facilmente rendervi conto su una giostra. Tutti sulla giostra girano alla stessa velocità angolare ω, ma la velocità lineare v subisce un sensibile aumento se vi spostate verso la periferia della piattaforma rotante.

Abbiamo spesso la necessità di esprimere le relazioni esistenti fra le variabili lineari s, v e a in un certo punto di un corpo rotante e le variabili angolari θ, ω e α di quel corpo. Le due serie di variabili sono legate fra loro da r, la *distanza radiale*, ossia la distanza del punto dall'asse di rotazione, misurata su una normale all'asse stesso. La lunghezza del raggio r della circonferenza descritto dal punto intorno all'asse di rotazione è uguale alla distanza radiale.

Posizione

Se una linea di riferimento segnata su un corpo rigido ruota di un angolo θ, un punto generico del corpo si sposta su un arco di circonferenza di una distanza s data dall'equazione 10.1:

$$s = \theta r \quad \text{(angoli misurati in radianti).} \tag{10.17}$$

Questa è la prima delle relazioni tra quantità lineari e angolari. *Attenzione*: l'angolo θ deve essere espresso in radianti, perché l'equazione 10.17 rappresenta di per sé una definizione della misura di angoli in radianti.

ISBN 978-88-08-18229-6

Velocità

Derivando l'equazione 10.17 rispetto al tempo, per r costante, si ha

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}r\,.$$

Ma $\mathrm{d}s/\mathrm{d}t$ è la velocità lineare scalare e $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t$ è la velocità angolare del corpo rotante, e quindi

$$v = \omega r \quad \text{(angoli misurati in radianti).} \tag{10.18}$$

Anche in questo caso, nella misura della velocità angolare ω gli angoli devono essere espressi in radianti.

L'equazione 10.18 ci conferma che, poiché tutti i punti del corpo rigido hanno identica velocità angolare ω, quanto maggiore è il raggio r, tanto più elevata è l'intensità della velocità lineare v. La figura 10.9a mostra che il vettore velocità lineare è sempre tangente al percorso tracciato dal punto considerato.

Se la velocità angolare del corpo rigido è costante, l'equazione 10.18 assicura che la velocità lineare v di qualsiasi punto del corpo è pure costante. Significa che ciascun punto del corpo descrive un moto circolare uniforme. Il periodo di rivoluzione T per tutti i punti e per il corpo stesso è dato dall'equazione 4.35:

$$T = \frac{2\pi r}{v}\,. \tag{10.19}$$

Da qui si evince che il tempo impiegato per compiere un giro è pari alla distanza percorsa $2\pi r$ divisa per l'intensità della velocità di percorrenza. Introducendo l'equazione 10.18 nella 10.19 si ha

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{(angoli misurati in radianti).} \tag{10.20}$$

Questa equazione equivalente afferma che il tempo necessario a compiere un giro è pari all'angolo-giro 2π rad diviso per l'intensità della velocità angolare di rivoluzione.

Accelerazione

Derivando l'equazione 10.18 rispetto al tempo, sempre con r costante, si ha

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}t}r\,. \tag{10.21}$$

Qui incontriamo una complicazione. Nella (10.21) $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t$ rappresenta *soltanto* la parte dell'accelerazione lineare che è responsabile di variazioni (scalari) nel *modulo* della velocità lineare $\boldsymbol{v}$. Al pari di $\boldsymbol{v}$, questa parte dell'accelerazione lineare è tangente al percorso tracciato dal punto considerato. È chiamata *componente tangenziale* a_t dell'accelerazione lineare del punto, e si può scrivere

$$a_t = \alpha r \quad \text{(angoli misurati in radianti),} \tag{10.22}$$

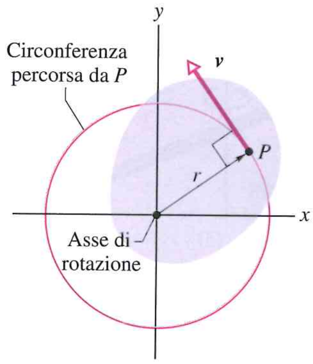
dove $\alpha = \mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$. Anche l'accelerazione angolare dell'equazione 10.22 richiede di esprimere gli angoli in radianti.

Oltre a questa accelerazione, come sappiamo dall'equazione 4.34, una particella (o un punto) che si muove su un percorso circolare possiede una *componente radiale* o *centripeta* dell'accelerazione lineare con modulo $a_r = v^2/r$, che è responsabile della modifica di *direzione* della velocità lineare vettoriale $\boldsymbol{v}$. Tenendo presente l'espressione di v dell'equazione 10.18, questa componente vale

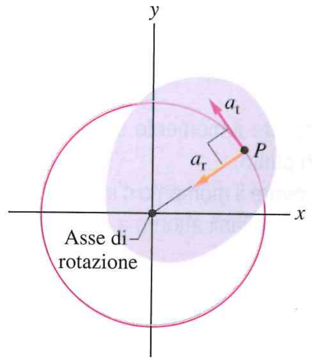
$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \quad \text{(angoli misurati in radianti).} \tag{10.23}$$

Così, come si vede nella figura 10.9b, l'accelerazione lineare di un punto di un corpo rigido si può decomporre in due componenti. La componente radiale o centripeta a_r, data dall'equa-

Il vettore velocità è sempre tangente alla circonferenza attorno all'asse di rotazione



(a)



(b)

L'accelerazione ha sempre una componente radiale (centripeta) e una componente tangenziale che può essere anche nulla

Figura 10.9 Una sezione vista dall'alto del corpo rigido rotante della figura 10.2. Ogni suo punto, come ad esempio P, si muove su una circonferenza intorno all'asse di rotazione. (a) La velocità lineare $\boldsymbol{v}$ di ogni punto è tangente alla circonferenza su cui si muove il punto. (b) L'accelerazione lineare $\boldsymbol{a}$ del punto ha (in generale) due componenti: una tangenziale a_t e una radiale a_r.

 ISBN 978-88-08-18229-6

zione 10.23, è sempre presente quando la velocità angolare del corpo è diversa da zero. La componente tangenziale a_t, data dall'equazione 10.22, è presente soltanto quando l'accelerazione angolare del corpo è diversa da zero.

VERIFICA 3

Un bambino cammina sul bordo di una giostra rotante. Se la velocità angolare del sistema (giostra + bambino) è costante, il bambino possiede (a) un'accelerazione radiale e (b) un'accelerazione tangenziale? Se la velocità angolare è in diminuzione, il bambino possiede (c) un'accelerazione radiale e (d) un'accelerazione tangenziale?

(a) sì (b) no
(c) sì (d) sì

10.4 ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

10.17 Trovare il momento d'inerzia di una particella che gira attorno a un punto.

10.18 Trovare il momento d'inerzia totale di molteplici particelle che ruotano solidali attorno a un medesimo asse fisso.

10.19 Calcolare l'energia cinetica rotazionale di un corpo in funzione del suo momento d'inerzia e della sua velocità angolare.

Idee chiave

- L'energia cinetica K di un corpo rigido che ruota attorno a un asse fisso è data da

$$K=\tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(misure in radianti),}$$

ove I rappresenta il momento d'inerzia del corpo, definito, per un sistema di particelle separate, come

$$I=\sum m_i r_i^2.$$

Energia cinetica rotazionale

La lama di una sega circolare da banco che gira ad alta velocità ha senza dubbio una certa energia cinetica. Ma come possiamo esprimerla? Non possiamo certamente usare la ben nota formula $K=\frac{1}{2}mv^2$, perché applicandola al corpo intero finiremmo per calcolare l'energia cinetica del centro di massa, che è zero.

Tratteremo invece la lama della sega circolare (come qualsiasi altro corpo rigido rotante) come un aggregato di punti materiali, aventi tutti velocità differenti. Per ricavare l'energia complessiva del corpo rigido basterà sommare le energie cinetiche di tutte le particelle componenti:

$$K=\tfrac{1}{2}m_1v_1^2+\tfrac{1}{2}m_2v_2^2+\tfrac{1}{2}m_3v_3^2+\cdots=\sum \tfrac{1}{2}m_iv_i^2, \tag{10.24}$$

ove m_i è la massa della i-esima particella e v_i è la sua velocità lineare (scalare). La somma è estesa a tutte le particelle che compongono il corpo.

Ciò che rende complesso il calcolo dell'equazione 10.24 è il fatto che la v_i *non è la stessa* per tutte le particelle. Per risolvere questo problema cominciamo col sostituire a ogni velocità scalare v il suo valore dato dall'equazione 10.18 ($v=\omega r$):

$$K=\sum \tfrac{1}{2}m_i(\omega r_i)^2=\tfrac{1}{2}\left(\sum m_ir_i^2\right)\omega^2, \tag{10.25}$$

ove ω *è la stessa* per tutte le particelle.

Il valore dell'espressione fra parentesi sul lato destro della (10.25) dipende dal modo in cui è distribuita la massa intorno all'asse di rotazione. Questa quantità, definita anche come *inerzia rotazionale I* del corpo rispetto a quell'asse, è comunemente nota col nome di **momento d'inerzia.** Per ogni corpo rigido e per un certo asse di rotazione, il momento d'inerzia è costante (occorre dunque specificare sempre l'asse acciocché il valore di I abbia significato). Si ha dunque:

$$I = \sum m_i r_i^2 \quad \text{(momento d'inerzia).} \qquad (10.26)$$

Sostituendo questa espressione nella (10.25) otteniamo

$$K = \tfrac{1}{2} I \omega^2 \quad \text{(angoli misurati in radianti),} \qquad (10.27)$$

la relazione che cercavamo. Dato che per ricavare l'equazione 10.27 abbiamo usato la relazione $v = \omega r$, la misura della velocità angolare ω deve essere espressa con angoli in radianti. L'unità SI per il momento d'inerzia è il kilogrammo per metro quadrato ($kg \cdot m^2$).

Piano d'azione. Dovessimo avere poche particelle rotanti attorno a un determinato asse, calcoleremmo mr^2 per ciascuna di esse e, sommando i risultati come nell'equazione 10.26, otterremmo il momento d'inerzia totale I. L'energia cinetica rotazionale si ricava poi con la (10.27). Ma, se siamo in presenza di un gran numero di particelle come in una barra, ci occorre un metodo che vedremo tra poco, applicabile a corpi con distribuzione *continua*.

L'equazione 10.27, che esprime il valore dell'energia cinetica di un corpo rigido in rotazione pura, è l'equivalente angolare della formula $K = \frac{1}{2} M v_{cdm}^2$, valida per il caso di un corpo rigido in traslazione pura. In entrambi i casi compare il coefficiente $\frac{1}{2}$. Dove in una formula appare la massa M (che si potrebbe chiamare *inerzia traslazionale*), troviamo nell'altra il momento d'inerzia I (l'*inerzia rotazionale*). E infine, entrambe le equazioni contengono il quadrato di una velocità scalare, rispettivamente lineare o angolare. Le energie cinetiche di traslazione o di rotazione non sono due tipi differenti di energia; sono sempre energie cinetiche, espresse e da calcolare in modo conforme al tipo di moto considerato.

Abbiamo già osservato che il momento d'inerzia di un corpo rotante non dipende soltanto dalla sua massa, ma anche dal modo in cui questa massa è distribuita rispetto all'asse di rotazione. La figura 10.10 suggerisce un esperimento atto a sviluppare la sensazione fisica istintiva dell'inerzia rotazionale. Fate ruotare un'asta lunga e pesante prima attorno al suo asse longitudinale (come nella fig. 10.10a), e poi attorno a un asse perpendicolare passante per il centro (fig. 10.10b). Nei due casi la massa è assolutamente identica, ma il primo esercizio è molto più agevole del secondo. Questo perché nel primo caso la massa è distribuita molto più vicina all'asse di rotazione di quanto lo sia nel secondo caso. Quindi il momento d'inerzia nella seconda configurazione è molto maggiore che nella prima. In generale un momento d'inerzia minore, a parità di velocità angolare, rende più facile una rotazione.

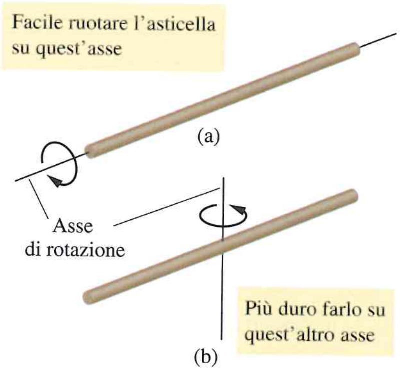
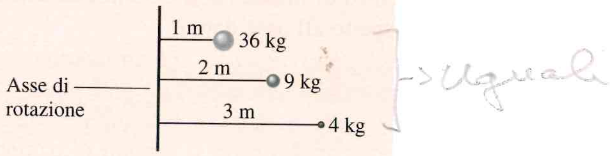


Figura 10.10 Una lunga asta è molto più facile da ruotare (a) attorno al suo asse longitudinale che (b) attorno a un asse normale passante per il centro, perché la massa nel caso (a) è distribuita più vicina all'asse di rotazione che nel caso (b).

VERIFICA 4

La figura mostra tre masse che ruotano attorno a un asse verticale. Sono indicate le distanze dei centri di ciascuna dall'asse. Ordinatele in modo decrescente secondo i loro momenti di inerzia.



10.5 CALCOLO DEL MOMENTO D'INERZIA

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

10.20 Determinare il momento d'inerzia di un corpo del tipo descritto nella tabella 10.2.

10.21 Calcolare il momento d'inerzia di un corpo operando un'integrazione sugli elementi di massa di cui è composto.

10.22 Applicare il teorema degli assi paralleli per un asse di rotazione parallelo all'asse passante per il centro di massa del corpo.

 ISBN 978-88-08-18229-6

Idee chiave

- Il momento d'inerzia I di un corpo è definito come

$$I = \sum m_i r_i^2,$$

nel caso di un sistema discreto di particelle, mentre nel caso di un corpo con distribuzione di massa continua è

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m.$$

In queste equazioni r e r_i rappresentano le distanze dall'asse di rotazione di ciascun elemento di massa del corpo. L'integrazione è eseguita sull'intero corpo in modo da includere tutti i suoi elementi di massa.

- Il teorema degli assi paralleli lega il momento d'inerzia I di un corpo rispetto a un asse passante per il suo centro di massa al momento d'inerzia rispetto a qualsiasi altro asse parallelo al primo:

$$I = I_{\mathrm{cdm}} + Mh^2,$$

ove h è la distanza tra gli assi e I_{cdm} è il momento d'inerzia del corpo relativo all'asse passante per il centro di massa.

Calcolo del momento d'inerzia

Se un corpo rigido è formato da un numero discreto di particelle distinte, l'equazione 10.26 ci consente di calcolarne il momento d'inerzia. Possiamo cioè calcolare il prodotto mr^2 per ogni particella e poi sommare questi prodotti (ricordando che r rappresenta la distanza della particella dall'asse dato).

Se però la massa del corpo è distribuita con continuità, in quell'equazione conviene sostituire alla sommatoria un integrale, e l'espressione che definisce il momento d'inerzia diventa:

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m \qquad \text{(momento d'inerzia, massa uniformemente distribuita).} \qquad (10.28)$$

La tabella 10.2 riporta i momenti d'inerzia per nove fra i più comuni corpi di forma geometrica semplice, rispetto a diversi assi di rotazione.

Teorema degli assi paralleli (teorema di Huygens-Steiner)

Supponiamo di voler trovare il momento d'inerzia I di un corpo di massa M rispetto a un certo asse. In linea di principio possiamo sempre calcolarlo mediante l'integrazione della (10.28). Abbiamo tuttavia a disposizione una scorciatoia quando si conosce il momento d'inerzia del corpo per la rotazione intorno a un asse *parallelo* che passi per il suo centro di massa. Sia h la distanza (misurata perpendicolarmente) fra l'asse dato e l'asse passante per il centro di massa (non dimenticate che devono essere paralleli). Allora il momento d'inerzia rispetto all'asse dato è

$$I = I_{\mathrm{cdm}} + Mh^2 \qquad \text{(teorema degli assi paralleli).} \qquad (10.29)$$

Questa espressione è nota col nome di **teorema degli assi paralleli** o anche **teorema di Huygens-Steiner**. Ora lo dimostriamo, poi ne vedremo l'applicazione nella verifica 5 e nel problema svolto 10.5.

momento d'inerzia rispetto 'asse passante per P va messo relazione con quello passante per il cdm

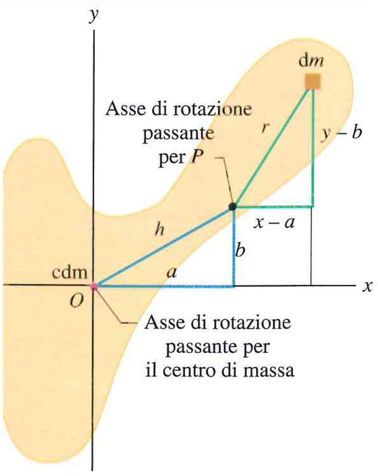


Figura 10.11 Una sezione trasversale di un corpo rigido con il centro di massa in O. Il teorema degli assi paralleli dell'equazione 10.29 stabilisce la relazione fra i momenti d'inerzia rispetto a due assi paralleli, dei quali uno passa per il centro di massa O, l'altro per un punto P alla distanza h da O. Entrambi gli assi sono perpendicolari al piano della figura.

Dimostrazione del teorema degli assi paralleli

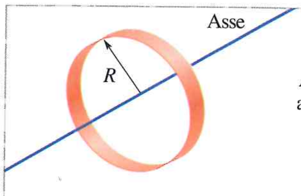
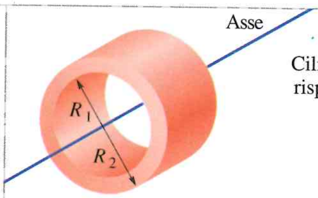
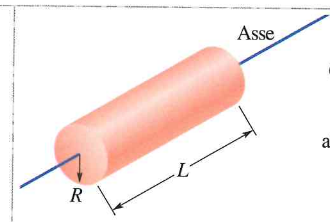
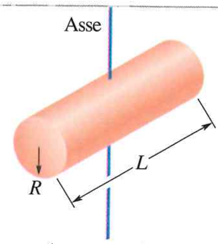
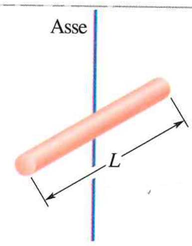
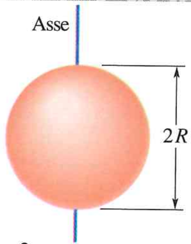
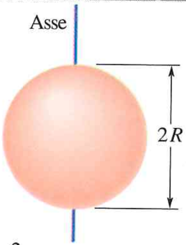
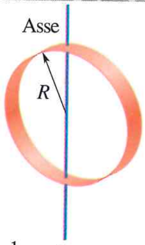
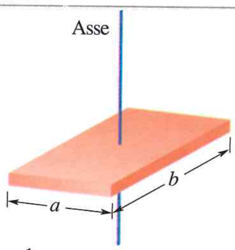
Chiamiamo O il centro di massa di un corpo di forma arbitraria rappresentato in sezione nella figura 10.11. Facciamo coincidere con O l'origine delle coordinate. Consideriamo un asse passante per O perpendicolare al piano della figura e facciamo passare un altro asse, parallelo al primo, per il punto P di coordinate a e b.

Sia dm un elemento di massa di coordinate x e y. Il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse passante per P dato dall'equazione 10.28 vale

$$I = \int r^2 \mathrm{d}m = \int [(x-a)^2 + (x-b)^2] \mathrm{d}m,$$

ISBN 978-88-08-18229-6

TABELLA 10.2 Momenti d'inerzia

 Anello rispetto all'asse centrale $I = MR^2$ (a)	 Cilindro anulare rispetto all'asse centrale $I = \frac{1}{2}M(R_1^2 + R_2^2)$ (b)	 Cilindro pieno (o disco) rispetto all'asse centrale $I = \frac{1}{2}MR^2$ (c)
 Cilindro pieno (o disco) rispetto a un diametro passante per il centro $I = \frac{1}{4}MR^2 + \frac{1}{12}ML^2$ (d)	 Barra sottile rispetto a un asse passante per il centro e perpendicolare alla lunghezza $I = \frac{1}{12}ML^2$ (e)	 Sfera piena rispetto a un diametro $I = \frac{2}{5}MR^2$ (f)
 Sfera cava (o guscio) sottile, rispetto a un diametro $I = \frac{2}{3}MR^2$ (g)	 Anello rispetto a un diametro $I = \frac{1}{2}MR^2$ (h)	 Lastra rispetto a un asse perpendicolare passante per il centro $I = \frac{1}{12}M(a^2 + b^2)$ (i)

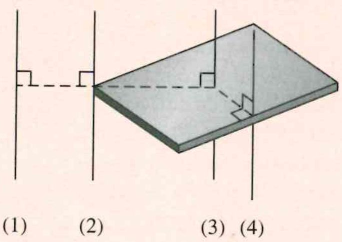
che trasformiamo in

$$I = \int (x^2 + y^2)\mathrm{d}m - 2a \int x\mathrm{d}m - 2b \int y\mathrm{d}m + \int (a^2 + b^2)\mathrm{d}m. \qquad (10.30)$$

Ricordando la definizione del centro di massa data dall'equazione 9.9, vediamo che i due integrali centrali del secondo membro della (10.30) sono le coordinate del centro di massa (ciascuna moltiplicata per una costante), che sono uguali a zero, dato che si è scelta l'origine delle coordinate coincidente con il centro di massa. Il primo degli integrali, essendo $x^2 + y^2$ uguale a R^2, ove R è la distanza di dm da O, è semplicemente I_{cdm}, momento d'inerzia del corpo rispetto a un asse passante per il suo centro di massa. Quanto all'ultimo integrale della 10.30, dalla figura 10.11 risulta che il suo valore è uguale a Mh^2, ove M è la massa totale del corpo e h la distanza di P da O, ossia la distanza fra i due assi paralleli considerati. L'equazione 10.30 coincide con la 10.29, come volevasi dimostrare.

VERIFICA 5

La figura mostra un oggetto di forma simile a un libro con quattro scelte per l'asse di rotazione, comunque normale alla faccia maggiore. Ordinate gli assi secondo i valori decrescenti del momento di inerzia dell'oggetto rispetto a questi assi.



(1), (2), (4), (3)

 ISBN 978-88-08-18229-6

PROBLEMA SVOLTO 10.5 Momento d'inerzia del sistema di due particelle

La figura 10.12a rappresenta un corpo rigido formato da due particelle di massa m collegate da un'asticella di lunghezza L, di massa trascurabile.

(a) Qual è il momento d'inerzia di questo corpo rispetto a un asse passante per il suo centro di massa e perpendicolare all'asticella, come nella figura 10.12a?

SOLUZIONE

Idea chiave. Dato che abbiamo solo due particelle, possiamo trovare il momento d'inerzia tramite l'equazione 10.26 piuttosto che affrontare un'integrazione. Cerchiamo cioè il momento d'inerzia di ciascuna particella e poi sommiamo i risultati. Per le due particelle, ciascuna a distanza dall'asse pari a metà della lunghezza, ricaviamo

$$I = \sum m_i r_i^2 = (m)\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 + (m)\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 .$$

b) Qual è il momento d'inerzia dello stesso corpo rispetto a un asse parallelo al precedente passante per l'estremità sinistra dell'asticella, come nella figura 10.12b?

SOLUZIONE

Questo caso è abbastanza semplice da permetterci di sfruttare due diverse **idee chiave**. La prima è la stessa già usata per la parte (a). La seconda, più potente, consiste nell'applicare il teorema degli assi paralleli.

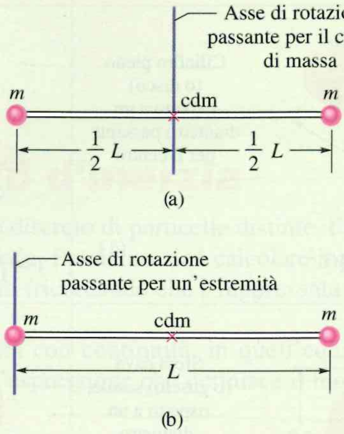
Prima tecnica. Calcoliamo I come nella parte (a). L'unica differenza sta nella distanza r_i, che è nulla per una delle particelle, e pari a L per l'altra. L'equazione 10.26 quindi dà

$$I = m(0)^2 + mL^2 = mL^2.$$

Seconda tecnica. Dato che conosciamo già il momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa, e dato che ora lo cerchiamo rispetto a un asse ad esso parallelo, possiamo arrivarci attraverso il teorema degli assi paralleli. La (10.29) diventa

$$I = I_{cdm} + Mh^2 = \tfrac{1}{2}mL^2 + (2m)\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = mL^2 .$$

L'asse di rotazione passa dal cdm



In questo caso l'asse si trova traslato rispetto al precedente con lo stesso orientamento. Vale il teorema degli assi paralleli

Figura 10.12 Problema svolto 10.5. Un corpo rigido è formato da due particelle di massa m unite da un'asticella di massa trascurabile.

PROBLEMA SVOLTO 10.6 Momento d'inerzia di un'asticella uniforme, integrazione

La figura 10.13 rappresenta un'asticella sottile uniforme di massa M e lunghezza L, disposta lungo un asse x con il centro nell'origine.

(a) Qual è il momento d'inerzia di questo corpo rispetto a un asse passante per il suo centro e perpendicolare all'asticella?

SOLUZIONE

(1) L'asticella consiste di un numero enorme di punti materiali a distanze molto diverse dall'asse di rotazione e quindi non vogliamo certo affrontare l'addizione di tutti i loro singoli momenti d'inerzia. Scriviamo dunque dapprima un'espressione generale per il momento d'inerzia di un generico elemento di massa dm a distanza r dall'asse: $r^2\,dm$.

(2) Poi eseguiamo la somma di tutti i contributi elementari integrando l'espressione. In base all'equazione 10.28 scriviamo

$$I = \int r^2 dm. \qquad (10.31)$$

(3) Considerato che l'asticella è uniforme e l'asse di rotazione passa per il suo centro, stiamo proprio calcolando il momento d'inerzia relativo a un asse passante per il suo centro di massa.

Occorre tuttavia integrare secondo la variabile x, e non m, la variabile d'integrazione indicata nell'espressione. Occorre quindi trovare la relazione tra l'elemento di massa dm e l'elemento di lunghezza dx dell'asticella. Ne vediamo un esempio nella figura 10.13. Dato che il corpo è uniforme, il rapporto massa/lunghezza è il medesimo per qualsiasi lunghezza e quindi uguale a quello dell'asta intera:

$$\frac{dm}{dx} = \frac{M}{L},$$

ossia

$$dm = \frac{M}{L}dx .$$

Nell'equazione 10.31 possiamo ora sostituire questa espressione e cambiare r con x. Integriamo poi tra $x = -L/2$ e $x = +L/2$ e troviamo

$$I = \int_{x=-L/2}^{x=+L/2} x^2\left(\frac{M}{L}\right)dx =$$
$$= \frac{M}{3L}\left[x^3\right]_{-L/2}^{+L/2} = \frac{M}{3L}\left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 - \left(-\frac{L}{2}\right)^3\right] =$$
$$= \tfrac{1}{12}ML^2.$$

Il risultato concorda con la formula data nella tabella 10.2e.

(b) Qual è il momento d'inerzia dello stesso corpo rispetto a un asse parallelo al precedente passante per l'estremità sinistra dell'asticella?

SOLUZIONE

Potremmo trovare I traslando l'origine dell'asse x all'estremità sinistra dell'asticella e integrando tra $x = 0$ e $x = L$. Ma qui utilizziamo una tecnica più potente e più facile applicando il teorema degli assi paralleli (eq. 10.29), traslando l'asse di rotazione senza modificarne l'orientamento.

$$I = \tfrac{1}{3}ML^2 .$$

In alternativa possiamo ricorrere a una tecnica più facile: conosciamo già il momento d'inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa, e dato che ora lo cerchiamo rispetto a un asse ad esso parallelo, possiamo arrivarci attraverso il teorema degli assi paralleli. Dalla figura 10.13 vediamo che la distanza tra il centro di massa e il nuovo asse di rotazione è $L/2$. La (10.29) diventa allora

$$I = I_{\text{cdm}} + Mh^2 = \tfrac{1}{12}ML^2 + (M)\left(\tfrac{1}{2}L\right)^2 = \tfrac{1}{3}ML^2.$$

Questo risultato in realtà è valido per un asse che passi anche dall'estremità destra e anche se non è parallelo all'asse di figura 10.13, purché sia ortogonale all'asticella.

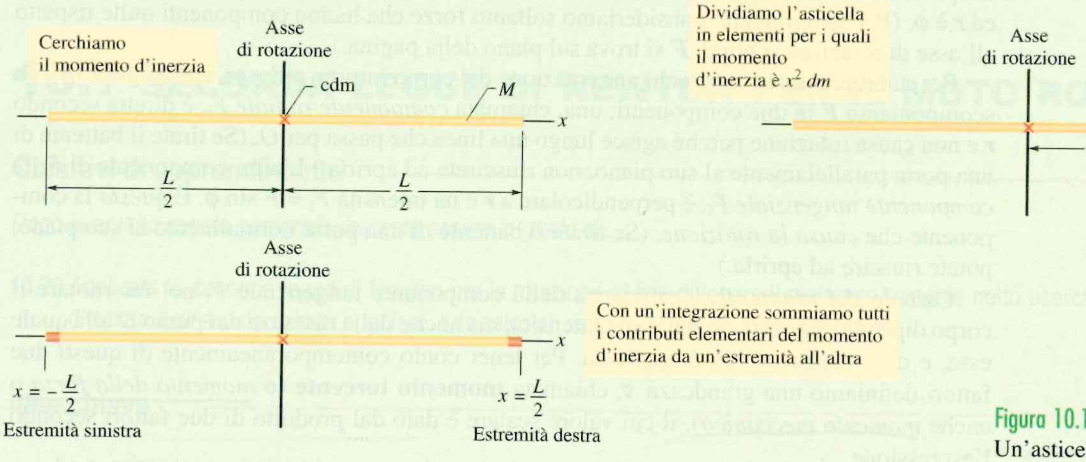


Figura 10.13 Problema svolto 10.6. Un'asticella uniforme di lunghezza L e massa M. È rappresentato un elemento dm di lunghezza dx.

10.6 MOMENTO TORCENTE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di...

10.23 Capire che il momento torcente che agisce su un corpo comporta l'esistenza di una forza e di un vettore posizione che si estende da un asse di rotazione al punto in cui la forza è applicata.

10.24 Calcolare il momento torcente utilizzando (a) l'angolo compreso tra la forza e il vettore posizione, (b) la direzione su cui la forza agisce e il suo braccio e (c) la componente della forza perpendicolare al vettore posizione.

10.25 Rendervi conto che, per calcolare il momento torcente, occorre sempre specificare un asse di rotazione.

10.26 Sapere che al momento torcente è assegnato un segno positivo o negativo a seconda del verso in cui tende a far ruotare il corpo attorno a un asse specificato; al senso orario corrisponde il segno meno.

10.27 Calcolare il momento risultante quando su un corpo agiscono più momenti torcenti rispetto a un certo asse.

Idee chiave

- Il momento torcente è legato all'azione rotante o torcente esercitata su un corpo da una forza $\boldsymbol{F}$ rispetto a un certo asse. Se la forza è applicata a un punto individuato dal vettore posizione $\boldsymbol{r}$ rispetto a un certo asse, la sua componente è data da

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF \sin\phi,$$

ove F_t è la componente scalare di $\boldsymbol{F}$ perpendicolare a $\boldsymbol{r}$ e ϕ è l'angolo compreso tra $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{F}$. La quantità $r_\perp$ è la distanza tra l'asse di rotazione e la direzione del vettore $\boldsymbol{F}$. Tale direzione è chiamata linea d'azione di $\boldsymbol{F}$ e $r_\perp$ è chiamato braccio di $\boldsymbol{F}$. In modo analogo, r è il braccio di F_t.

- L'unità SI del momento torcente è il newton per metro (N · m). Il momento è positivo se tende a far ruotare il corpo a riposo in senso antiorario e negativo nel caso opposto.

 ISBN 978-88-08-18229-6

Momento torcente

La maniglia di una porta è fissata il più lontano possibile dall'asse dei cardini per una buona ragione. Se dobbiamo aprire un portone pesante dobbiamo applicare una forza adeguata: ma non basta, occorre anche sapere dove convenga applicarla e in quale direzione spingere. Se applicate la forza più vicino all'asse dei cardini rispetto a quanto sia la maniglia, o con un angolo diverso da 90° rispetto al piano del battente, dovrete impiegare una forza maggiore di quanta ve ne sarebbe richiesta se la applicaste alla maniglia e perpendicolarmente al battente.

La figura 10.14a mostra una sezione trasversale di un corpo libero di ruotare intorno a un asse passante per O e normale al piano della sezione. Una forza $\boldsymbol{F}$ è applicata al punto P, la cui posizione rispetto a O è definita da un vettore posizione $\boldsymbol{r}$. L'angolo formato dai vettori $\boldsymbol{F}$ ed $\boldsymbol{r}$ è ϕ. (Per semplificare, consideriamo soltanto forze che hanno componenti nulle rispetto all'asse di rotazione. Quindi $\boldsymbol{F}$ si trova sul piano della pagina.)

Per stabilire come $\boldsymbol{F}$ provochi una rotazione del corpo intorno all'asse, nella figura 10.14b scomponiamo $\boldsymbol{F}$ in due componenti: una, chiamata *componente radiale* F_r, è diretta secondo $\boldsymbol{r}$ e non causa rotazione perché agisce lungo una linea che passa per O. (Se tirate il battente di una porta parallelamente al suo piano, non riuscirete ad aprirla.) L'altra componente di $\boldsymbol{F}$, la *componente tangenziale* F_t, è perpendicolare a $\boldsymbol{r}$ e ha intensità $F_t = F \sin \phi$. È *questa* la componente che *causa la rotazione*. (Se tirate il battente di una porta normalmente al suo piano, potete riuscire ad aprirla.)

Calcolo dei momenti. L'efficienza della componente tangenziale F_t nel far ruotare il corpo dipende non soltanto dalla sua intensità, ma anche dalla distanza dal punto O alla quale essa, e di conseguenza $\boldsymbol{F}$, è applicata. Per tener conto contemporaneamente di questi due fattori definiamo una grandezza τ, chiamata **momento torcente** (o *momento della forza* o anche *momento meccanico*), il cui valore scalare è dato dal prodotto di due fattori secondo l'espressione

$$\tau = (r)(F \sin \phi). \tag{10.32}$$

Due modi equivalenti di calcolare il momento torcente sono

$$\tau = (r)(F \sin \phi) = rF_t \tag{10.33}$$

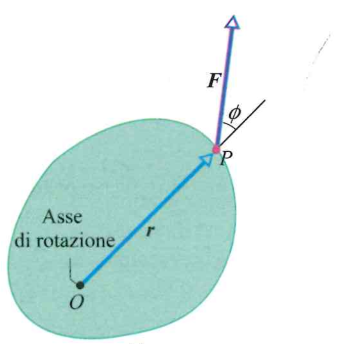
$$\tau = (r \sin \phi)\, F = r_\perp F, \tag{10.34}$$

ove $r_\perp$ rappresenta la distanza, misurata perpendicolarmente, fra l'asse di rotazione passante per O e la retta sulla quale giace il vettore $\boldsymbol{F}$, come indicato nella figura 10.14c. Questa retta è chiamata **linea di azione** di $\boldsymbol{F}$, e $r_\perp$ è chiamata **braccio** di $\boldsymbol{F}$. Nella figura 10.14b possiamo riconoscere che r, modulo di $\boldsymbol{r}$, è il braccio della componente F_t della forza $\boldsymbol{F}$.

Il momento torcente può essere in un certo senso identificato con l'azione di rotazione o di torsione esercitata dalla forza $\boldsymbol{F}$. Quando si applica una forza a un oggetto, come un cacciavite o un giratubi, allo scopo di farlo ruotare, si sta applicando proprio il concetto di momento torcente. L'unità di misura del momento torcente è il newton · metro (N · m). *Attenzione*: il newton · metro è anche l'unità del lavoro. Il momento della forza e il lavoro, in realtà, sono due grandezze ben differenti, che non devono assolutamente essere confuse fra loro. Per questo, si usa chiamare joule (1 J = 1 N · m) solo l'unità di lavoro, e non quella del momento della forza, proprio per non creare equivoci.

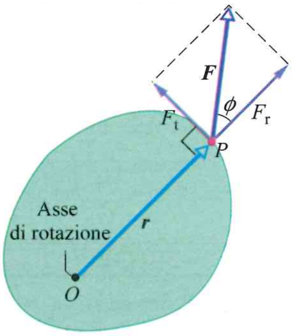
Verso del vettore momento. Nel prossimo capitolo presenteremo il momento della forza in termini più ampi, come un vettore. Qui, dato che ci limitiamo alle rotazioni attorno a un solo asse, non abbiamo bisogno della notazione vettoriale. In questo caso il momento della forza può avere solo valore positivo o negativo a seconda del verso di rotazione che è in grado di imprimere al corpo inizialmente fermo. Un momento τ di una forza è positivo se tende a far ruotare il corpo in senso antiorario; è negativo se tende a farlo ruotare in senso orario.

Il momento della forza obbedisce al principio di sovrapposizione discusso nel capitolo 5 a proposito delle forze: se più momenti agiscono su un corpo, la loro somma prende il nome di **momento torcente risultante**, o di **momento torcente netto**, e lo indichiamo con τ_{net}.



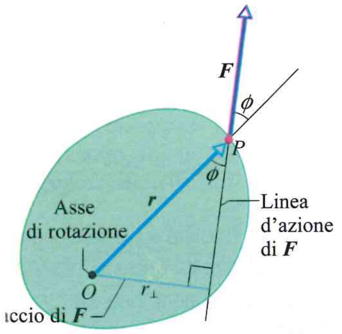
(a)

Il momento torcente dovuto a questa forza provoca rotazione attorno a quest'asse (uscente dal piano del foglio)



(b)

Solo la componente *tangenziale* della forza agisce sulla rotazione



(c)

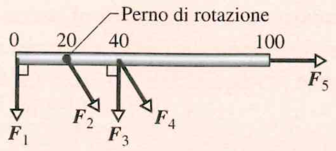
Il momento torcente si può calcolare anche moltiplicando i moduli della forza e del braccio

Figura 10.14 (a) Una forza $\boldsymbol{F}$ agisce nel punto P su un corpo rigido libero di ruotare intorno a un asse perpendicolare in O al piano della sezione considerata. (b) Il momento esercitato da questa forza è $Fr \sin \phi$. Il momento si può esprimere anche come $\tau = F_t r$, ove F_t è la componente tangenziale di $\boldsymbol{F}$. (c) Oppure come $Fr_\perp$, in cui $r_\perp$ è il braccio di $\boldsymbol{F}$.

ISBN 978-88-08-18229-6

VERIFICA 6

La figura qui a fianco rappresenta un metro visto dall'alto, che può ruotare attorno a un asse passante per la tacca dei 20 cm. Tutte le cinque forze indicate hanno lo stesso modulo. Ordinatele secondo i valori decrescenti del momento della forza prodotto da ciascuna.



F_1, F_3
F_4
F_2, F_5

10.7 SECONDA LEGGE DI NEWTON PER IL MOTO ROTATORIO

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

10.28 Applicare la seconda legge di Newton per la rotazione al fine di legare il momento torcente netto esercitato su un corpo al suo momento d'inerzia e all'accelerazione angolare, tutti calcolati rispetto a un dato asse di rotazione.

Idee chiave

- La seconda legge di Newton per i moti rotatori è

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha,$$

in cui τ_{net} è il momento torcente netto che agisce su una particella o un corpo rigido, I è il momento d'inerzia della particella o del corpo rispetto all'asse di rotazione e α è l'accelerazione angolare attorno a quell'asse.

Seconda legge di Newton per il moto rotatorio

Il momento torcente può causare la rotazione di un corpo rigido, come quando facciamo ruotare una porta attorno ai cardini. Vogliamo ora mettere in relazione il momento risultante τ_{net} delle forze che agiscono su un corpo rigido con l'accelerazione angolare α che questo provoca attorno all'asse di rotazione. Procediamo in analogia alla seconda legge di Newton ($F_{\text{net}} = ma$), per un'accelerazione a prodotta su un corpo di massa m da una forza risultante F_{net} agente lungo un asse coordinato. Non facciamo altro che sostituirvi le corrispondenti grandezze per il caso rotazionale, e scriviamo

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \text{ (seconda legge di Newton per la rotazione)}, \quad (10.35)$$

ove α richiede la misura degli angoli in radianti.

Dimostrazione dell'equazione 10.35

Affrontiamo la dimostrazione dell'equazione 10.35 considerando dapprima il semplice caso della figura 10.15. Il corpo rigido rotante è una particella di massa m fissata all'estremità di un'asticella priva di massa e di lunghezza r. L'asta può muoversi soltanto per rotazione attorno alla sua opposta estremità, girando quindi intorno a un asse perpendicolare al piano della pagina. La particella dunque non può che descrivere una circonferenza con centro nel perno di rotazione dell'asta.

Una forza $\boldsymbol{F}$ agisce sulla particella come indicato nel diagramma. La componente tangenziale a_t dell'accelerazione della particella è la sola in grado di variare la velocità angolare. Il moto impresso dalla componente tangenziale F_t della forza è governato dalla seconda legge di Newton:

$$F_t = ma_t.$$

Il momento della forza che agisce sulla particella risulta, dalla (10.33),

$$\tau = F_t r = ma_t r.$$

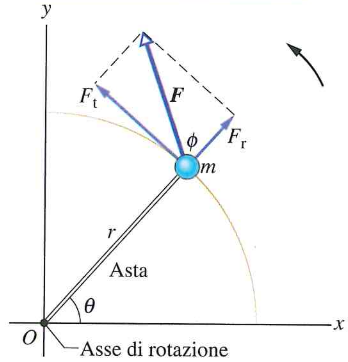


Figura 10.15 Un corpo rigido semplice, libero di ruotare intorno a un asse passante per O, consiste di una particella di massa m fissata all'estremità di un'asticella di lunghezza r e massa trascurabile. Il corpo ruota per effetto di una forza $\boldsymbol{F}$ a esso applicata.

 ISBN 978-88-08-18229-6

Combinandola con l'equazione 10.22 ($a_t = \alpha r$) possiamo scrivere

$$\tau = m(\alpha r)r = (mr^2)\alpha. \qquad (10.36)$$

L'espressione fra parentesi al secondo membro della (10.36) è il momento d'inerzia della particella rispetto all'asse di rotazione (vedi eq. 10.26). Sicché, introducendo il momento d'inerzia I, l'equazione 10.36 si riduce a

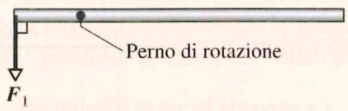
$$\tau = I\alpha \quad \text{(angoli misurati in radianti).} \qquad (10.37)$$

Questa equazione, estesa al caso più generale in cui più di una forza sia applicata alla particella, diventa

$$\tau_{\text{net}} = I\alpha \quad \text{(angoli misurati in radianti),} \qquad (10.38)$$

l'espressione che dovevamo dimostrare. L'equazione 10.38, pur essendo stata ricavata per il caso particolare di una singola particella rotante intorno a un asse fisso, è valida per qualsiasi corpo rigido rotante intorno a un asse fisso, perché qualsiasi corpo analogo può essere trattato come un'aggregazione di particelle distinte.

VERIFICA 7



La figura qui a fianco mostra un metro visto dall'alto, che può ruotare attorno all'asse indicato con un punto, a sinistra del punto medio. Al metro sono applicate due forze $\boldsymbol{F}_1$ ed $\boldsymbol{F}_2$ di cui solo la prima è segnata. $\boldsymbol{F}_2$ è perpendicolare al metro ed è applicata all'estremità destra. Affinché il metro non ruoti, (a) quale dovrebbe essere la direzione di $\boldsymbol{F}_2$? (b) F_2 dovrebbe essere maggiore, minore o uguale a F_1?

(a) verso il ~~alto~~ basso
(b) $F_2 < F_1$

PROBLEMA SVOLTO 10.7 Seconda legge di Newton per la rotazione in una mossa di judo

Per far volare un avversario di judo di massa 80 kg con il classico colpo di anca, progettate di tirarne la giacca con una forza $\boldsymbol{F}$ e un braccio d_1 = 0,30 m rispetto a un fulcro (asse di rotazione), localizzato sulla vostra anca destra, intorno alla quale lo fareste volteggiare con un'accelerazione angolare di –0,60 rad/s^2, ossia, un'accelerazione in senso orario, come è indicato nella figura 10.16.

Poniamo che il momento d'inerzia dell'avversario rispetto a questo asse di rotazione sia I = 15 kg · m^2.

(a) Quale deve essere l'intensità della forza $\boldsymbol{F}$ se all'inizio volete far chinare in avanti l'avversario per portare il suo centro di massa sulla vostra anca (fig. 10.16a)?

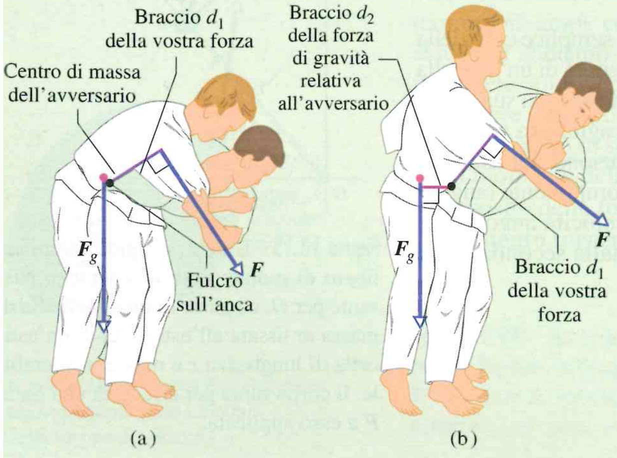


Figura 10.16 Problema svolto 10.7. Il classico colpo dell'anca del judo (a) eseguito correttamente e (b) eseguito in modo errato.

SOLUZIONE

La seconda legge di Newton nella forma rotazionale ci fornisce un'idea chiave: la forza $\boldsymbol{F}$ da voi applicata all'avversario è in relazione con l'accelerazione angolare α data dal problema. Quando i suoi piedi si sollevano dal pavimento, possiamo dire che sono solo tre le forze agenti su di lui: la vostra forza applicata $\boldsymbol{F}$, la forza normale $\boldsymbol{F}_N$ esercitata dal contatto del vostro corpo (non è disegnata in figura) e la forza di gravità $\boldsymbol{F}_g$. Per trovare il momento risultante di tutte queste forze ci occorrono i tre momenti di ciascuna di esse, tutti rispetto al perno di rotazione.

Dalla (10.34) ricaviamo che il momento torcente dovuto alla forza applicata $\boldsymbol{F}$ è uguale a $-d_1F$, ove il segno meno indica che tale momento tende a far ruotare il corpo in senso orario (visto come in figura). Il momento torcente dovuto alla forza normale $\boldsymbol{F}_N$ è nullo perché, agendo questa forza proprio sul perno, il braccio è zero.

Per valutare infine il momento dovuto alla forza di gravità, ci viene in aiuto un'idea chiave dal capitolo 9: possiamo assumere che $\boldsymbol{F}_g$ agisca nel centro di massa del vostro avversario. Se il centro di massa è proprio sul perno di rotazione, la forza di gravità ha braccio nullo e quindi il suo momento è zero. In questo caso l'unico momento agente sul corpo dell'avversario è quello della vostra forza applicata $\boldsymbol{F}$; possiamo dunque scrivere la (10.38) come

$$-d_1F = I\alpha,$$

da cui

$$F = \frac{-I\alpha}{d_1} = \frac{-(15\ \mathrm{kg\cdot m^2})(-6{,}0\ \mathrm{rad/s^2})}{0{,}30\ \mathrm{m}} = 300\ \mathrm{N}.$$

(b) Quale deve essere invece l'intensità della forza $\boldsymbol{F}$ se l'avversario rimane ritto in modo che la sua forza di gravità presenti un braccio $d_2 = 0{,}12$ m rispetto al fulcro (fig. 10.16b)?

SOLUZIONE

Qui le idee chiave sono le stesse della parte (a), con un'osservazione: il braccio della forza gravitazionale $\boldsymbol{F}_g$ non è più zero e quindi il suo momento ora è pari a d_2mg, positivo perché tende a far girare il corpo in senso antiorario. Ora riscriviamo l'equazione 10.38 come

$$-d_1F + d_2mg = I\alpha,$$

da cui

$$F = -\frac{I\alpha}{d_1} + \frac{d_2mg}{d_1}.$$

Dalla soluzione (a) sappiamo che il primo termine del secondo membro vale 300 N. Inserendo questo valore e gli altri dati noti, si trova

$$F = 300\ \mathrm{N} + \frac{(0{,}12\ \mathrm{m})(80\ \mathrm{kg})(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})}{0{,}30\ \mathrm{m}} = 613{,}6\ \mathrm{N} \approx 610\ \mathrm{N}.$$

Questo risultato indica che dovrete fare uno sforzo maggiore del 50 % se dal principio non riuscite a far chinare il vostro avversario fino a portare il suo centro di massa sulla vostra anca. Un bravo *judoka* conosce bene questa lezione di fisica. La fisica sta alla base di quasi tutte le arti marziali, delineate attraverso secoli di innumerevoli prove ed errori.

PROBLEMA SVOLTO 10.8 Seconda legge di Newton, rotazione, momento torcente, disco

La figura 10.17a rappresenta un disco uniforme di massa $M = 2{,}5$ kg e raggio $R = 20$ cm montato su un mozzo orizzontale fisso. Un blocco di massa $m = 1{,}2$ kg è appeso a un filo privo di massa avvolto intorno al bordo del disco. Trovate l'accelerazione di caduta del blocco, l'accelerazione angolare del disco e la tensione del filo. Il filo non slitta e il mozzo gira senza attrito.

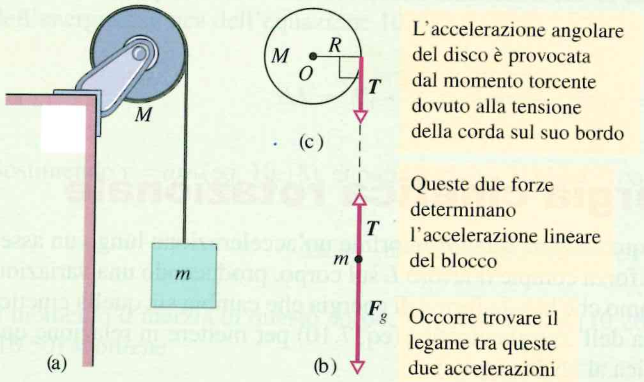


Figura 10.17 Problemi svolti 10.8 e 10.9. (a) Il blocco, cadendo, fa girare il disco. (b) Il diagramma delle forze relativo al blocco. (c) Un parziale diagramma delle forze relativo al disco.

SOLUZIONE

(1) Prendendo il blocco come un sistema, mettiamo in relazione l'accelerazione a subita dal blocco con le forze che agiscono su di esso tramite la seconda legge di Newton. (2) Essendo il disco un sistema, possiamo analogamente mettere in relazione l'accelerazione angolare α con il momento torcente che agisce sul disco tramite la seconda legge di Newton per la rotazione. (3) I moti del blocco e del disco hanno un punto in comune sul bordo di quest'ultimo, ove l'accelerazione a del blocco dev'essere pari all'accelerazione tangenziale a_t del bordo del disco. Facciamo attenzione a esplicitare i segni algebrici delle accelerazioni.

Forze sul blocco. Queste forze sono rappresentate nel diagramma delle forze della figura 10.17b relativo al blocco. La forza applicata dalla corda è $\boldsymbol{T}$ e la forza gravitazionale è $\boldsymbol{F}_g$ di modulo mg.

Per le componenti lungo l'asse verticale y abbiamo

$$T - mg = ma, \tag{10.39}$$

in cui a è il modulo dell'accelerazione (parallela all'asse y e rivolta verso il basso). Non possiamo però risolvere questa equazione rispetto ad a perché contiene anche l'incognita T.

Negli esempi trattati fin qui, in questi casi avevamo sempre superato la difficoltà prendendo in considerazione la componente lungo x. Qui invece rivolgiamo l'attenzione alla rotazione del disco e alla seconda legge di Newton nella sua forma rotazionale. Nel calcolo del momento della forza e del momento d'inerzia prendiamo come asse di riferimento quello del mozzo attorno al quale gira il disco (punto O della figura 10.17c).

Il momento della forza è dato dall'equazione 10.33. La forza gravitazionale agente sul disco e la forza normale $\boldsymbol{F}_N$ applicata dal perno sul disco agiscono al centro del medesimo e quindi i loro momenti rispetto a quel punto sono nulli. La forza $\boldsymbol{T}$ dovuta alla corda agisce invece con braccio $r = R$ tangenzialmente al bordo del disco. Il suo momento dunque vale $-RT$ ed è negativo perché tende a far ruotare il disco in senso orario. Poniamo α come componente scalare dell'accelerazione angolare, che è negativa e in verso orario. Dalla tabella 10.2c sappiamo che il momento d'inerzia del disco vale $I = \frac{1}{2}MR^2$. Applicando la seconda legge di Newton nella sua forma rotazionale $\tau_{\text{net}} = I\alpha$, otteniamo

$$-RT = \tfrac{1}{2}MR^2\alpha. \tag{10.40}$$

Anche questa equazione sembrerebbe inutile perché contiene due incognite, che non comprendono nemmeno la variabile richiesta, a. Ma può tornarci utile con la seguente considerazione: siccome la corda non scivola, poniamo che l'accelerazione lineare a del blocco e l'accelerazione lineare (tangenziale) a_t del bordo del disco siano uguali. Allora, grazie all'equazione 10.22 ($a_t = \alpha r$), la (10.40) si riduce a

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma. \tag{10.41}$$

Combinazione dei risultati. Combinando le equazioni 10.39 e 10.41 si può scrivere

$$a = -g\frac{2m}{M+2m} = -(9{,}8\ \mathrm{m/s^2})\frac{(2)(1{,}2\ \mathrm{kg})}{2{,}5\ \mathrm{kg} + (2)(1{,}2\ \mathrm{kg})} = -4{,}8\ \mathrm{m/s^2}.$$

Per trovare T useremo ora la (10.41):

$$T = -\tfrac{1}{2}Ma = -\tfrac{1}{2}(2{,}5\ \mathrm{kg})(-4{,}8\ \mathrm{m/s^2}) = 6{,}0\ \mathrm{N}.$$

Come era da aspettarsi, l'accelerazione di caduta del blocco è minore di g, e la tensione nel filo (= 6,0 N) è minore del peso del blocco appeso al filo ($mg = 11{,}8$ N). Vediamo inoltre che l'accelerazione del blocco e la tensione nel filo dipendono dalla massa del disco ma non dal suo raggio. A conferma di ciò, osserviamo che, nel caso di un disco privo di massa ($M = 0$), dalle formule sopra ricavate si avrebbe $a = g$ e $T = 0$. È facile immaginare per quel caso limite che il blocco scende in caduta libera trascinandosi dietro il filo senza alcuno sforzo. La componente scalare dell'accelerazione angolare del disco è dato dalla (10.22):

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{-4{,}8\ \mathrm{m/s^2}}{0{,}20\ \mathrm{m}} = -24\ \mathrm{rad/s^2}.$$

 ISBN 978-88-08-18229-6

10.8 LAVORO ED ENERGIA CINETICA ROTAZIONALE

Obiettivi di apprendimento

Dopo aver letto questo paragrafo dovreste essere in grado di…

10.29 Calcolare il lavoro svolto dal momento torcente che agisce su un corpo in rotazione mediante integrazione del momento rispetto all'angolo di rotazione.

10.30 Applicare il teorema dell'energia cinetica per mettere in relazione il lavoro svolto dal momento torcente con la variazione di energia cinetica rotazionale del corpo.

10.31 Calcolare il lavoro svolto da un momento torcente *costante* mediante la relazione che sussiste tra il lavoro e l'angolo spazzato dal corpo in rotazione.

10.32 Calcolare la potenza dovuta a un momento torcente mediante il rapporto tra il lavoro svolto e il tempo impiegato per compierlo.

10.33 Calcolare la potenza dovuta a un momento torcente per un certo istante attraverso il suo legame con la velocità angolare nel medesimo istante.

Idee chiave

- Le equazioni utilizzate per calcolare il lavoro e la potenza nel moto rotatorio sono analoghe a quelle per il moto traslatorio:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx,$$

e

$$P = \frac{dL}{dt} = \tau\omega.$$

- Se τ è costante, l'integrale si riduce a

$$L = \tau(\theta_f - \theta_i).$$

- La forma che assume il teorema dell'energia cinetica nel caso di moto rotatorio è

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = L.$$

Lavoro ed energia cinetica rotazionale

Dal capitolo 7 sappiamo che, quando una forza F imprime un'accelerazione lungo un asse a un corpo rigido di massa m, la forza compie il lavoro L sul corpo, producendo una variazione di energia cinetica K. Assumiamo che la sola forma di energia che cambia sia quella cinetica. Applichiamo quindi il teorema dell'energia cinetica (eq. 7.10) per mettere in relazione questa variazione di energia cinetica al lavoro svolto:

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = L \quad \text{(teorema dell'energia cinetica)}. \tag{10.42}$$

Se il moto è limitato all'asse x, possiamo calcolare il lavoro con l'equazione 7.32:

$$L = \int_{x_i}^{x_f} F\,dx \quad \text{(lavoro, moto unidimensionale)}. \tag{10.43}$$

Questa equazione, quando F è costante, si riduce a $L = Fd$, indicando con d lo spostamento del corpo. La potenza è il rapporto tra il lavoro e il lavoro impiegato a compierlo, definito con le equazioni 7.43 e 7.48:

$$P = \frac{dL}{dt} = Fv \quad \text{(potenza, moto unidimensionale)}. \tag{10.44}$$

Consideriamo ora un caso rotazionale simile. Quando un momento torcente accelera un corpo rigido in rotazione attorno a un asse fisso, compie il lavoro L sul corpo, il che consente all'energia cinetica rotazionale del corpo di variare. Assumiamo che la sola forma di energia che cambia sia quella cinetica. Possiamo ancora applicare il teorema dell'energia cinetica (eq. 7.10) per mettere in relazione questa variazione di energia cinetica al lavoro svolto, salvo il fatto che ora quest'energia cinetica è di tipo rotazionale:

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = L \quad \text{(teorema dell'energia cinetica)}. \tag{10.45}$$

Qui I rappresenta il momento d'inerzia del corpo attorno all'asse fisso, mentre ω_i e ω_f sono le velocità angolari del corpo prima e dopo lo svolgimento del lavoro.

Possiamo anche calcolare il lavoro con l'equivalente rotazionale dell'equazione 10.43:

$$L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau \, d\theta \quad \text{(lavoro, rotazione attorno a un asse fisso),} \qquad (10.46)$$

dove τ rappresenta il momento della forza che compie il lavoro L, mentre θ_i e θ_f sono le posizioni angolari del corpo prima e dopo lo svolgimento del lavoro. Se τ è costante, l'equazione 10.46 si riduce a

$$L = \tau(\theta_f - \theta_i) \quad \text{(lavoro, momento della forza costante).} \qquad (10.47)$$

L'equivalente dell'equazione 10.44 per la potenza nel caso rotazionale è

$$P = \frac{dL}{dt} = \tau\omega \quad \text{(potenza, rotazione attorno a un asse fisso).} \qquad (10.48)$$

La tabella 10.3 riassume le equazioni per il caso di rotazione di un corpo rigido attorno a un asse fisso, a confronto con le analoghe relazioni per il moto traslazionale.

Dimostrazione delle equazioni 10.45, 10.46 e 10.48

Consideriamo ancora il caso di figura 10.15, in cui una forza $\boldsymbol{F}$ fa ruotare un corpo rigido costituito da una particella di massa m fissata all'estremità di un'asta priva di massa. Durante la rotazione la forza compie lavoro sul corpo. Assumiamo che l'unica forma di energia influenzata da questo processo sia quella cinetica, il che ci autorizza ad applicare il teorema dell'energia cinetica dell'equazione 10.42:

$$\Delta K = K_f - K_i = \tfrac{1}{2}mv_f^2 - \tfrac{1}{2}mv_i^2 = L. \qquad (10.49)$$

Sostituendo $v = \omega r$ (eq. 10.18), si può riscrivere la (10.49) come

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}mr^2\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}mr^2\omega_i^2 = L. \qquad (10.50)$$

Il momento d'inerzia di questo corpo, calcolato con la (10.26), è $I = mr^2$. Inserendolo nella (10.50) si ottiene

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}I\omega_f^2 - \tfrac{1}{2}I\omega_i^2 = L,$$

che coincide con la (10.45). Malgrado questa equazione sia stata ricavata per un corpo puntiforme, è valida per qualunque corpo rigido esteso in rotazione attorno a un asse fisso.

TABELLA 10.3 Alcune formule corrispondenti per i moti di traslazione e di rotazione

Traslazione pura in direzione fissa		Rotazione pura intorno a un asse fisso	
Posizione	x	Posizione angolare	θ
Velocità	$v = dx/dt$	Velocità angolare	$\omega = d\theta/dt$
Accelerazione	$a = dv/dt$	Accelerazione angolare	$\alpha = d\omega/dt$
Massa (inerzia traslazionale)	m	Momento d'inerzia (inerzia rotazionale)	I
Seconda legge di Newton	$F_{net} = ma$	Seconda legge di Newton	$\tau_{net} = I\alpha$
Lavoro	$L = \int F\,dx$	Lavoro	$L = \int \tau\,d\theta$
Energia cinetica	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Energia cinetica	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Potenza (forza costante)	$P = Fv$	Potenza (momento della forza costante)	$P = \tau\omega$
Teorema dell'energia cinetica	$L = \Delta K$	Teorema dell'energia cinetica	$L = \Delta K$

 ISBN 978-88-08-18229-6

Ora veniamo al legame tra il lavoro L compiuto sul corpo di figura 10.15 e il momento τ agente sul corpo dovuto alla forza $\boldsymbol{F}$. Quando la particella percorre una distanza ds lungo la traiettoria circolare, solo la componente tangenziale F_t della forza è in grado di accelerarla su questa traiettoria. È quindi solo F_t a compiere lavoro sulla particella. Esprimiamo dunque il lavoro dL come F_tds. La lunghezza ds poi può essere sostituita da $r\,d\theta$, ove θ rappresenta l'angolo descritto in questo spostamento. Abbiamo in definitiva

$$dL = F_t\, r\, d\theta. \tag{10.51}$$

Dall'equazione 10.33 vediamo che $F_t\, r$ è il momento della forza τ, per cui

$$dL = \tau\, d\theta. \tag{10.52}$$

Il lavoro svolto durante uno spostamento angolare finito da θ_i a θ_f è perciò

$$L = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau\, d\theta.$$

Questa è proprio l'equazione 10.46. Rimane valida anche per qualsiasi corpo rigido esteso rotante intorno a un asse fisso.

Dalla (10.52) possiamo ricavare l'espressione della potenza P per il moto rotatorio:

$$P = \frac{dL}{dt} = \tau\frac{d\theta}{dt} = \tau\omega.$$

Questa equazione coincide con la (10.48).

PROBLEMA SVOLTO 10.9 Lavoro, energia cinetica rotazionale, momento torcente, disco

Il disco del problema svolto 10.8 nella disposizione rappresentata in figura 10.17 parte da fermo all'istante $t = 0$. La tensione della corda priva di massa è 6,0 N e l'accelerazione angolare del disco vale –24 rad/s^2. Qual è la sua energia cinetica rotazionale dopo 2,5 s?

SOLUZIONE

Possiamo trovare K con l'equazione 10.27. Sappiamo che $I = \frac{1}{2}MR^2$, ma non conosciamo ω all'istante $t = 2{,}5$ s. Poiché, però, l'accelerazione angolare, pari a –24 rad/s^2, è costante, sono applicabili le relazioni della tabella 10.1. Conoscendo α e ω_0 e volendo trovare ω, ci serviamo della (10.12):

$$\omega = \omega_0 + \alpha t = 0 + \alpha t = \alpha t.$$

Sostituendo $\omega = \alpha t$ e l'espressione del momento d'inerzia nella (10.27), si trova

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 = \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}MR^2\right)(\alpha t)^2 = \tfrac{1}{4}M(R\alpha t)^2 =$$
$$= \tfrac{1}{4}(2{,}5\text{ kg})[(0{,}20\text{ m})(-24\text{ rad/ s}^2)(2{,}5\text{ s})]^2 = 90\text{ J}.$$

Possiamo arrivare al risultato anche calcolando l'energia cinetica del disco dal lavoro svolto su di esso.

Calcoli. Dapprima calcoliamo la *variazione* di energia cinetica rotazionale applicando il teorema dell'energia cinetica (eq. 10.45). Posto $K = K_f$ e $K_i = 0$, scriviamo

$$K = K_i + L = 0 + L = L. \tag{10.53}$$

Poi dobbiamo calcolare il lavoro svolto sul disco a partire dal momento della forza ad esso applicata (eq. 10.46 o 10.47). L'unico momento torcente che svolge lavoro imprimendo un'accelerazione è quello esercitato dalla tensione $\boldsymbol{T}$ nel filo, pari a $-TR$. Inoltre il momento torcente è costante perché tale è anche l'accelerazione; dalla (10.47) si ricava pertanto

$$L = \tau(\theta_f - \theta_i) = -TR(\theta_f - \theta_i). \tag{10.54}$$

Ci occorre ancora un'altra idea chiave: dato che α è costante, possiamo ricorrere alla (10.13) per trovare $\theta_f - \theta_i$. Ponendo $\omega_i = 0$, abbiamo

$$\theta_f - \theta_i = \omega_i t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = 0 + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 = \tfrac{1}{2}\alpha t^2.$$

Sostituiamo questa espressione nella (10.54) e il risultato nella (10.53). Poniamo $T = 6{,}0$ N e $\alpha = -24$ rad/s^2. Si ottiene così

$$K = L = -TR(\theta_f - \theta_i) = -TR\left(\tfrac{1}{2}\alpha t^2\right) = -\tfrac{1}{2}TR\alpha t^2 =$$
$$= -\tfrac{1}{2}(6{,}0\text{ N})(0{,}20\text{ m})(-24\text{ rad/ s}^2)(2{,}5\text{ s})^2 = 90\text{ J}.$$

RIEPILOGO & SOMMARIO

Posizione angolare Per descrivere la rotazione di un corpo rigido intorno a un asse fisso, chiamato **asse di rotazione**, stabiliamo una **linea di riferimento** fissa rispetto al corpo, tracciata perpendicolarmente a quell'asse, e rotante solidalmente con il corpo. Misuriamo la posizione angolare θ di questa linea rispetto a una direzione fissa: se usiamo come unità di misura il **radiante**, possiamo scrivere

$$\theta = \frac{s}{r} \qquad \text{(angoli misurati in radianti)}, \qquad (10.1)$$

ove s è la lunghezza dell'arco, di una circonferenza di raggio r, sotteso dall'angolo θ. La relazione fra la misura in radianti e le misure in angoli giro e gradi sessagesimali è

$$1 \text{ angolo giro} = 360° = 2\pi \text{ rad}. \qquad (10.2)$$

Spostamento angolare Un corpo che ruota intorno a un asse di rotazione, variando la sua posizione angolare da θ_1 a θ_2, effettua uno **spostamento angolare**

$$\Delta\theta = \theta_2 - \theta_1, \qquad (10.4)$$

ove $\Delta\theta$ è positivo per rotazione antioraria, negativo per rotazione in senso orario.

Velocità angolare vettoriale o scalare Se un corpo ruota compiendo uno spostamento angolare $\Delta\theta$ in un intervallo di tempo Δt, la sua **velocità angolare media** $\overline{\omega}$ è

$$\overline{\omega} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}. \qquad (10.5)$$

La **velocità angolare (istantanea)** ω del corpo vale

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}. \qquad (10.6)$$

Sia $\overline{\omega}$ sia ω si possono considerare come le componenti secondo l'asse di rotazione di due vettori $\overline{\boldsymbol{\omega}}$ e $\boldsymbol{\omega}$ con la direzione dell'asse e il verso definito dalla regola della mano destra, illustrata nella figura 10.6. Tali componenti sono positive per rotazione in senso antiorario, e negative per rotazione in senso orario. Il modulo della velocità angolare (vettoriale) del corpo è la **velocità angolare scalare**.

Accelerazione angolare Se la velocità angolare di un corpo varia da ω_1 a ω_2 in un intervallo di tempo $\Delta t = (t_2 - t_1)$, l'accelerazione angolare media $\overline{\alpha}$ del corpo è

$$\overline{\alpha} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}. \qquad (10.7)$$

L'**accelerazione angolare** (**istantanea**) α di un corpo è data da

$$\alpha = \frac{d\omega}{dt}. \qquad (10.8)$$

Sia ad $\overline{\alpha}$ sia ad α si possono associare vettori come si è fatto per ω.

Equazioni cinematiche per accelerazione angolare costante L'*accelerazione angolare costante* (α = costante) è un caso particolare molto importante di moto rotatorio. Le equazioni cinematiche specifiche, date dalla tabella 10.1, sono:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \qquad (10.12)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (10.13)$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha(\theta - \theta_0) \qquad (10.14)$$

$$\theta - \theta_0 = \tfrac{1}{2}(\omega_0 + \omega)t \qquad (10.15)$$

$$\theta - \theta_0 = \omega t - \tfrac{1}{2}\alpha t^2. \qquad (10.16)$$

Variabili lineari e angolari Un punto appartenente a un corpo rigido rotante, situato a una *distanza r, misurata perpendicolarmente*, dall'asse di rotazione, si muove su una circonferenza di raggio r. Se il corpo ruota di un angolo θ, il punto descrive un arco di lunghezza s data da

$$s = \theta r \qquad \text{(angoli misurati in radianti)}, \qquad (10.17)$$

ove θ è espresso in radianti.

Il vettore velocità lineare $\boldsymbol{v}$ del punto è tangente alla circonferenza; la sua velocità lineare scalare v (il modulo, o l'ampiezza, del vettore velocità) è data dalla

$$v = \omega r \qquad \text{(angoli misurati in radianti)}, \qquad (10.18)$$

ove ω rappresenta la velocità angolare (in radianti al secondo) del corpo.

L'accelerazione lineare $\boldsymbol{a}$ del punto ha due componenti, una tangenziale e una radiale. Quella tangenziale è

$$a_t = \alpha r \qquad \text{(angoli misurati in radianti)}, \qquad (10.22)$$

ove α è la componente scalare dell'accelerazione angolare del corpo, espressa in rad/s^2. La componente radiale di $\boldsymbol{a}$ vale

$$a_r = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r \qquad \text{(angoli misurati in radianti)}. \qquad (10.23)$$

Se il punto è in *moto circolare uniforme*, il periodo T del punto e del corpo è

$$T = \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \text{(angoli misurati in radianti)}. \qquad (10.19, 10.20)$$

Energia cinetica rotazionale e momento d'inerzia L'energia cinetica K di un corpo rigido *rotante intorno a un asse fisso* è data da

$$K = \tfrac{1}{2}I\omega^2 \qquad \text{(angoli misurati in radianti)}, \qquad (10.27)$$

ove I è il **momento d'inerzia** del corpo, definito come

$$I = \sum m_i r_i^2, \qquad (10.26)$$

per un sistema di particelle distinte, e come

$$I = \int r^2 dm, \qquad (10.28)$$

per un corpo la cui massa sia distribuita con continuità. In queste espressioni r e r_i rappresentano la distanza dall'asse di rotazione (misurata perpendicolarmente) di ogni elemento della massa del corpo e l'integrazione è condotta sull'intero corpo per includere tutti gli elementi di massa.

Teorema degli assi paralleli Il *teorema degli assi paralleli* o *teorema di Huygens-Steiner* stabilisce una relazione fra il valore del momento d'inerzia calcolato rispetto a un asse qualsiasi e quello calcolato rispetto a un asse, parallelo al precedente, passante per il centro di massa del corpo:

$$I = I_{cdm} + Mh^2, \qquad (10.29)$$

ove h è la distanza (misurata perpendicolarmente) fra i due assi paralleli e I_{cdm} è il momento d'inerzia del corpo rispetto all'asse passante per il centro di massa.

Momento torcente Il *momento torcente* è l'azione di rotazione o di torsione intorno a un asse, esercitata su un corpo da una forza $\boldsymbol{F}$. Se $\boldsymbol{F}$ è applicata a un punto definito dal vettore di posizione $\boldsymbol{r}$ rispetto all'asse, il momento della forza $\boldsymbol{\tau}$ (un vettore) è dato, in termini scalari, da

$$\tau = rF_t = r_\perp F = rF \sin\phi, \qquad (10.33, 10.34, 10.32)$$