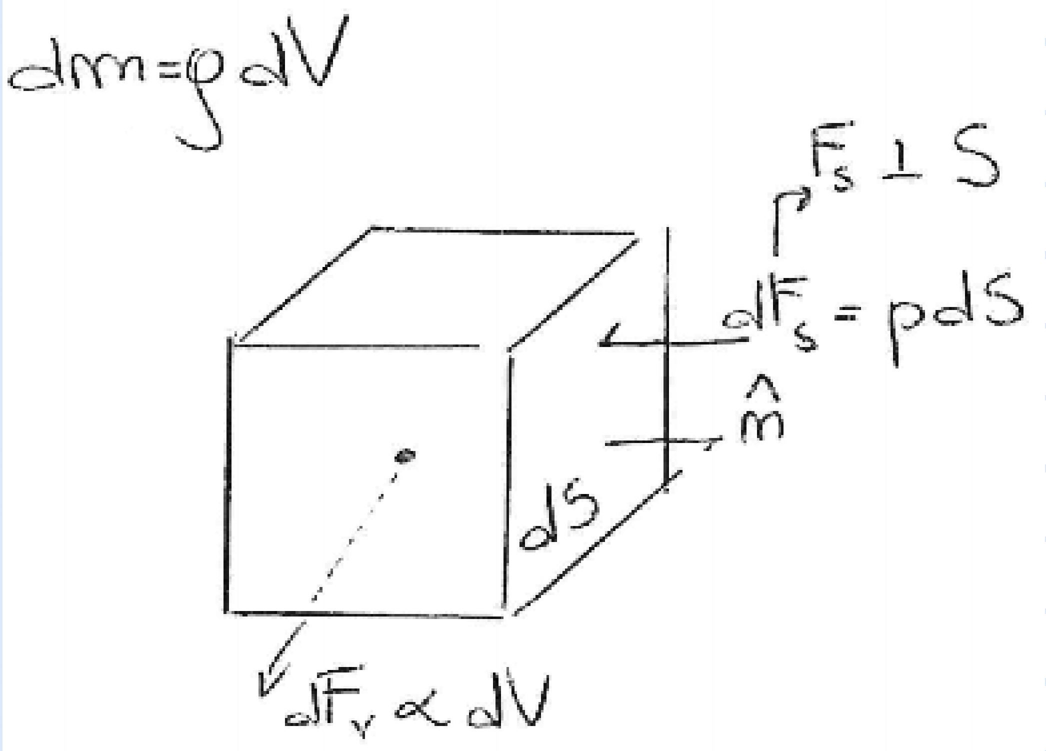
Recap

Fluidi:



- Elemento di Massa fluido: $dm = \rho\, dV$ [Kg]
- Densità: $\rho = dm/dV$; se costante nel volume $\rho = m/V$ $[Kg/m^3]$
- Pressione: $p = dF/dS$; o se F costante sulla sup. $p = F/S$ $[Pa] = N/m^2$

$F \perp$ alla sup.ce

$1\,bar = 10^5\,Pa$

Per un elemento di fluido in equilibrio statico vale

$$d\vec{F}_p + d\vec{F}_v = 0 \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \rho f_x \; ; \; \frac{\partial p}{\partial y} = \rho f_y \; ; \; \frac{\partial p}{\partial z} = \rho f_z$$

$$(\vec{\nabla} p = \rho \vec{f}\,)$$

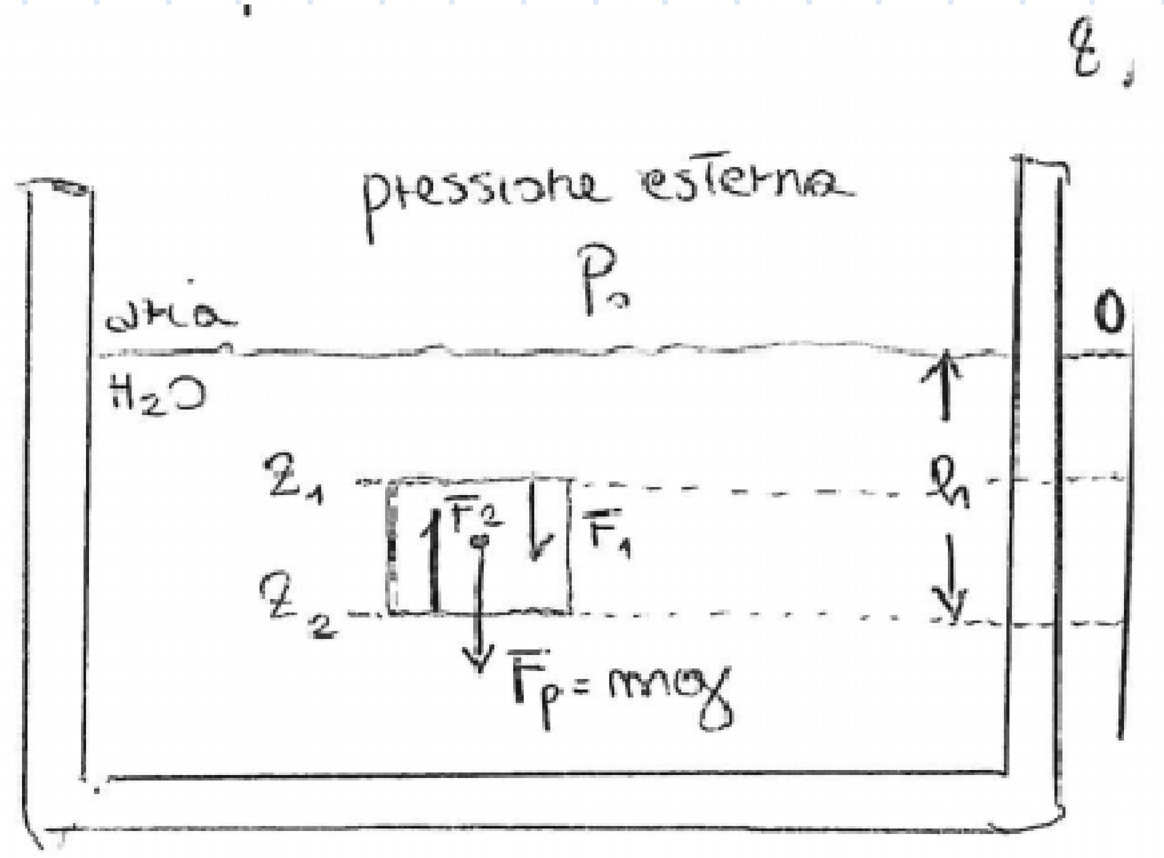
CONDIZIONE EQUILIBRIO STATICO di un FLUIDO

Recap

Equilibrio statico in presenza della forza peso:

$$p(h) = p_0 + \rho g h \qquad \text{(Legge di Stevino)}$$

p_0: pressione esterna — $\rho g h$: pressione colonna di fluido sovrastante



Principio di Pascal

Un cambiamento di pressione applicato ad un fluido confinato viene trasmesso inalterato ad ogni sua porzione e alle pareti del recipiente:

$\therefore$

i) $p = p_{ext} + \rho g h$

ii) $p' = p'_{ext} + \rho g h$ $\qquad p'_{ext} = p_{ext} + \Delta p_{ext}$

$\Delta p = p' - p = p'_{ext} - p_{ext} = \Delta p_{ext} \rightarrow$ essendo ind.p.te da h, è valido $\forall$ p.to del fluido

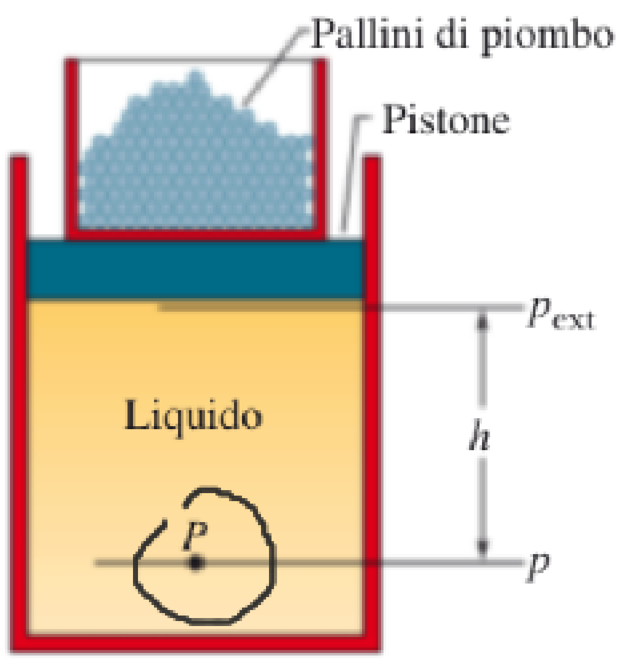


Figura 14.7 I pesi caricati sul pistone creano una pressione esterna p_{ext} in cima al liquido incomprimibile. Se si aumenta p_{ext}, aggiungendo altri pesi, la pressione aumenta della stessa quantità in tutti i punti del liquido.

Esempio: Martinetto Idraulico

$$\Delta p = \frac{F_a}{S_a} = \frac{F_s}{S_s}$$

$$F_s = F_a \underbrace{\boxed{\frac{S_s}{S_A}}}_{>1} > F_a \Rightarrow$$

ovvero la forza di sollevamento è maggiore di quella che ha azionato lo strumento

$$V = S_a d_a = S_s d_s$$

$$d_s = d_a \overbrace{\boxed{S_a / S_s}}^{<1} < d_a$$

$$W_s = F_s d_s = \left(F_a \frac{\cancel{S_s}}{\cancel{S_A}}\right)\left(d_a \frac{\cancel{S_a}}{\cancel{S_s}}\right) = F_a d_a = W_a$$

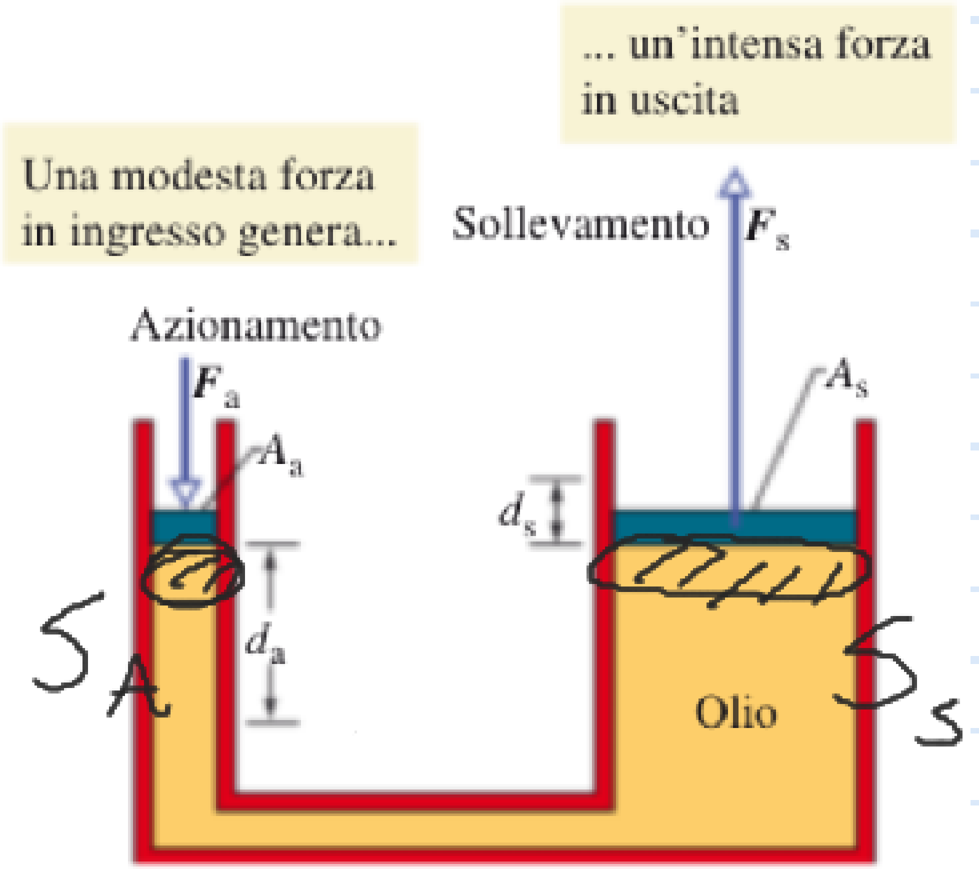


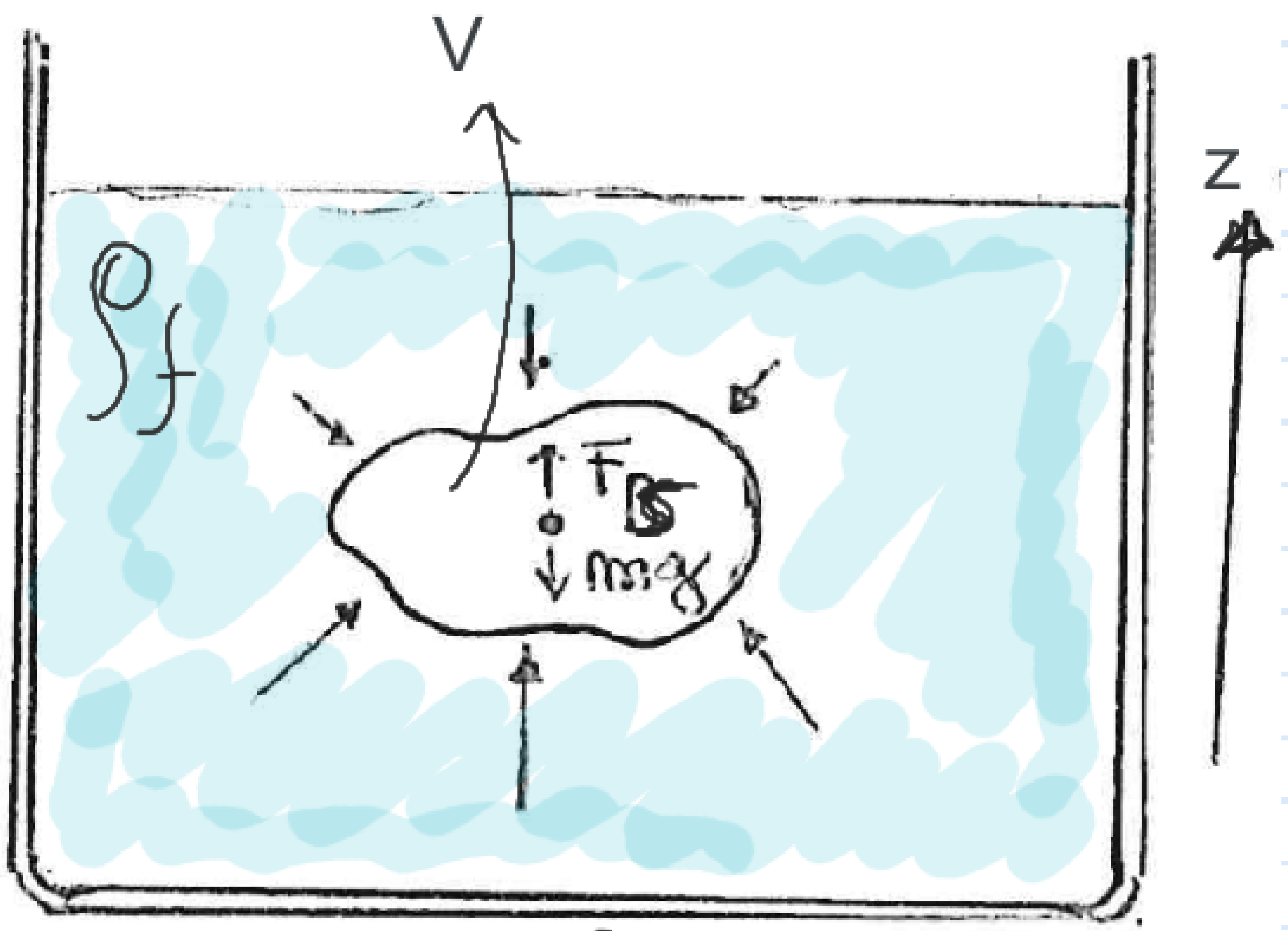
Figura 14.8 Un dispositivo idraulico utilizzato per amplificare la forza F_a. Il lavoro compiuto dalla forza F_s tuttavia, non è amplificato ed è lo stesso per le due forze nei due pistoni.

Principio di Archimede:

Dalla condizione di equilibrio

$$\vec{F}_s + m\vec{g} = 0 \Rightarrow F_s - mg = 0$$

$$F_s = mg = \rho_f V g$$



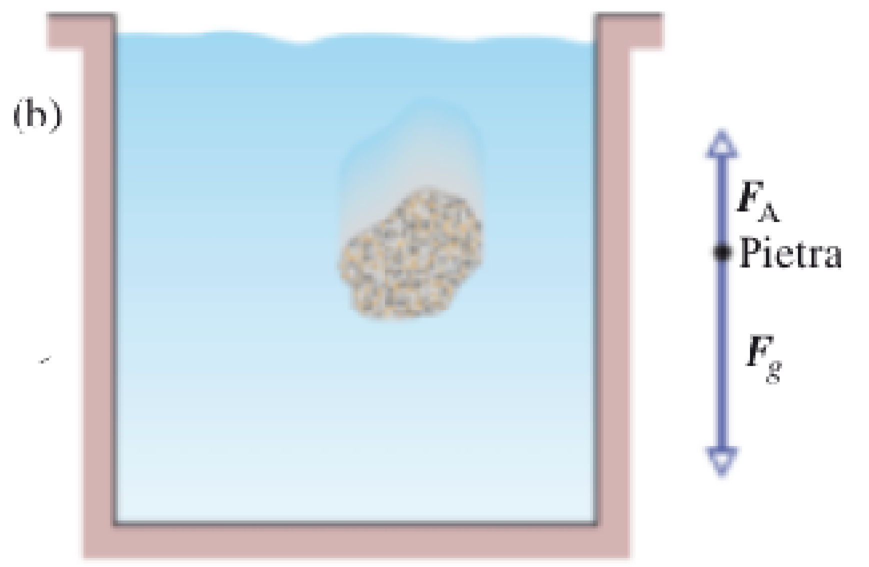
Se sostituisco il mio volume di fluido con un'altra sostanza

$$F_{TOT} = F_s - m'g = \rho_f V g - \rho V g = (\rho_f - \rho) V g$$

Principio di Archimede:

Se $\rho > \rho_f \Rightarrow F_{tot} = \underbrace{(\rho_f - \rho)}_{<0} V g \Rightarrow$ l'oggetto affonda

Se $\rho < \rho_f \Rightarrow F_{tot} = \underbrace{(\rho_f - \rho)}_{>0} V g \Rightarrow$ l'oggetto galleggia



La forza netta è diretta verso il basso, sicché la pietra accelera verso il basso

La forza netta è rivolta verso l'alto, sicché il legno accelera verso l'alto

Principio di Archimede:

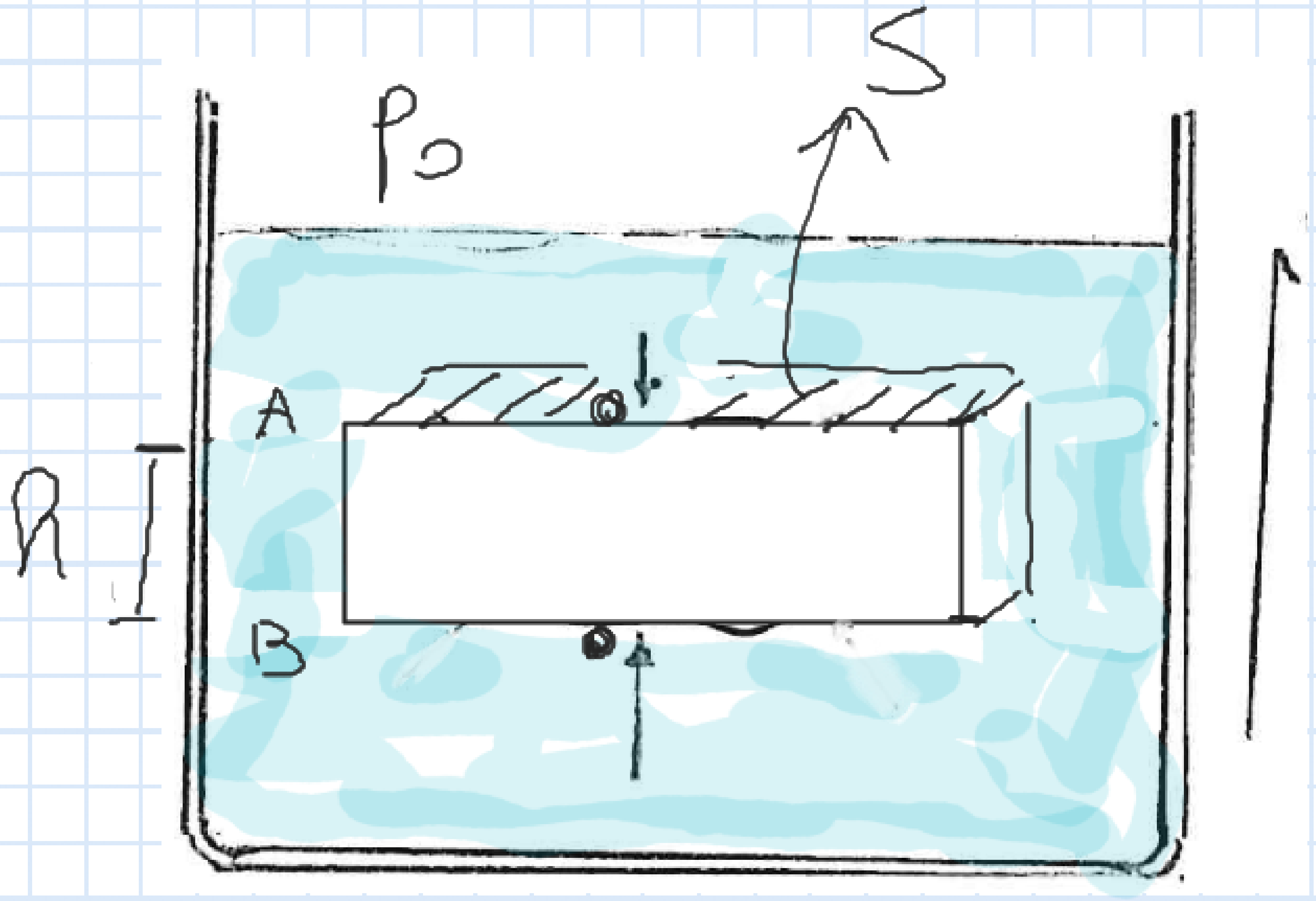
$$\Delta p = \rho g h$$

$$p_A = p_0 + \rho g h_A$$

$$p_B = p_0 + \rho g h_B$$

$$\Delta p = p_A - p_B = \rho g \overbrace{(h_A - h_B)}^{h}$$

$$F_A = \Delta p S = \rho g h S = \rho_f g V$$



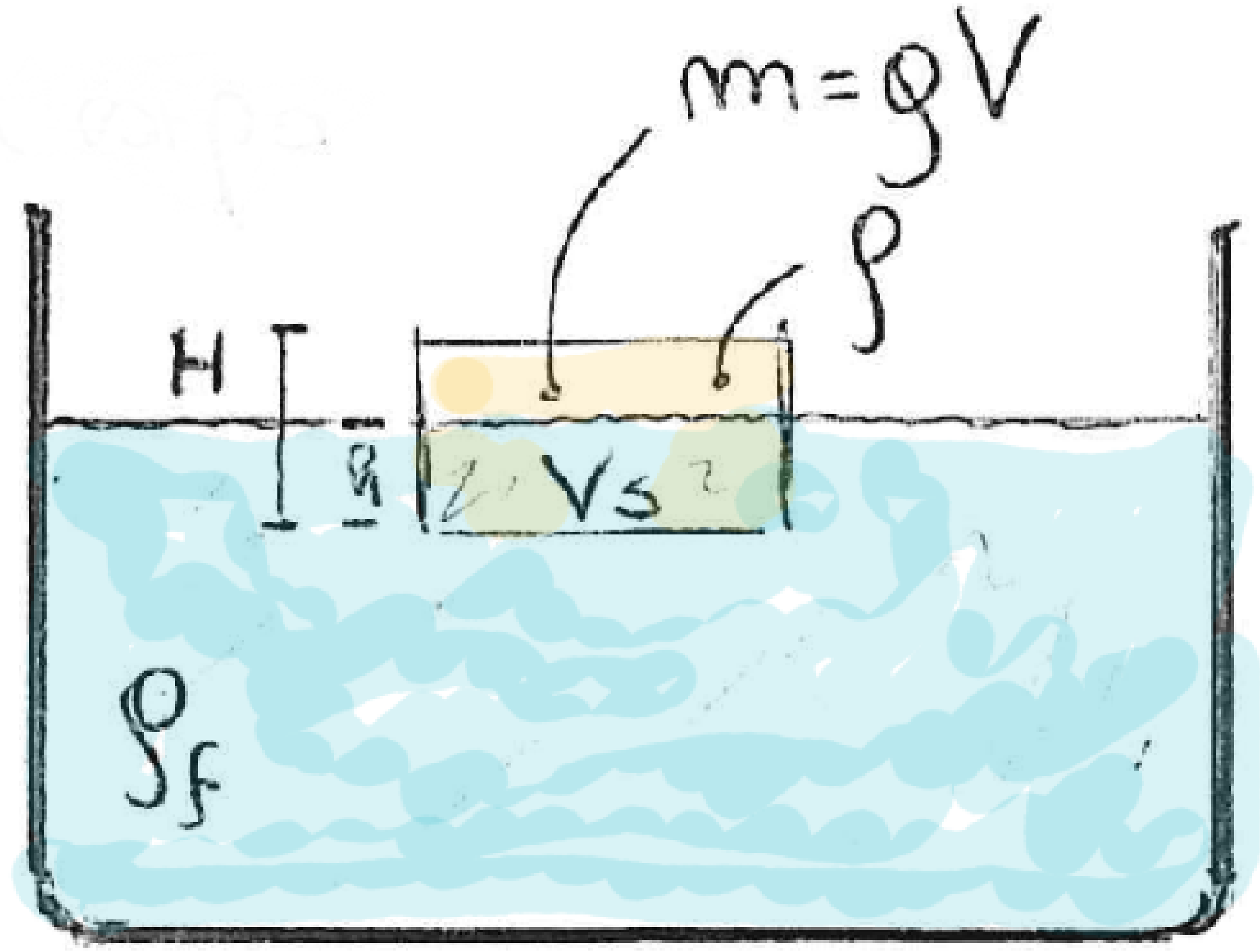
Esempio: Densita' di un corpo che galleggia

$m = \rho V$

V_s = volume sommerso

H = altezza parallelepipedo

h = altezza sommersa



$$F_s = \underbrace{\rho_f V_s g}_{} = mg = \underbrace{\rho V g}_{}$$

$$\rho_f V_s = \rho V \Rightarrow \rho = \rho_f \frac{V_s}{V} = \rho_f \frac{\cancel{S}h}{\cancel{S}H} = \rho_f \frac{h}{H}$$

<1

Esempio: Volume sommerso di un iceberg

Calcolare la percentuale di volume dell'iceberg che emerge dall'acqua

$$F_S = \rho_{sea} V_S \cancel{g} = \underbrace{\rho_{ice} V}_{m_{ice}} \cancel{g}$$

$$\frac{V_s}{V} = \frac{\rho_{ice}}{\rho_{sea}} = \frac{917 \ kg/m^3}{1024 \ kg/m^3} \simeq 0,9 \Rightarrow 90\%$$

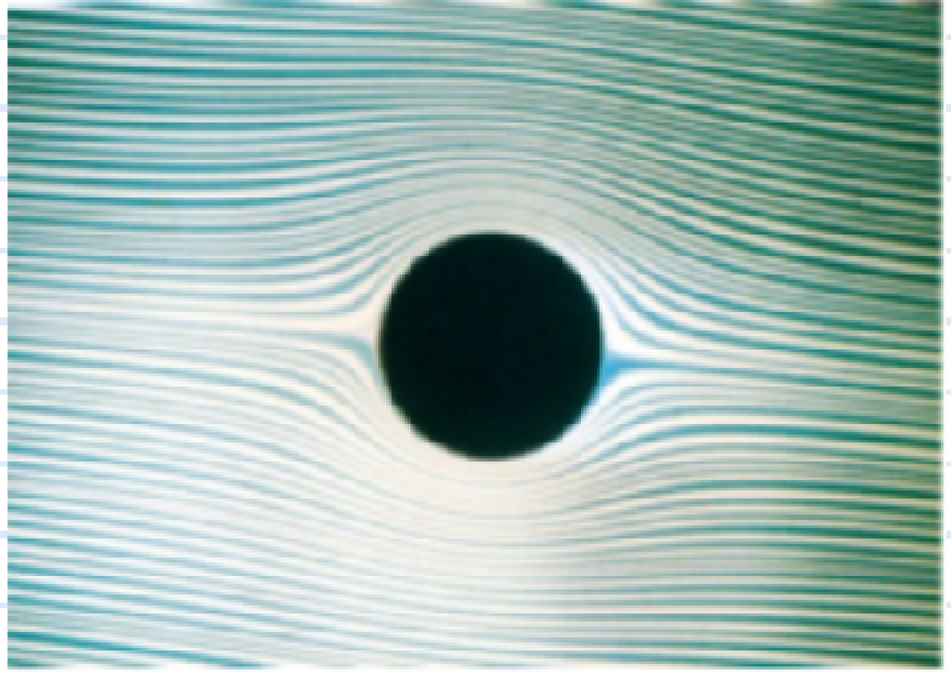
$$V_e = 1 - \frac{V_s}{V} = 1 - 0,9 = 0,1 \Rightarrow 10\%$$

Fluidi Ideali in Moto:

→ Fluido NON viscoso
Incomprimibile $\rho = cost$

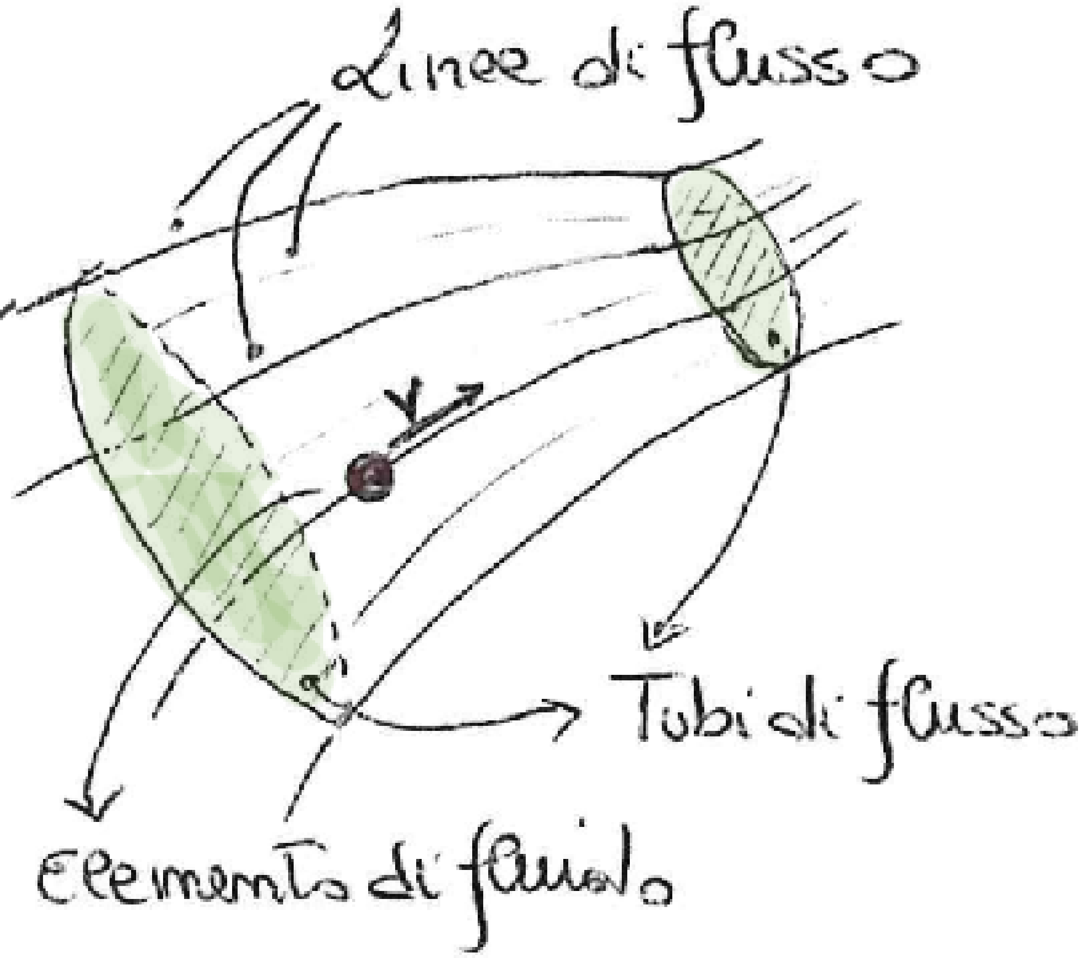
- Regime Stazionario: la velocità del fluido, nel tempo, non cambia

⇒ In regime stazionario le linee di flusso hanno una configurazione costante nel tempo e NON si intersecano



Per gentile concessione di D.H. Peregrine, University of Bristol.

Figura 14.13 Il flusso laminare di un fluido intorno a un cilindro, messo in evidenza da un tracciante colorato.



Equazione di Continuità:

$$\Delta V_1 = \Delta V_2$$

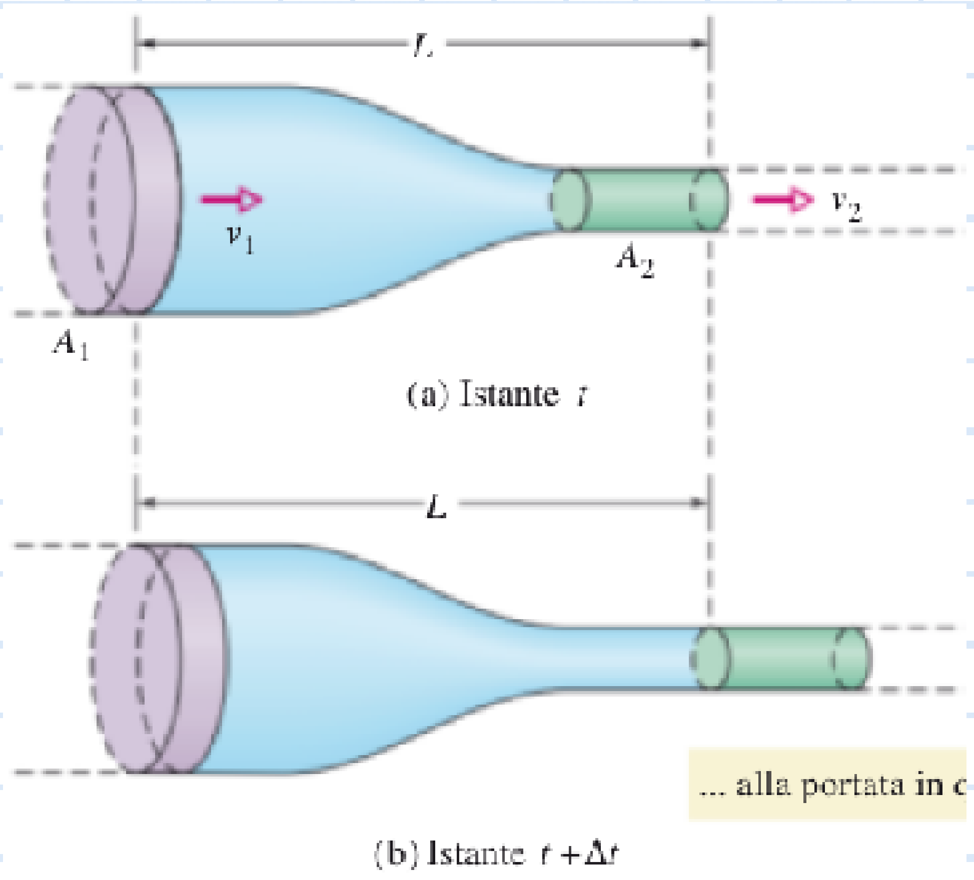
$$S_1 h_1 = S_2 h_2$$

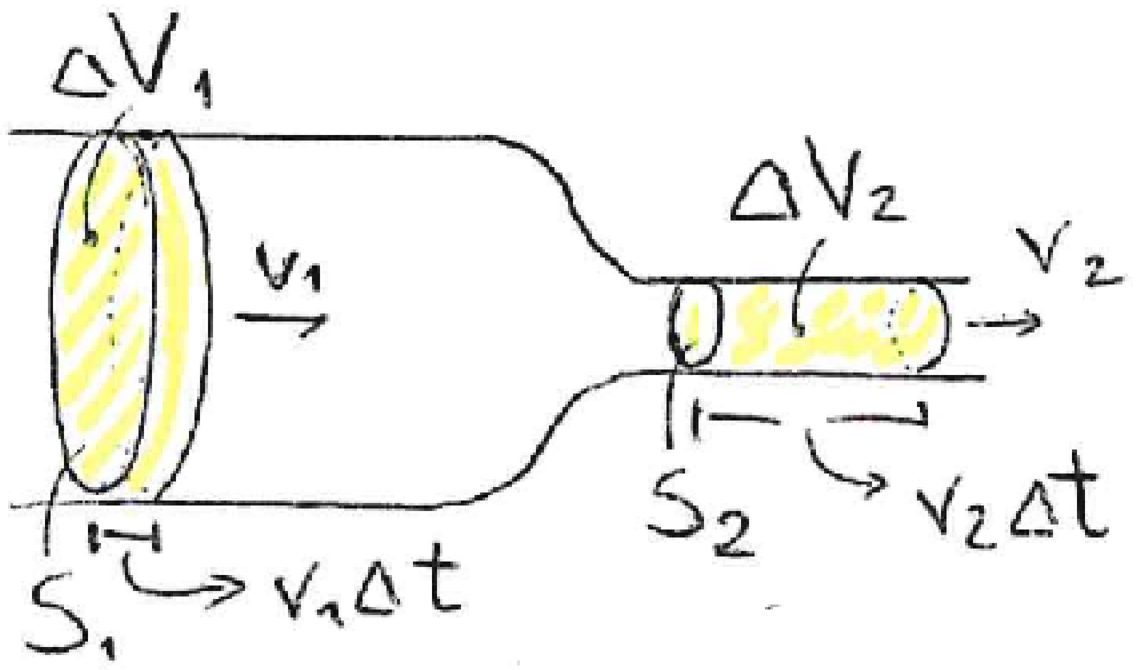
$$h_1 = v_1 \Delta t \qquad h_2 = v_2 \Delta t$$

$$S_1 v_1 \cancel{\Delta t} = S_2 v_2 \cancel{\Delta t}$$

$R = S v \Rightarrow$ Volume di fluido che scorre attraverso la sezione nell'unità di tempo $[m^3/s]$

$$R = \text{cost}$$





Esercizio: Innaffiatore

$D = 0{,}02\ m$

24 fori $\quad d = 10^{-3}\ m$

$v_1 = 0{,}9\ m/s$

Applichiamo l'eq. di Continuità

$$v_1 S_1 = 24\, v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = \frac{v_1 S_1}{24\, S_2}$$

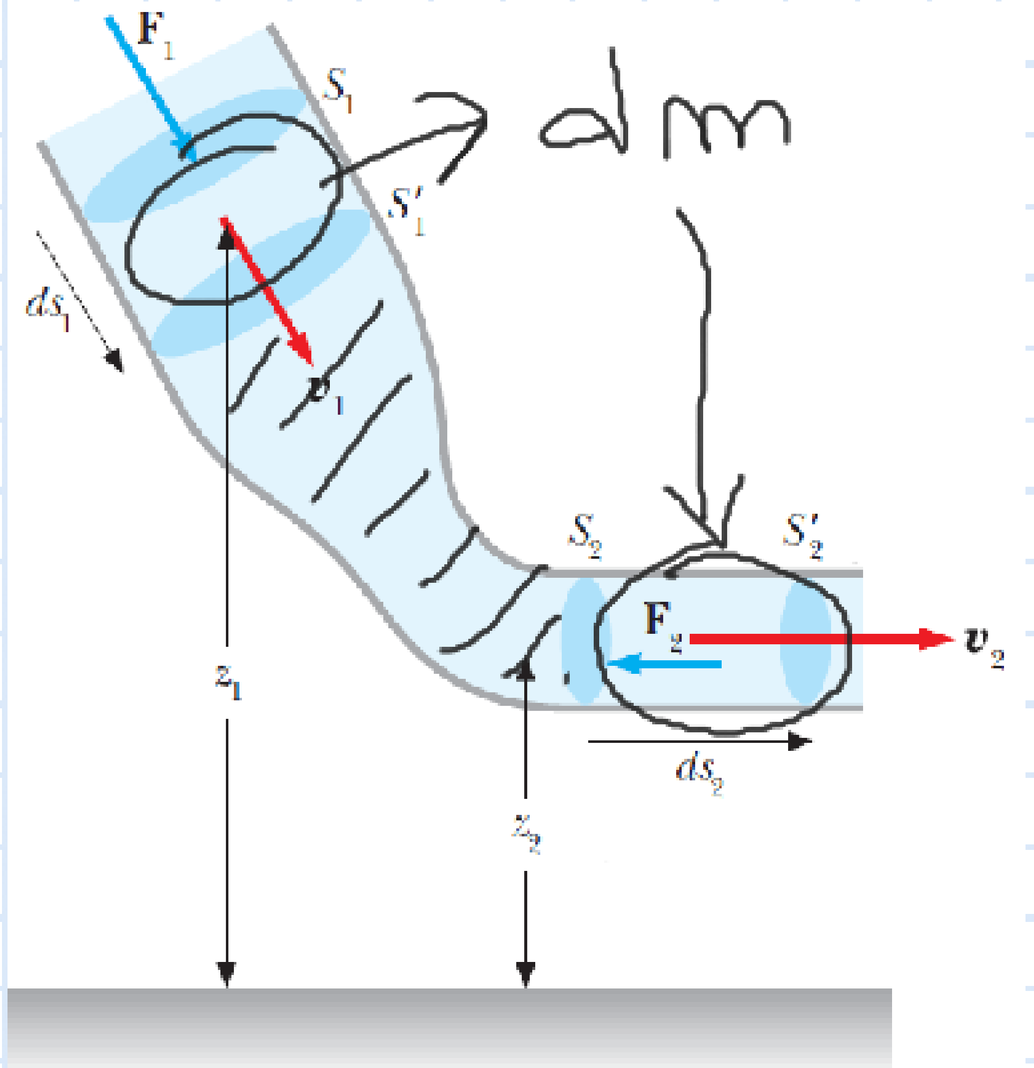
$$S_1 = \pi R^2 = \pi \left(\frac{D}{2}\right)^2$$

$$S_2 = \pi r^2 = \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2$$

$$= \frac{v_1}{24} \frac{D^2}{d^2} \simeq 15\ m/s$$

Equazione di Bernulli

→ Vogliamo ricavare una relazione tra la velocità e pressione del fluido ma non p.ti della condutura



$$dV_1 = S_1 ds_1 = dV_2 = S_2 ds_2$$

- Applichiamo la conservazione dell'energia

i) $dW = dE_k$

dW → Lavoro compiuto dalle forze

dE_k → Variazione energia cinetica

$$dW = dW_{peso} + dW_{pr}$$

$$dW_{peso} = -dE_p = -dm\,g(z_2 - z_1) =$$
$$= -\rho\, dV g(z_2 - z_1)$$

Equazione di Bernulli

$$dW_{pr} = \underbrace{\vec{F}_1 \cdot d\vec{s}_1}_{\text{dovuto al liquido a monte}} + \overbrace{\vec{F}_2 \cdot d\vec{s}_2}^{\text{liquido a valle}} = \qquad P = \frac{F}{S}$$

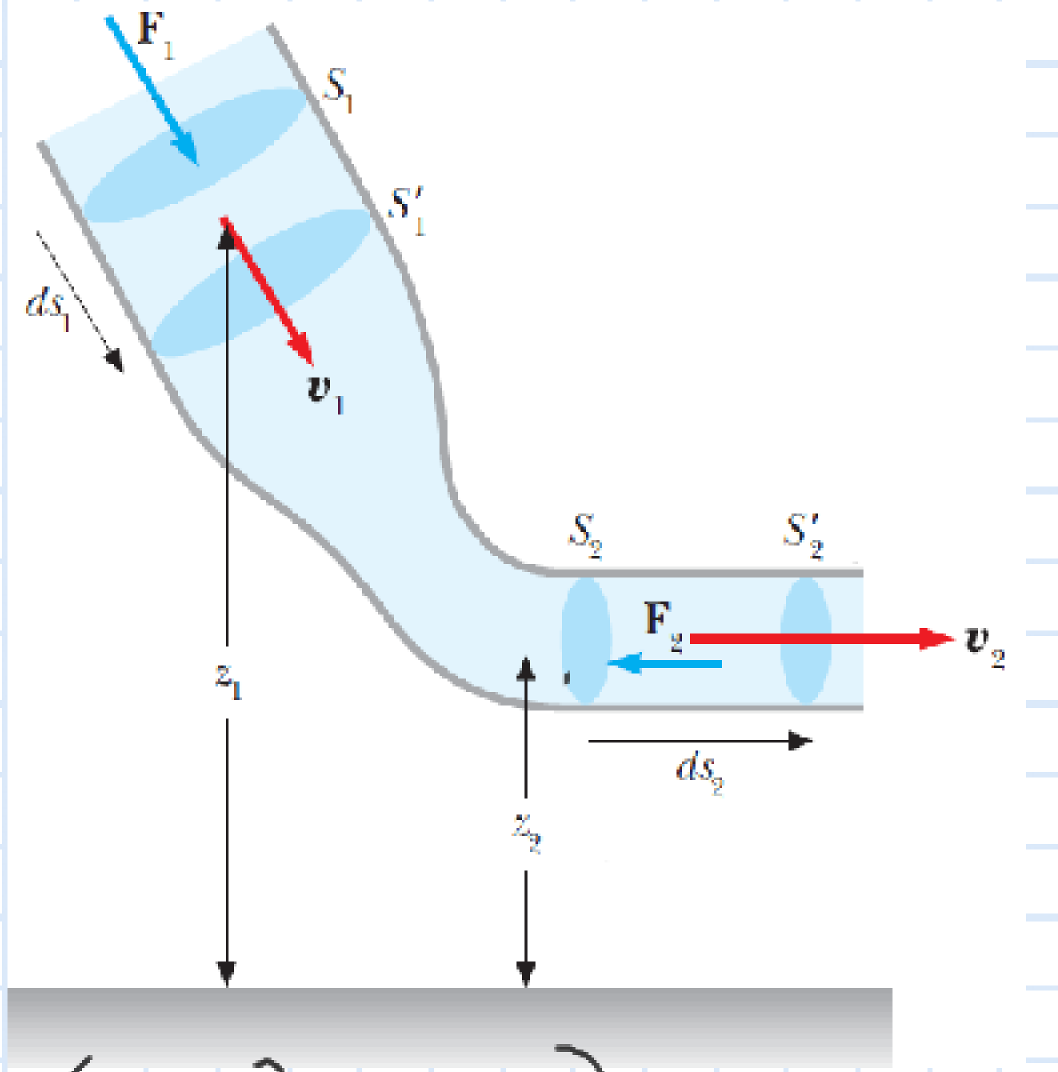
$$= p_1 \underbrace{S_1 ds_1}_{dV_1} - p_2 \underbrace{S_2 ds_2}_{dV_2} = (p_1 - p_2)\, dV$$

$$dV_1 = dV_2$$

$$\cdot\ dE_k = \frac{1}{2} dm\, v_2^2 - \frac{1}{2} dm\, v_1^2 = \frac{1}{2} \rho\, dV \left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$-\rho \cancel{dV} g (z_2 - z_1) + (p_1 - p_2) \cancel{dV} = \frac{1}{2} \rho \cancel{dV} \left(v_2^2 - v_1^2\right)$$

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z_1 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z_2$$



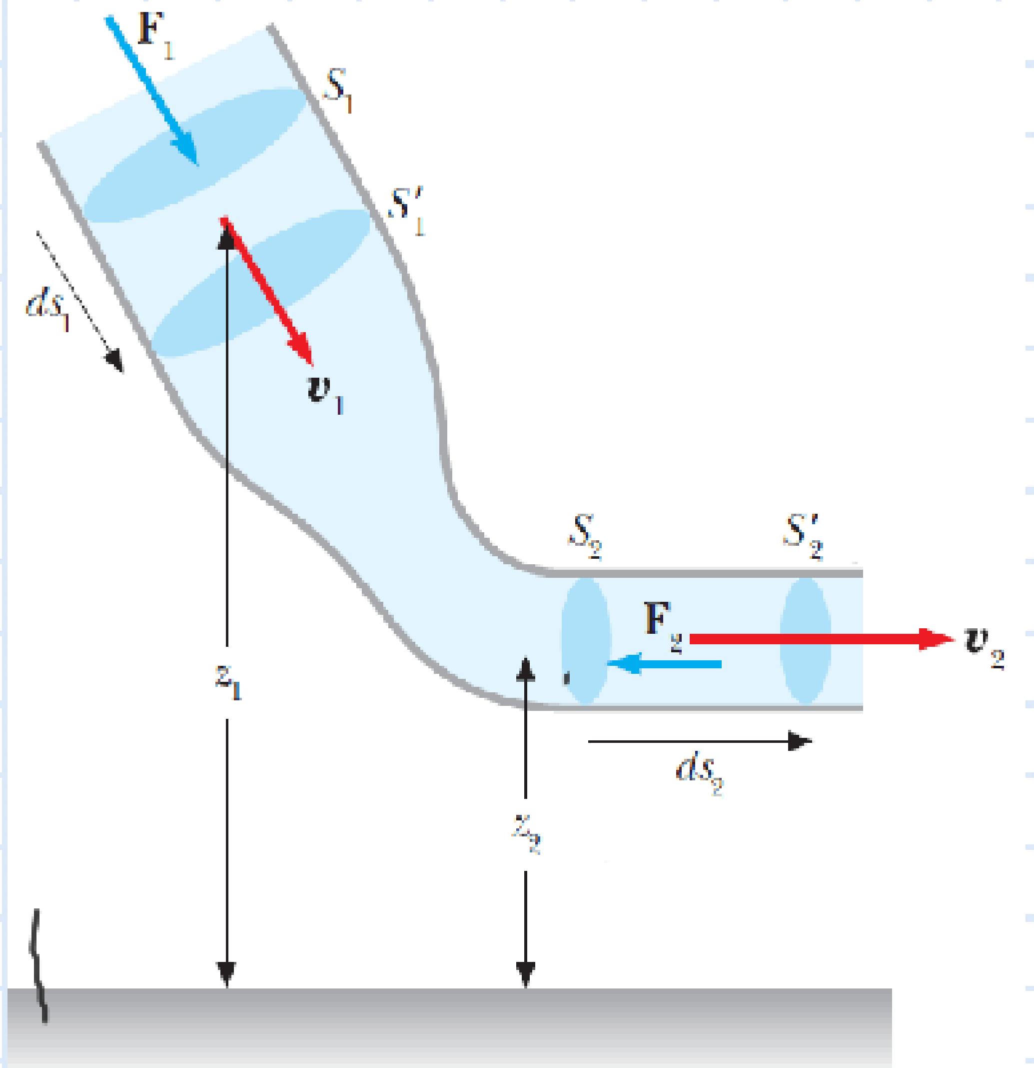
Equazione di Bernulli

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g h = \text{Costante}$$

- Per un fluido statico $(v = 0)$:

$$P_1 + \rho g h_1 = P_2 + \rho g h_2$$

$$P_1 = P_2 + \rho g (h_2 - h_1) \Rightarrow \text{Eq di Stevino}$$

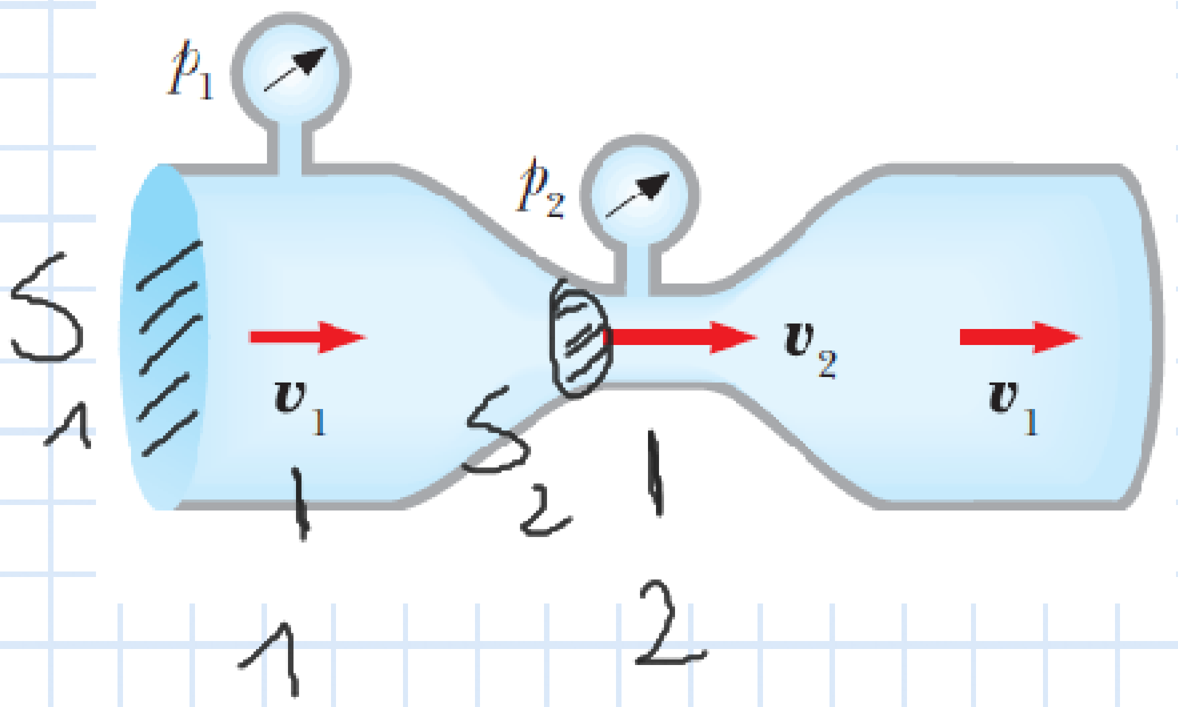


- Per una conduttura orizzontale $(h_1 = h_2)$

$$P + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{cost} \Rightarrow$$ Se in un tratto del tubo aumenta la velocità, si riduce la pressione e viceversa

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

Es: Tubo di Venturi



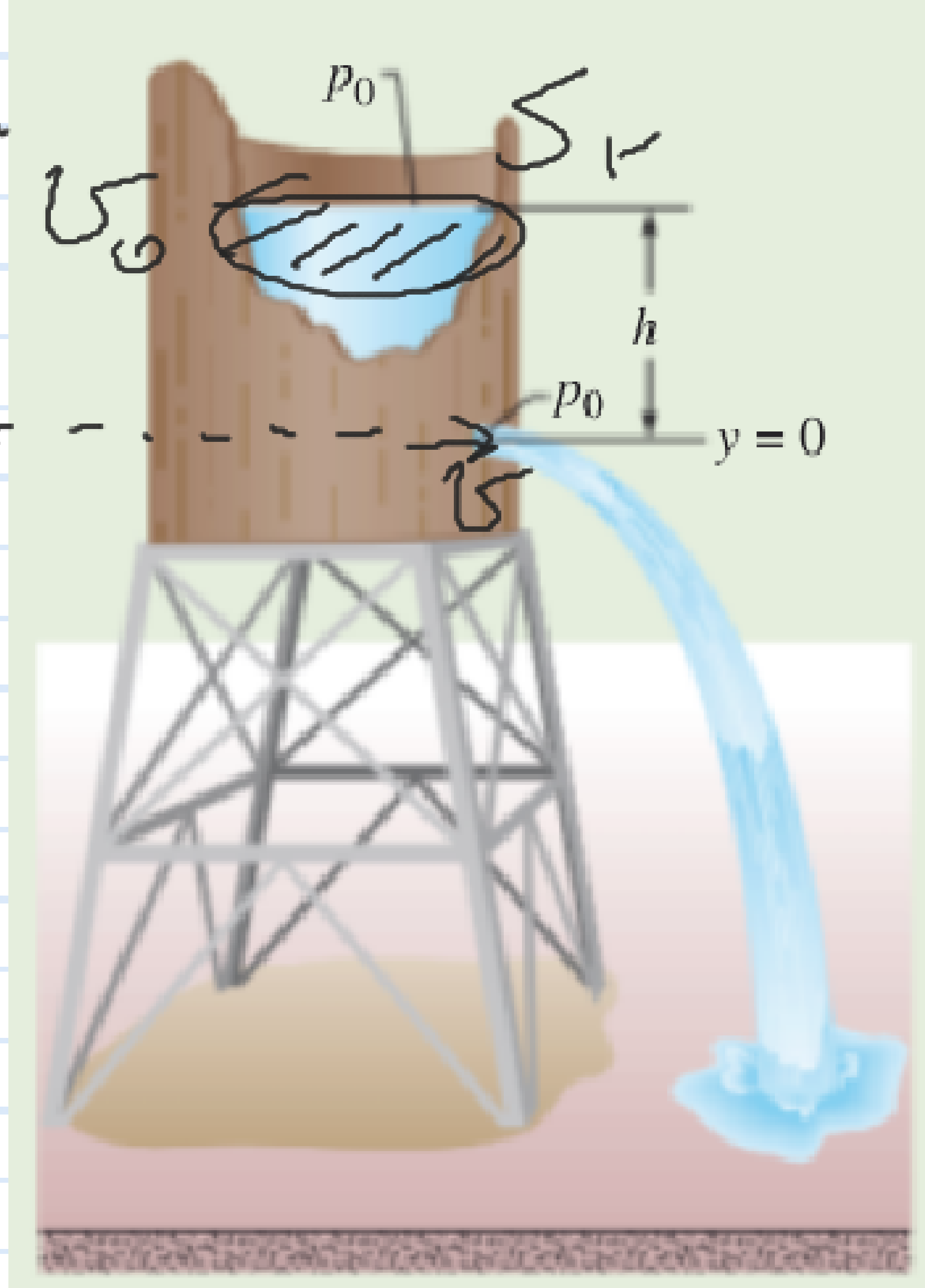
i) $P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$

i) $v_1 S_1 = v_2 S_2 \Rightarrow v_2 = v_1 \frac{S_1}{S_2}$

$$v_2^2 = 2\frac{(P_1 - P_2)}{\rho}\frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}$$

Es: Teorema di Torricelli

Con che velocità esce l'acqua dal foro?



$S_r \gg S_f$

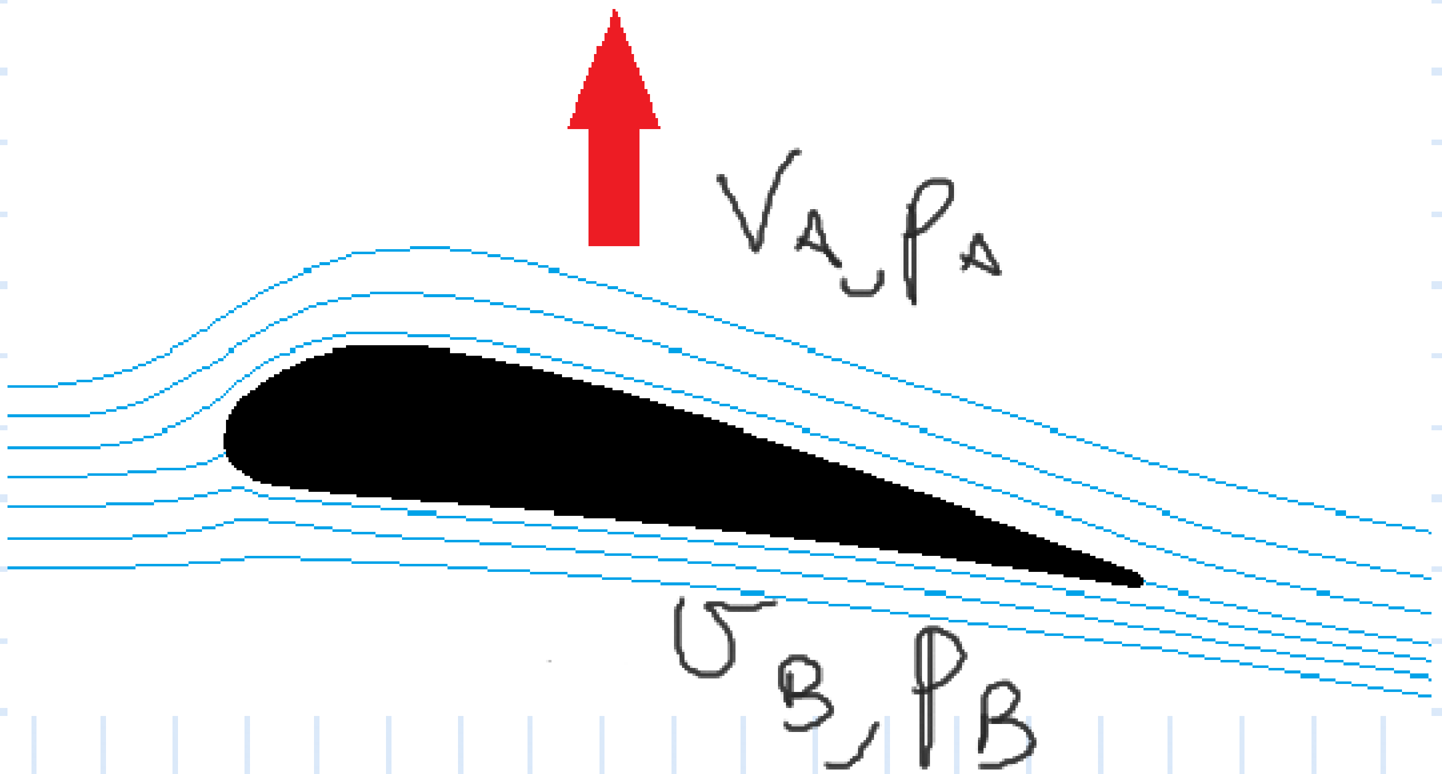
$$S_r v_0 = S_f v \Rightarrow v_0 = v \overset{\ll 1}{\boxed{\frac{S_f}{S_r}}} \simeq 0$$

$$P_0 + \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}\rho v_0^2}}_{\simeq 0} + \rho g h = P_0 + \frac{1}{2}\rho v^2 + \cancel{\rho g \cdot 0}$$

$$\cancel{P_0} + \rho g h = \cancel{P_0} + \frac{1}{2}\rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

$\Rightarrow$ La stessa velocità che avrebbe l'acqua cadendo da un'altezza h

Es: Portanza di un ala (fluido ideale)



$$p_A + \frac{1}{2}\rho v_A^2 = p_B + \frac{1}{2}\rho v_B^2$$

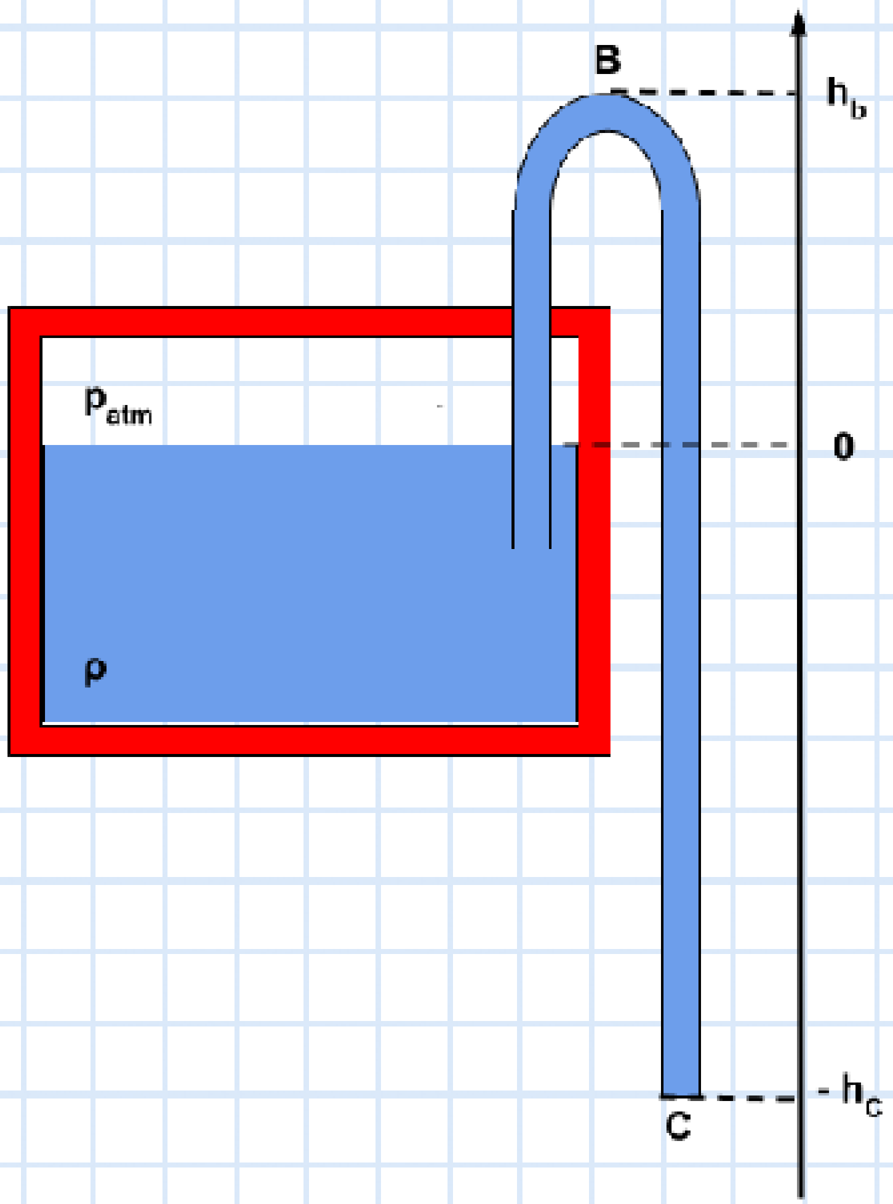
$$v_A = v + \Delta v \qquad v_B = v - \Delta v$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta p = 2\rho v \Delta v \Longrightarrow F = \Delta p\, A = 2\rho v \Delta v A$$

A → Superficie Alare

Es: Sifone



Es: Sifone