

Recap:

Equazione di stato per un gas ideale

$$i) pV = nRT \quad (\text{legge dei gas perfetti})$$

Volume occupato (pointing to V)
 pressione assoluta gas (pointing to p)
 numero di moli (pointing to n)
 Temperatura (pointing to T)

$$ii) pV = \frac{N}{N_A} RT = N k_B T$$

numero Molecole (pointing to N)
 avendo definito la nuova costante

$$k_B = \frac{R}{N_A} = 1.3807 \frac{J}{K} \cdot 10^{-23} \quad (\text{Costante di Boltzmann})$$

$$R = 8.314 \frac{J}{mol K} \quad (\text{Costante universale dei gas})$$

Trasformazioni notevoli di un gas ideale:

i) Trasformazione Isoterma:

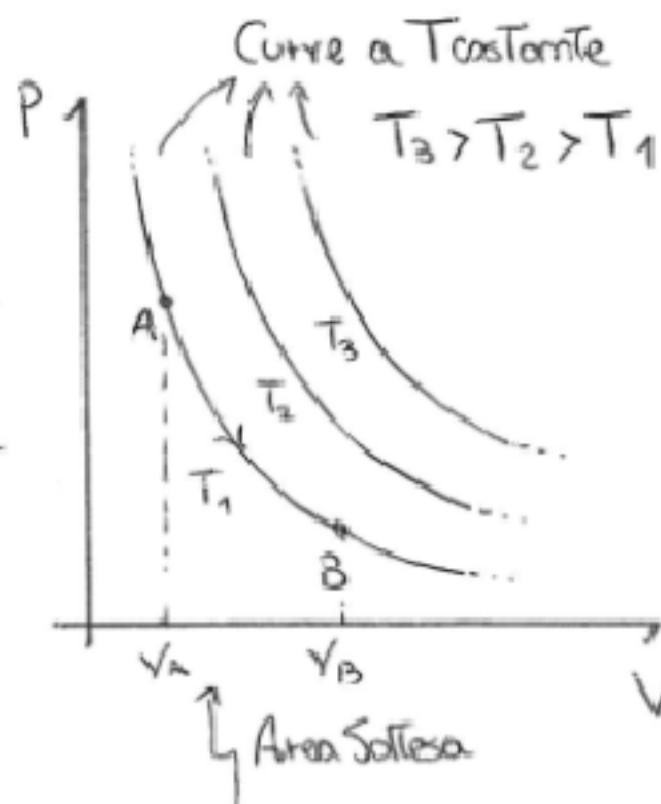
$$T = \text{cost}$$

$$pV = nRT = \text{cost} \rightarrow p = \frac{\text{cost}}{V}$$

ramo di iperbole

Il lavoro compiuto durante una trasformazione isoterma reversibile di un gas ideale è:

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = \int_{V_A}^{V_B} \frac{nRT}{V} dV = nRT \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT \ln \frac{V_B}{V_A} = nR \ln \frac{P_A}{P_B}$$



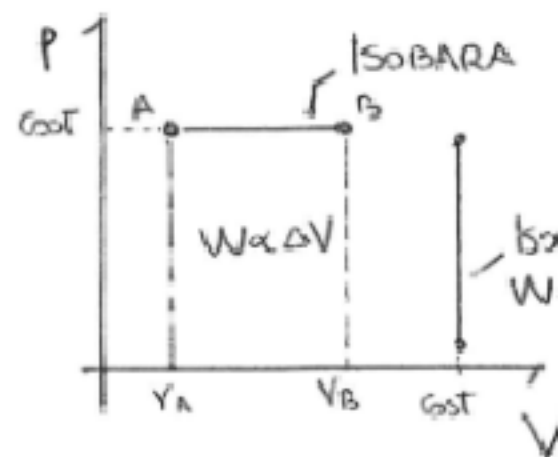
ii) Trasformazione Isobara:

$$p = \text{cost}$$

$$V/T = \text{cost} \rightarrow \frac{V_A}{V_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = p \int_{V_A}^{V_B} dV = p(V_B - V_A) = nR(T_B - T_A)$$

$$V = \frac{nRT}{p}$$



iii) Trasformazione Isocora:

$$V = \text{cost} \rightarrow P/T = \text{cost} \rightarrow \frac{P_A}{P_B} = \frac{T_A}{T_B}$$

$$W_{AB} = \int_{V_A}^{V_B} p dV = 0$$

Recap:

Calore specifico molare:

- A VOLUME COSTANTE: $c_v = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_V$

U.d.m. $\left[\frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}} \right]$

$c_p - c_v = R$ (Relazione di Mayer)

- A PRESSIONE COSTANTE: $c_p = \frac{1}{m} \left(\frac{dQ}{dT} \right)_P$

$\gamma = c_p / c_v > 1$

Energia interna per un gas ideale:

$$\Delta U = m c_v (T_B - T_A)$$

$$dU = m c_v dT$$

Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale:

$Q=0 \Rightarrow$ Può solo scambiare calore con l'esterno

$$\Delta U = Q - W$$

$$W_{AB} = 0 - \Delta U_{AB} = -m c_v (T_B - T_A) =$$

$$pV = mRT \\ c_p - c_v = R \\ \gamma = c_p / c_v$$

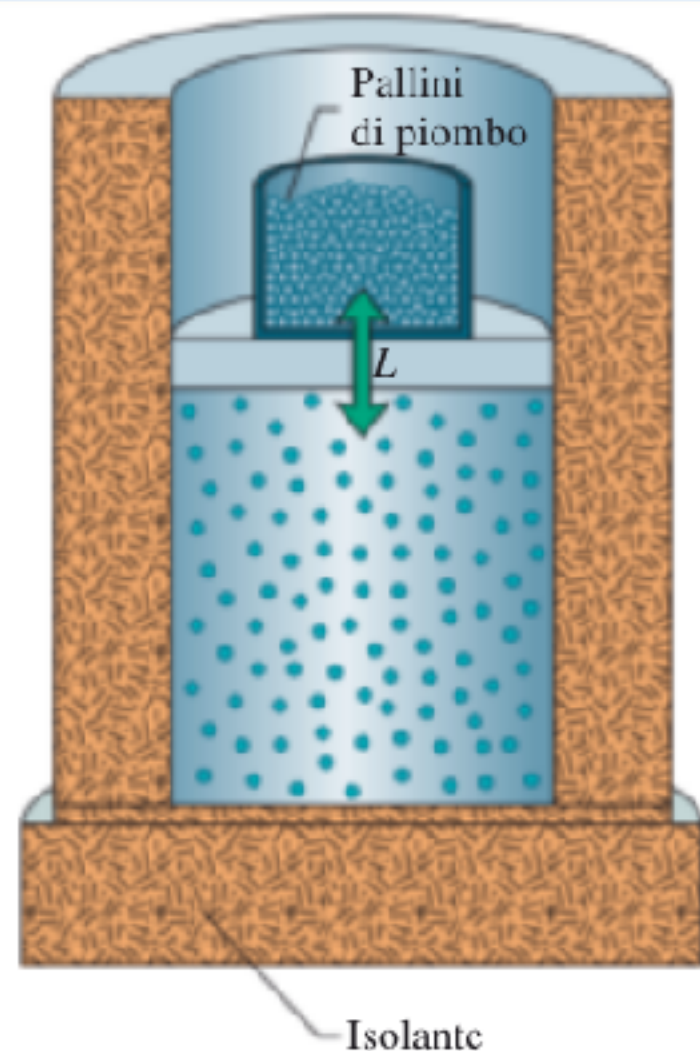
$$\downarrow \\ \text{Lavoro scambiato} = \frac{1}{\gamma - 1} (p_A V_A - p_B V_B)$$

durante una trasformazione
adiabatica generica (sia Reversibile che IRREVERSIBILE)

$$dU + dW = 0 \quad m c_v dT + p dV = 0 \quad p = mRT/V$$

$$m c_v dT + m \frac{RT}{V} dV = 0 \Rightarrow \frac{mR}{m c_v} \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = -\frac{dT}{T}$$

$$\frac{R}{c_v} = \frac{c_p - c_v}{c_v} = \gamma - 1$$



Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale:

$$(\gamma - 1) \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = - \int_{T_A}^{T_B} \frac{dT}{T} \Rightarrow (\gamma - 1) \left[\ln V \right]_{V_A}^{V_B} = (\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A}$$

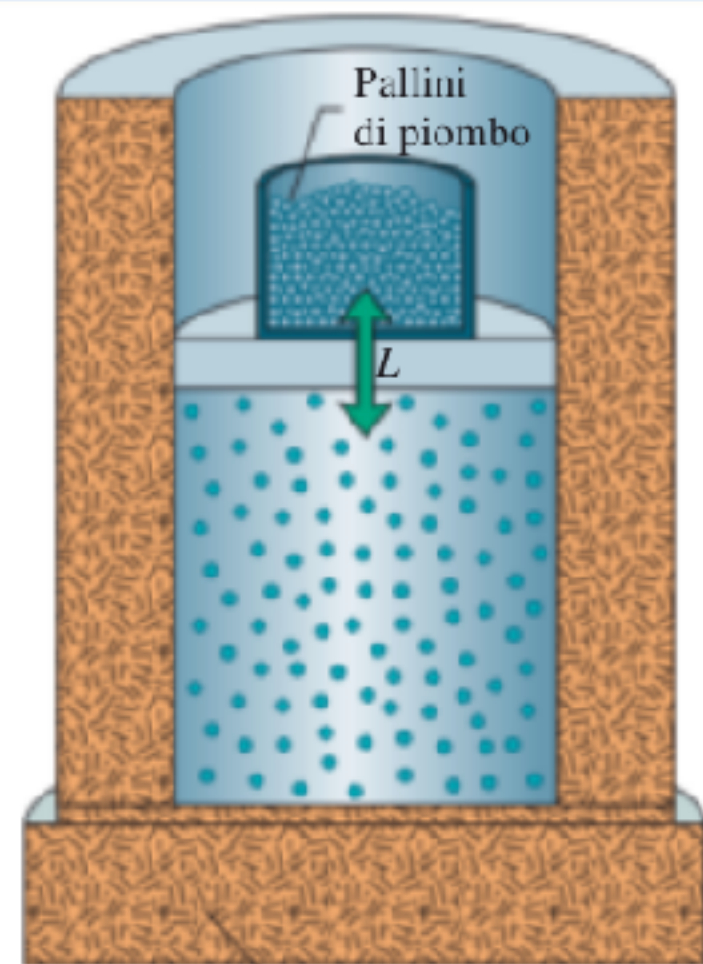
$$\ln V_B - \ln V_A = \ln \frac{V_B}{V_A}$$

$$= \ominus \ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right)$$

$$\ln x \Leftrightarrow e^x$$

$$\ln \left(\frac{T_B}{T_A} \right)^{\ominus 1} = \ln \frac{T_A}{T_B}$$

$$e^{\ln x} = x \quad \ln(e^x) = x$$



$$\boxed{(\gamma - 1) \ln \frac{V_B}{V_A} = \ln \left(\frac{T_A}{T_B} \right)}$$

$$\ln \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{(\gamma - 1)}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{V_B}{V_A} \right)^{\gamma - 1} = \left(\frac{T_A}{T_B} \right)$$

$$\boxed{T_A V_A^{\gamma - 1} = T_B V_B^{\gamma - 1}}$$

Trasformazioni Adiabatiche Gas Ideale:

(i) $TV^{\gamma-1} = \text{cost}$

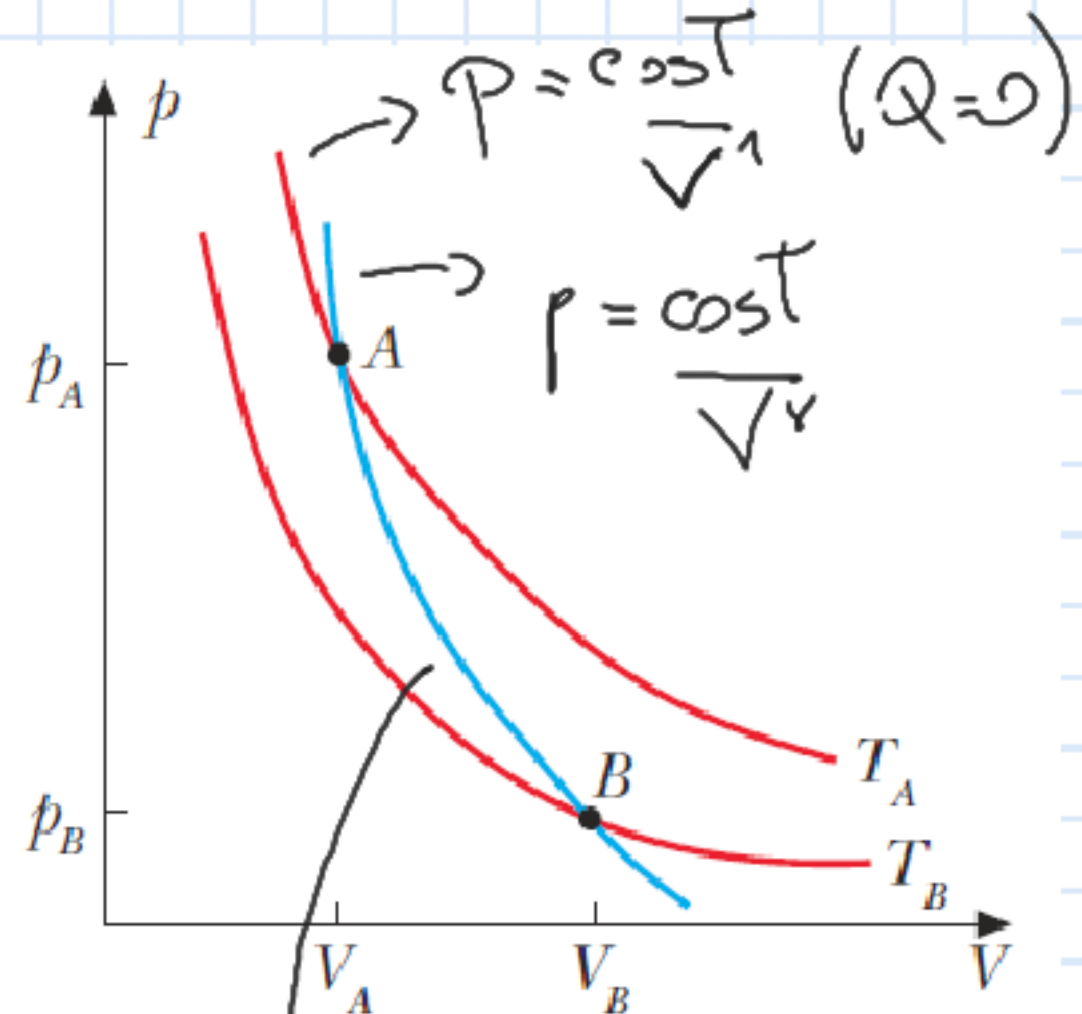
(ii) $PV^{\gamma} = \text{cost}$

(iii) $Tp^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cost}$

$(pV = \frac{mRT}{m})$

$T = \frac{pV}{mR}$

$V = \frac{mRT}{p}$



Adiabatica ha una pendenza maggiore di una ISOTERMA poiché $\gamma > 1$

Esempio: Atmosfera Adiabatica

Calcolare la variazione di temperatura dell'aria in funzione dell'altezza assumendo che il fenomeno possa essere ricondotto all'espansione adiabatica dell'aria calda che sale

$$\underbrace{\Delta p = -\rho g h}_{\text{legge di Stevino}} \Rightarrow dp = -\rho g dh = -\frac{M m g dh}{V} = -\frac{M}{RT} \rho g dh$$

\rightarrow massa molare

$V \rightarrow V = \frac{mRT}{p}$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{Mg}{RT} dh$$

$$\bullet T p^{(1-\gamma)/\gamma} = \text{cost} \Rightarrow d(T p^{(1-\gamma)/\gamma}) = 0$$

$$dT p^{(1-\gamma)/\gamma} + T \left(\frac{1-\gamma}{\gamma} \right) p^{(1-\gamma)/\gamma - 1} dp = 0$$

$$\frac{dT}{T} = -\frac{1-\gamma}{\gamma} \frac{p^{(1-\gamma)/\gamma} dp}{p^{(1-\gamma)/\gamma}} = -\frac{(1-\gamma)}{\gamma} \frac{dp}{p}$$

$$\frac{dT}{dh} = \frac{\gamma-1}{\gamma} \frac{Mg}{R}$$

$\gamma \approx 1.4$
 $\rightarrow 28,88$

$$\approx -9,7 \frac{\text{K}}{\text{km}}$$

Esempio: Trasformazioni Notevoli Gas Ideali

Ordina le 4 trasformazioni secondo valori decrescenti di calore assorbito dal gas ideale:

a) ISOBARA : $p = \text{cost}$ $Q = \Delta U + W$
 $p \Delta V = m R \Delta T$

$W = p \Delta V$ $\Delta U_A = m c_v \Delta T$
 $Q_A = m c_v \Delta T + p \Delta V = m \Delta T (c_v + R) = m \Delta T c_p$

b) ISOTERMIA : $T = \text{cost}$

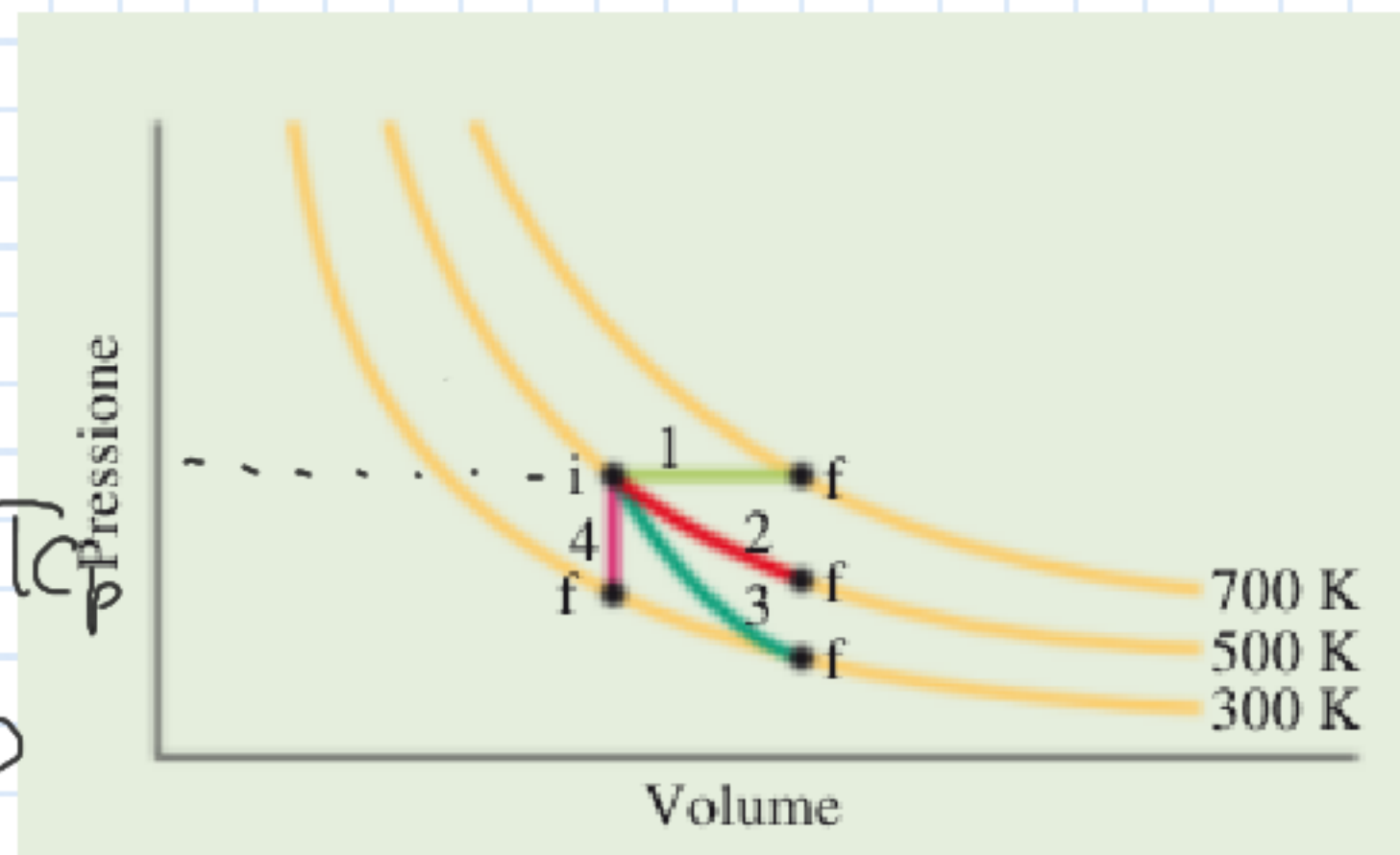
$\Delta U(T) = 0$

$Q_B = W_B = m R T \ln \left(\frac{V_B}{V_i} \right) > 0$

$W_B < W_A \Rightarrow Q_B < Q_A$

$\Delta U_A > 0$

$Q_A > Q_B > Q_C > Q_D$



c) ADIABATICA : $Q_c = 0$

d) ISOCORA : $V = \text{cost}$

$W = 0$ $Q_d = \Delta U = m c_v \Delta T$

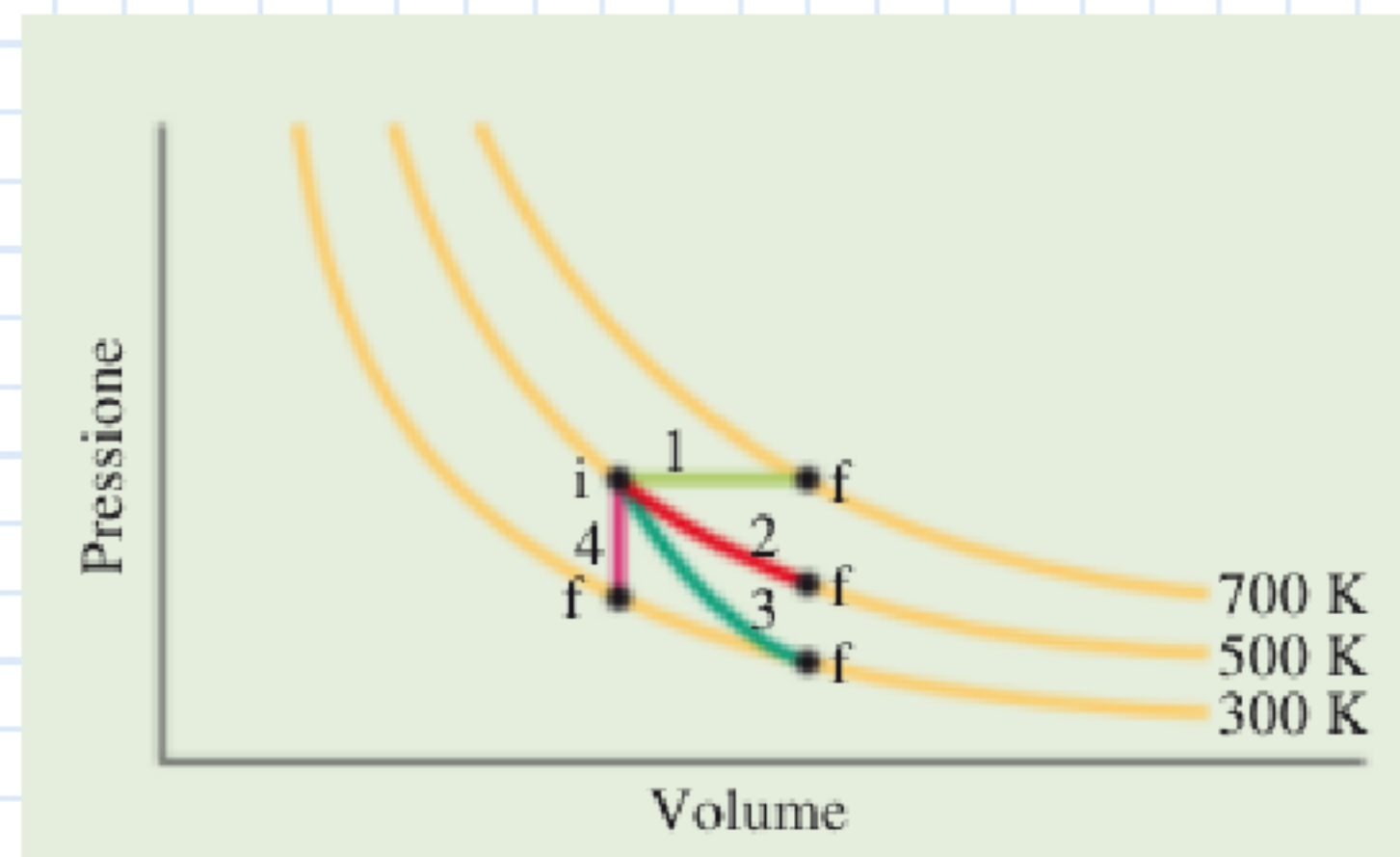
Recap: Gas Ideali

$$pV = nRT \quad (\text{legge dei gas perfetti}).$$

$$C_p = C_v + R. \quad (\text{Relazione di Mayer})$$

$$\Delta U = Q - W \quad (1^\circ \text{ Principio Termodinamica})$$

$$\Delta U = n c_v \Delta T \quad (\text{Energia Interna Gas Ideale})$$



Quantità
costante

Tipo di
trasformazione

1
2
3
4

p

T

$PV^\gamma, TV^{\gamma-1}$

V

Isobara

Isoterma

Adiabatica

Isocora

$$Q = nC_p\Delta T; L = p\Delta V$$

$$Q = L = nRT \ln(V_f/V_i); \Delta E_{\text{int}} = 0$$

$$Q = 0; L = -\Delta E_{\text{int}}$$

$$Q = \Delta E_{\text{int}} = nC_v\Delta T; L = 0$$

Teoria Cinetica dei Gas:

Per questa trattazione consideriamo:

i) gas costituito da molecole uguali, in moto continuo e disordinato

$$\vec{v}_m = 0 \quad \rho = \text{cost}$$

ii) gli urti tra le molecole e le molecole e le pareti sono elastici

q.d.m si conserva negli urti tra particelle

iii) Non sono presenti forze intermolecolari (se non durante gli urti)

L'energia potenziale è nulla \Rightarrow l'unica forma di energia interna è quella cinetica

iv) Le dimensioni delle molecole sono molto inferiori rispetto alle distanze medie delle particelle

Volume occupato dalle particelle è trascurabile rispetto al volume del recipiente

Pressione esercitata dal gas su una parete:

$$\vec{v} = v_x \hat{u}_x + v_y \hat{u}_y + v_z \hat{u}_z$$

Consideriamo la parete di dx ; dopo l'urto
la velocità lungo x cambia segno, mentre
lungo y & z rimane invariata (UN URTO ELASTICO)

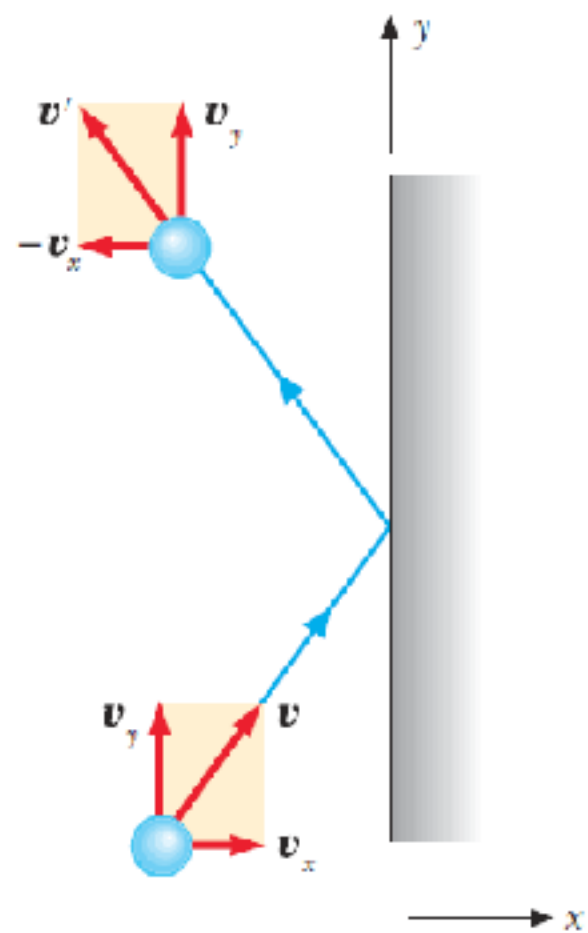
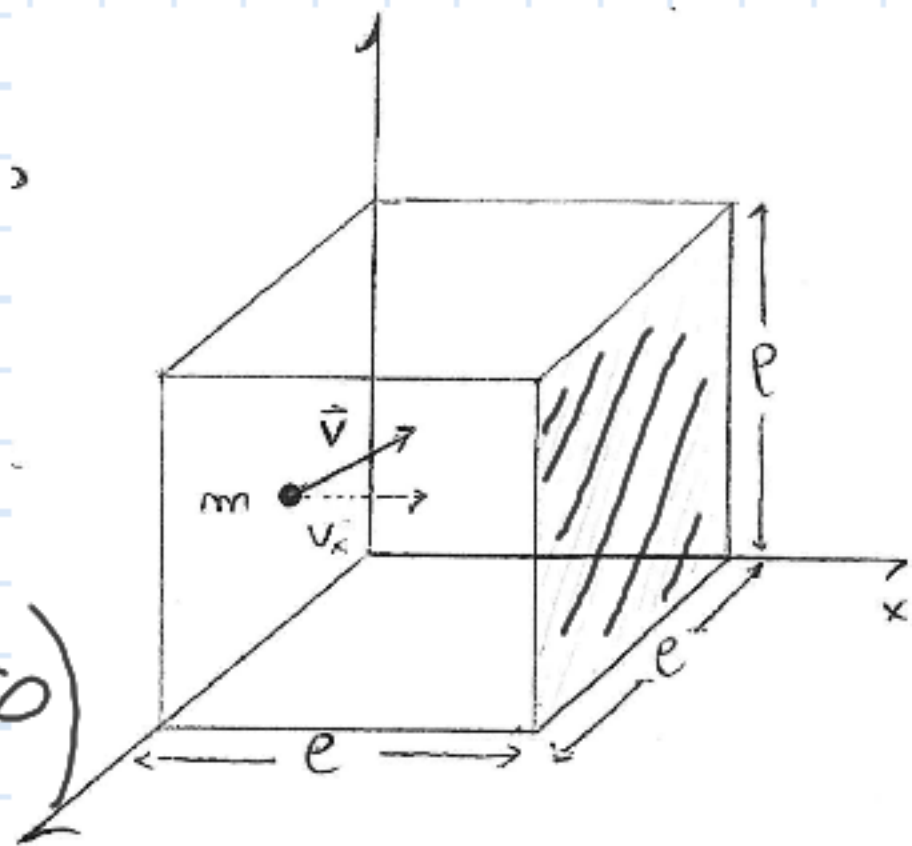
\Rightarrow p.d.m

$$\Delta q_x = (-mv_x) - (mv_x) = -2mv_x$$

$\Rightarrow I_x = -\Delta q_x = 2mv_x \Rightarrow$ impulso trasmesso alla parete dalla palla

\Rightarrow il tempo che intercorre tra 2 urti, con la parete di destra:

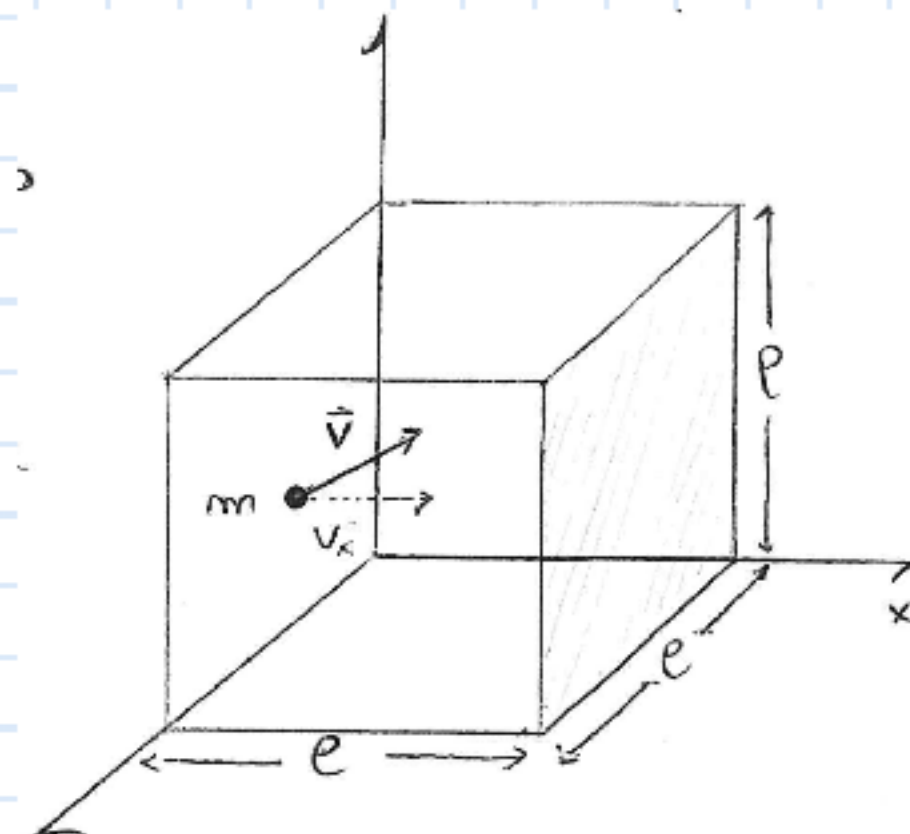
$$\Delta t = \frac{2e}{v_x}$$



Pressione esercitata dal gas su una parete:

=> La forza media esercitata da una pila su una parete:

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{2m v_x}{2e/v_x} = \frac{m v_x^2}{e}$$

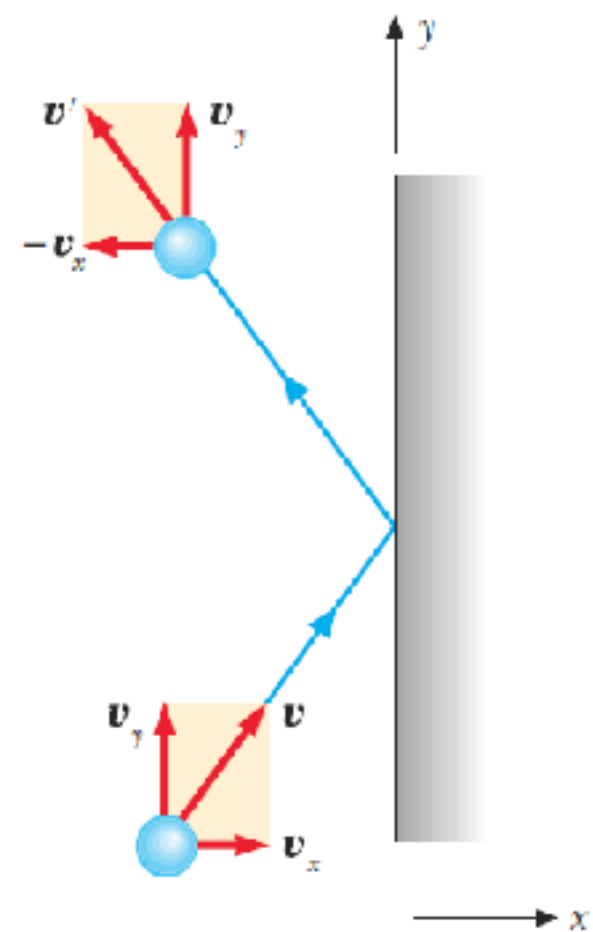


=> La forza risultante sulla parete e' data dalla somma delle forze esercitate dalle singole particelle:

$$F_x^{tot} = \sum_{i=1}^N F_{x,i} = \frac{m}{e} \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2$$

$$p_x = \frac{F_x^{tot}}{e^2} = \frac{1}{e^3} m \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2 = \frac{m}{V} \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2 = \frac{mN}{V} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_{x,i}^2$$

\xrightarrow{V} $= mN \overline{v_x^2} \rightarrow$ velocità quadratica media

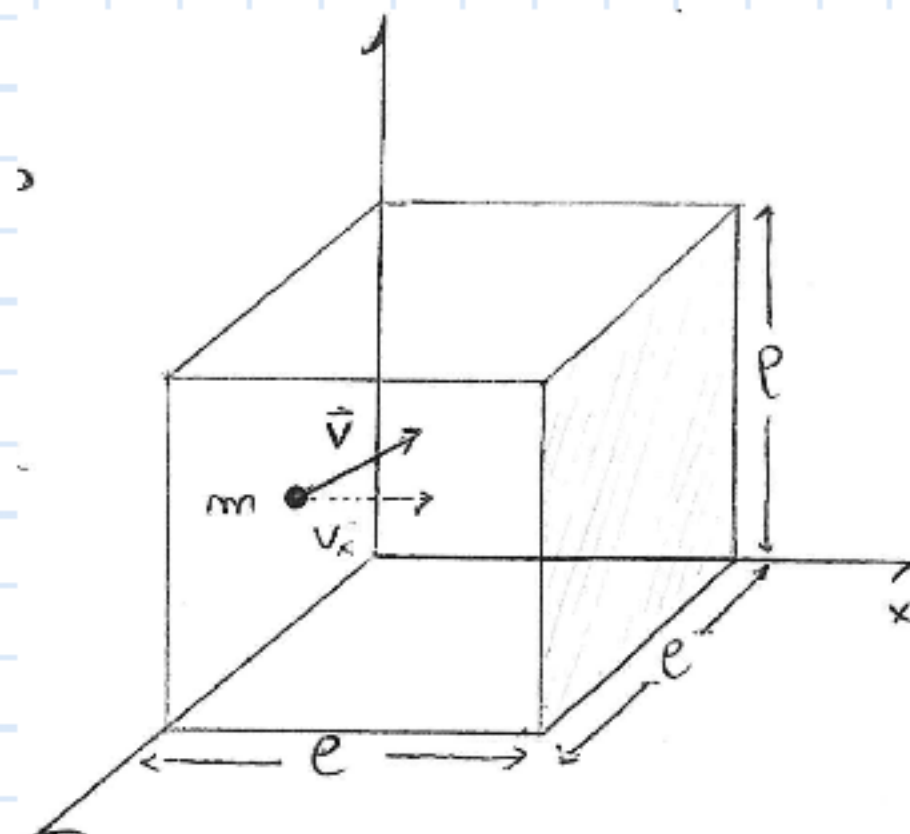


Pressione esercitata dal gas su una parete:

Per ogni particella:

$$\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} =$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (v_{x,i}^2 + v_{y,i}^2 + v_{z,i}^2)$$



⇒ Dato che il moto è caotico (per assunzione) le velocità quadratiche medie saranno tra loro uguali

$$\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2} = \frac{1}{3} \overline{v^2}$$

Pressione su una parete

Equazione

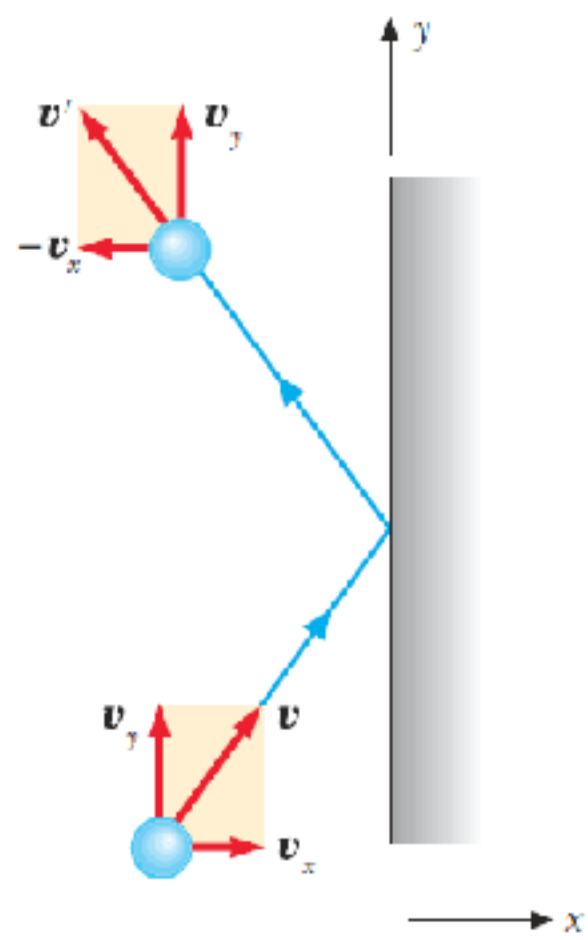
Joule-Clausius-Kirchhoff

$$\Rightarrow p = \frac{Nm}{V} \frac{\overline{v^2}}{3}$$



$$\Rightarrow E_k = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m v_i^2 = \frac{1}{2} m \overline{v^2} \Rightarrow pV = \frac{2}{3} N E_k$$

↳ Energia cinetica media traslazionale



Pressione esercitata dal gas su una parete:

$$pV = nRT \Rightarrow$$

$$pV = \frac{2}{3} N \bar{E}_k$$

$$\frac{2}{3} N \bar{E}_k = nRT \Rightarrow \bar{E}_k = \frac{3}{2} \frac{n}{N} RT =$$

$$\bar{E}_k = \frac{3}{2} \frac{R}{N_A} T = \frac{3}{2} k_B T \quad \rightarrow n N_A$$

$$\bar{E}_k = \frac{1}{2} m \bar{v}^2$$

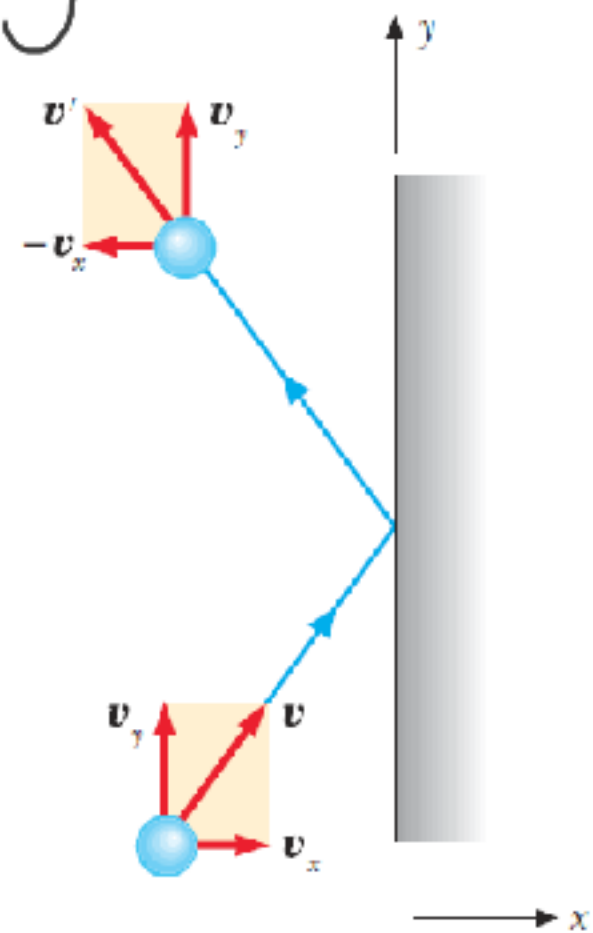
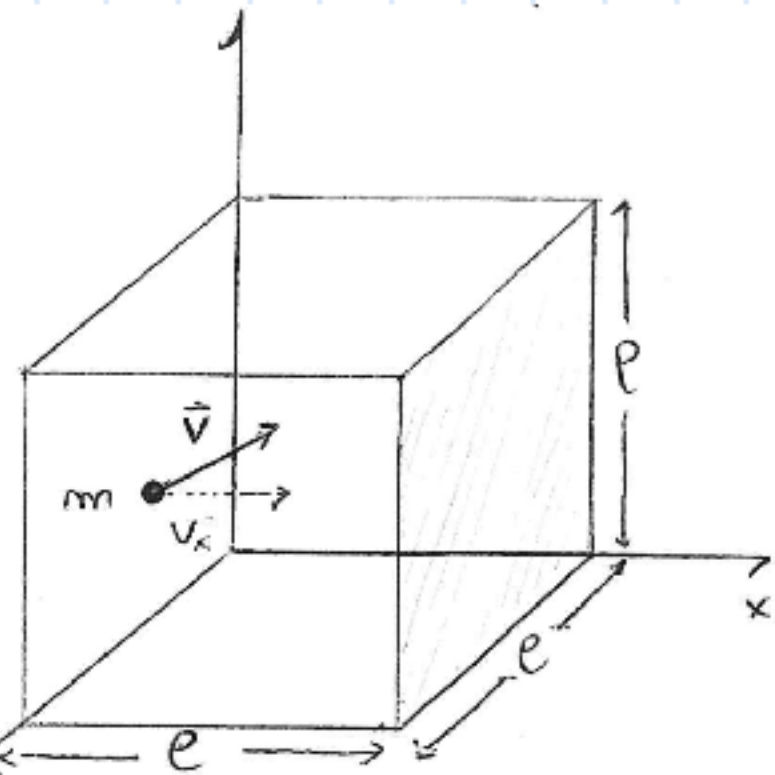
Temperatura
Espressa in Kelvin

Energia Cinetica
Media Traslabando
per una p.lla di gas ideale

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m}} = \sqrt{\frac{3RT}{M}}$$

massa Molare

Velocità Media p.lla
di un gas ideale



Energia Cinetica e Velocità Quadratica Media di una molecola di gas Ideale:

TABELLA 19.1 Alcune velocità molecolari a temperatura ambiente ($T = 300 \text{ K}$)*

Gas	Massa molare (10^{-3} kg/mol)	v_{qm} (m/s)
Idrogeno (H_2)	2,02	1920
Elio (He)	4,0	1370
Vapore acqueo (H_2O)	18,0	645
Azoto (N_2)	28,0	517
Ossigeno (O_2)	32,0	483
Biossido di carbonio (CO_2)	44,0	412
Biossido di zolfo (SO_2)	64,1	342

Esempio: Pressione esercitata da un fascio di molecole di idrogeno H₂

•17. Un fascio di molecole d'idrogeno (H₂) viene lanciato contro un muro in una direzione che forma un angolo di 55° con la normale al muro. Tutte le molecole del fascio hanno una velocità di 1,0 km/s e una massa di $3,3 \cdot 10^{-24}$ g. Il bersaglio ha un'area di 2,0 cm² e la frequenza d'urto è di 10^{23} molecole al secondo. Calcolare la pressione sul muro dovuta al fascio.

$$f = 10^{23} \text{ s}^{-1}$$

$$\Delta q = q_f - q_i = -m v \cos \theta - m v \cos \theta = -2 m v \cos \theta = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kg}$$

$$I_x = -\Delta q_x = 2 m v \cos \theta$$

$$F_x = \frac{I_x}{\Delta t} = 2 m v \cos \theta \cdot f$$

$$P = \frac{F_x}{S} = \frac{2 m v \cos \theta}{S} = 1,9 \cdot 10^3 \text{ Pa}$$

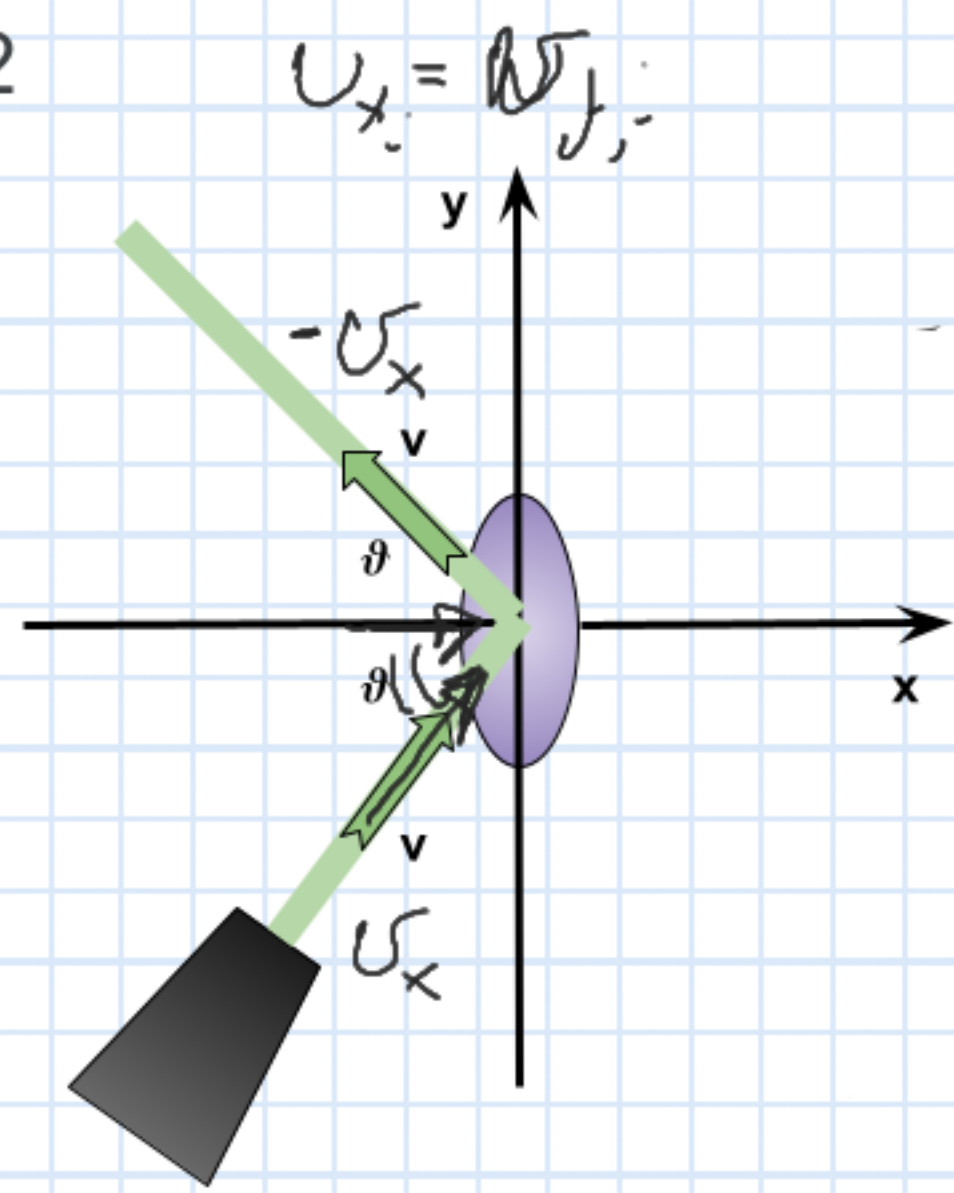
$$\theta = 55^\circ$$

$$v = 10^3 \text{ m/s}$$

$$m = 3,3 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$$

$$S = 0,0002 \text{ m}^2$$

$$= 2 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$$



$$f = \frac{1}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{1}{f}$$

Esempio: Energia media molecole H₂O

Nota il calore latente di evaporazione dell'acqua:

i) stimare l'energia cinetica media delle molecole che evaporano

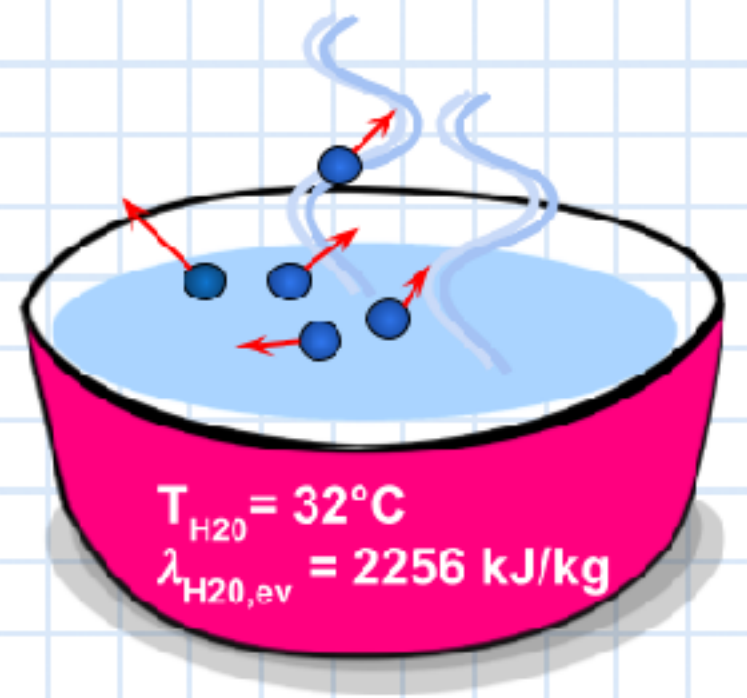
$$E = \frac{\lambda_{H_2O}}{N} \rightarrow \text{Energia necessaria ad un kg di sostanza per evaporare}$$

N → Numero di molecole contenute in un kg di H₂O

$$N = \frac{N_A}{M} \rightarrow \text{\#molecole 1 mole} = \frac{N_A}{(10^{-3} + 10^{-3} + 16 \cdot 10^{-3}) \left[\frac{\text{kg}}{\text{mole}} \right]} = 3,34 \cdot 10^{25} \text{ kg}^{-1}$$

$$\begin{array}{ccc} \text{kg/mole} & & \\ \swarrow & & \searrow \\ \text{H} & \text{H} & \text{O} \end{array} \Rightarrow 18 \cdot 10^{-3} \text{ kg/mole}$$

$$E = \frac{2256 \cdot 10^3 \text{ J/kg}}{3,34 \cdot 10^{25} \text{ kg}^{-1}} = 6,77 \cdot 10^{-20} \text{ J}$$



Esempio: Energia media molecole H₂O

ii) calcolare il rapporto fra questa energia e l'energia cinetica delle molecole dell'acqua a T=32°C

$$\bar{E}_K = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} k_B \left(\underline{\underline{32 + 273,15}} \right) = 6,32 \cdot 10^{-21} \text{ J}$$

T(K)

$$\frac{E}{E_K} \approx 10$$

