Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2023-2024, Secondo esame invernale

COGNOME STAMPATELLO **NOME** LEGGIBILE

N. Matricola ______ **Anno di corso** ______

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

- si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \frac{(x\sqrt{x})^x - x^{x\sqrt{x}}}{x^{x^2} - (x^2)^x}$

$$\frac{x^{\frac{3}{2}x} - x^{x^{\frac{3}{2}}}}{x^{x^2} - x^{2x}} = \frac{x^{x^{\frac{3}{2}}}}{x^{x^2}} \frac{x^{\frac{3}{2}x - x^{\frac{3}{2}}} - 1}{1 - x^{2x - x^2}}$$

$\to 0$ $\to 0$

$$= x^{x^{\frac{3}{2}} - x^2} \left(-1 + o(1)\right) \xrightarrow{x\to+\infty} 0$$

- si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \int_0^x t\sin(t)dt$;

$$\int_0^x t\sin(t)\,dt = -x\cos x + \int_0^x \cos(t)\,dt = -x\cos x + \sin x$$

Non ho limite. Infatti, $\lim_{n\to+\infty} \left(-2n\pi\cos(2n\pi) + \sin(2n\pi)\right) = \lim_{n\to+\infty} -2n\pi = -\infty$

e $\lim_{n\to+\infty} \left(-(2n+1)\pi\cos((2n+1)\pi) + \sin((2n+1)\pi)\right) = \lim_{n\to+\infty} (2n+1)\pi = +\infty$

$$f(x) = \lg\left(1 + e^{x\lg x} + x^{-2}\right)$$

- si calcoli $f'(x)$ per $f(x) := \log\left(1 + x^x + \frac{1}{x^2}\right) \cancel{dt}$;

$$f'(x) = \frac{1}{1 + x^x + \frac{1}{x^2}} \left(x^x\,(x\lg x)' - 2x^{-3}\right)$$

$$= \frac{1}{1 + x^x + x^{-2}} \left(x^x(1 + \lg x) - 2x^{-3}\right)$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \log(1+x) - \frac{x+1}{x-1}$$

• si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio; $x > -1$, $x \neq 1$

$\lim_{x \to -1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to 1^-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{(\cancel{x}-1)-(\cancel{x}+1)}{(x-1)^2} = \frac{1}{1+x} + \frac{2}{(x-1)^2} > 0$$

• si calcoli $f'(x)$ e si trovi il numero dei punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

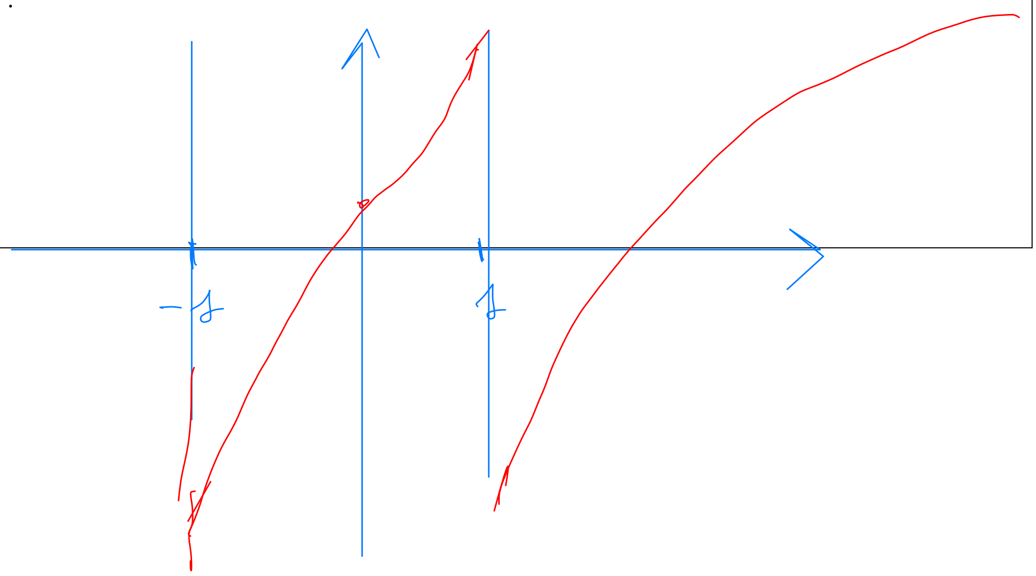
non ci sono punti di massimo e di minimo locali e assoluti

•si stabilisca se vi sono rette asintotiche; Per $x \to +\infty$ $f(x)$ è come un logaritmo

Non c'è retta asintotica per $x \to +\infty$. Infatti $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$

ma $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

• si tracci il grafico .



COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ______________

ESERCIZIO N. 3.

$R(x)$

- si calcoli $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1+x}{(x+2)(x^2+3)}dx$

$R(x) = \frac{A}{x+2} + \frac{Bx+C}{x^2+3}$ $\quad A = \frac{1+x}{x^2+3}\Big|_{x=-2} = \frac{-1}{7}$

$A+B=0$ perché $\lim_{x\to+\infty} R(x)x = 0 = A+B$, $\Rightarrow B = \frac{1}{7}$

$R(x) = \frac{-\frac{1}{7}(x^2+3) + \frac{1}{7}x(x+2) + C(x+2)}{(x+2)(x^2+3)} \Rightarrow -\frac{3}{7} + 2C = 1 \Rightarrow 2C = \frac{10}{7} \Rightarrow C = \frac{5}{7}$

$R(x) = -\frac{1}{7}\frac{1}{x+2} + \frac{\frac{1}{7}x + \frac{10}{7}}{x^2+2} = -\frac{1}{7}\frac{1}{x+2} + \frac{1}{14}\frac{2x}{x^2+2} + \frac{10}{7}\frac{1}{x^2+2}$

$\int_1^x R(t)\,dt = -\frac{1}{7}\lg(t+2)\Big]_1^x + \frac{1}{7}\lg\sqrt{t^2+2}\Big]_1^x + \frac{10}{7}\operatorname{artg} t\Big]_1^x \xrightarrow{x\to+\infty} \frac{10}{7}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{7}\lg\sqrt{3} - \frac{10}{7}\frac{\pi}{4} =$

$= \frac{10}{7}\frac{\pi}{4} + \frac{1}{7}\lg\sqrt{3} > 0$

- si calcoli le primitive $\displaystyle\int \arctan^2(x)dx$;

Qui per sbaglio ho assegnato un esercizio complicato. Ho valutato la qualità dei tentativi

- si stabilisca se $\displaystyle\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ e' integrabile in $[2,+\infty)$;

$\frac{1}{x}\sin\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(1+o(1))$ e ass. integrabile

- si stabilisca se $\displaystyle\log\left(1+\frac{\sin x}{x}\right)$ e' integrabile in $[2,+\infty)$.

$\lg\left(1+\frac{\sin x}{x}\right) = \frac{\sin x}{x} \left(-\frac{\sin^2 x}{x^2} + o\left(\frac{1}{x^2}\right)\right.$

ass. int

integrabile

ESERCIZIO N. 4. Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 6 $\overset{P_6(x)}{}$ di $f(x) = \int_0^x t^2\sqrt{1-t^2}dt$.

Siccome f è dispari, $P_6(x) = P_5(x)$

$$f(x) = \int_0^x t^2 \left(1 - \frac{1}{2}t^2 + \binom{\frac{1}{2}}{2}(-t^2)^2 + o(t^4)\right)dt =$$

$$= \int_0^x \left(t^2 - \frac{1}{2}t^4 + o(t^5)\right) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{10} + o(x^5)$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' - 5y' + 6y = e^{2x}$.

equazione caratteristica è $p(r) = r^2 - 5r + 6$ con radici $r = 2, 3$

$p'(r) = 2r - 5$

$\Rightarrow y_h = Ae^{2x} + Be^{3x}$. Una particolare ha ~~forma~~

$$y_p = C x e^{2x}$$

$$C\, L[x e^{2x}] = C\left(\cancel{x} e^{2x} \overset{0}{p(2)} + \overset{-1}{p'(2)} e^{2x}\right)$$

$$= -C e^{2x} = e^{2x} \Rightarrow C = -1$$

$$\Rightarrow y_g = Ae^{2x} + Be^{3x} - \cancel{x} e^{2x}$$