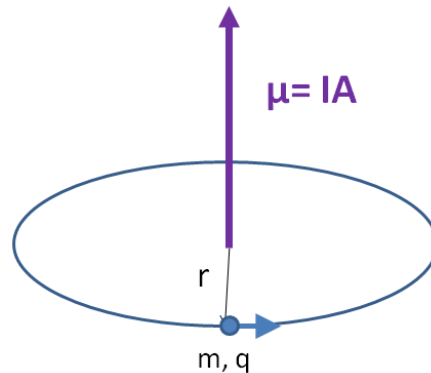


Effetto Zeeman (semplificato)

Zeeman conduce una serie di esperimenti in cui osserva le linee di emissione dell'idrogeno in presenza di un campo magnetico B . Lo spettro in presenza del campo ha un numero maggiore di linee di emissione, con energie leggermente diverse da quelle con campo nullo.

Capiamo **parte** dell'origine di tale effetto. Classicamente, se ho una spira di area A percorsa da corrente I , il momento magnetico di dipolo è $\mu = IA$ ed è orientato perpendicolarmente alla spira:



La corrente, assumendo sia dovuta ad una certa carica q che percorre la spira con velocità v , è:

$$I = \frac{q}{T} = \frac{qv}{2\pi r}$$

Essendo $A = \pi r^2$ il momento diventa:

$$\mu = \frac{qrv}{2}$$

e volendolo scrivere in forma vettoriale:

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{q\mathbf{r} \times \mathbf{v}}{2} = \frac{q}{2m} \mathbf{L} \quad (1)$$

Ovvero, il momento magnetico è proporzionale al momento angolare \mathbf{L} . La (1) è generalizzabile in generale a casi geometricamente più complessi di quello considerato di spira circolare. Si introduce la quantità γ , chiamata *rapporto giromagnetico*, per definire il rapporto tra momento magnetico e momento angolare e la (1) diventa in generale:

$$\boldsymbol{\mu} = \gamma \mathbf{L} \quad (2)$$

Il rapporto giromagnetico dell'elettrone in un'orbita definita classicamente è perciò $\gamma_e = -\frac{e}{2m}$

Il momento magnetico è una grandezza utile per stabilire l'interazione tra spire percorse da correnti e campi magnetici esterni. Il tutto deriva dalla forma della forza che una particella carica in

movimento sente: $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. Si trova che una particella con momento di dipolo $\boldsymbol{\mu}$ in un campo magnetico \mathbf{B} sente un potenziale:

$$V = -\boldsymbol{\mu} \cdot \mathbf{B}$$

Se consideriamo un campo diretto lungo l'asse z, $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$, la relazione precedente diventa:

$$V = -\mu_z B_z$$

Un elettrone in un atomo di idrogeno immerso in un campo magnetico $\mathbf{B} = B_z \hat{\mathbf{z}}$ sentirà questo potenziale oltre che a quello dovuto al protone del nucleo! L'Hamiltoniana completa sarà:

$$\begin{aligned} H &= H_0 - \mu_z B_z \\ &= H_0 - \gamma_e B_z L_z \\ &= H_0 + \frac{eB_z \hbar}{2m} L_z \end{aligned} \quad (3)$$

con H_0 hamiltoniana dell'atomo di idrogeno.

Il termine che abbiamo aggiunto è una funzione di L_z e quindi l'hamiltoniana espressa dalla (3) continua a commutare sia con L_z che con L^2 . Gli orbitali atomici soluzioni per H_0 che conosciamo saranno soluzioni anche per H .

Le energie relative all'orbitale ψ_{nlm} sarà:

$$\begin{aligned} E_{nlm} &= \langle \psi_{nlm} | H | \psi_{nlm} \rangle = \langle \psi_{nlm} | H_0 - \mu_z B_z | \psi_{nlm} \rangle \\ &= \langle \psi_{nlm} | H_0 | \psi_{nlm} \rangle + \left\langle \psi_{nlm} \left| + \frac{eB_z \hbar}{2m} L_z \right| \psi_{nlm} \right\rangle \\ &\quad - \frac{\hbar^2}{2m_e a_0^2} \frac{1}{n^2} + \frac{eB_z \hbar}{2m_e} m \end{aligned} \quad (4)$$

Quindi i nuovi livelli energetici dipendono non solo da n ma anche da m (per questo chiamato numero quantico magnetico...) e si discostano dai valori di atomo di idrogeno senza campo magnetico per la quantità $\frac{eB_z \hbar}{2m_e} m$. La grandezza $\mu_B = \frac{e\hbar}{2m_e}$ è detta magnetone di Bohr.

La (4) ci spiega perché se accendo un campo magnetico vedo le linee di emissione dell'idrogeno splittarsi. Per campi magnetici facilmente ottenibili in laboratorio (dell'ordine di 10 T) lo

spostamento delle linee introdotto dalla (4) è dell'ordine di 10^{-22} J, mentre le energie delle linee (distanza tra i livelli ad esempio 1s e 2p) sono dell'ordine di 10^{-18} J. Parliamo quindi di spostamenti molto piccoli. Se consideriamo le transizioni dal livello $n=2$ al livello $n=1$, la (4) prevede che ci siano 3 diverse linee: una $2p_0 \rightarrow 1s$, una $2p_{-1} \rightarrow 1s$ e una $2p_1 \rightarrow 1s$ ¹. In realtà i dati sperimentali individuano 10 linee di emissione diverse per la transizione tra questi livelli. Questo fa capire che nella nostra descrizione dell'atomo di idrogeno manca qualcosa di molto importante che è lo spin.

¹ Nei decadimenti c'è una regola di simmetria che dice che deve essere $\Delta l = \pm 1$. Non la ricaviamo (teoria perturbativa dipendente dal tempo) ma ci spiega perchè non possiamo avere transizioni tra livelli s.

Effetto Zeeman (con spin, caso di campo debole)

Nota: da fare dopo aver studiato lo spin e la struttura fine dell'atomo di idrogeno

Lo spin rappresenta un momento angolare aggiuntivo per l'elettrone, oltre a quello orbitale, di cui devo tener conto se voglio quantificare gli effetti di una esposizione ad un campo magnetico. Nella trattazione dell'effetto Zeeman semplificato riportato in precedenza, abbiamo, senza saperlo, effettuato uno studio perturbativo dell'Hamiltoniana, aggiungendo nella (3) ad H_0 il termine $H'_Z = -\boldsymbol{\mu}_L \cdot \mathbf{B}$. $\boldsymbol{\mu}_L$ è il momento magnetico di dipolo, ma è solo quello riferito al momento angolare orbitale L dell'elettrone. Ora sappiamo che l'elettrone ha anche un momento angolare di spin, S . Anche a S è associato un momento di dipolo magnetico $\boldsymbol{\mu}_S$, di cui dobbiamo tenere conto per valutare gli effetti del campo magnetico sui livelli energetici.

Si ha²:

$$\boldsymbol{\mu}_S = -\frac{e}{m} \mathbf{S} \quad (5)$$

mentre come avevamo visto,

$$\boldsymbol{\mu}_L = -\frac{e}{2m} \mathbf{L}$$

L'elemento perturbativo dell'hamiltoniana dovuto alla presenza di un campo B_z diventa perciò:

$$\begin{aligned} H'_Z &= -(\boldsymbol{\mu}_L + \boldsymbol{\mu}_S) \cdot \mathbf{B} \\ &= -\frac{e}{2m} (\mathbf{L} + 2\mathbf{S}) \cdot \mathbf{B} \end{aligned} \quad (6)$$

Limitiamoci al caso di campi B molto piccoli, per cui la perturbazione data dalla (6) sia inferiore a quella data dall'interazione spin-orbita (effetto Zeeman debole). Questa precisazione ci permette di dire che gli autostati con cui calcoliamo la perturbazione possono essere autostati di L , S , J e J_z , ovvero $|\psi_{nlsm_j}\rangle$. Non lo facciamo, ma si può ricavare il valore di aspettazione di H'_Z e quindi della perturbazione Zeeman e si trova, per un campo B_z diretto lungo l'asse z :

$$E_Z = \langle H'_Z \rangle = \mu_B g_J B_z m_J \quad (7)$$

con μ_B il magnetone di Bohr e g_J un fattore chiamato fattore g di Landé che vale:

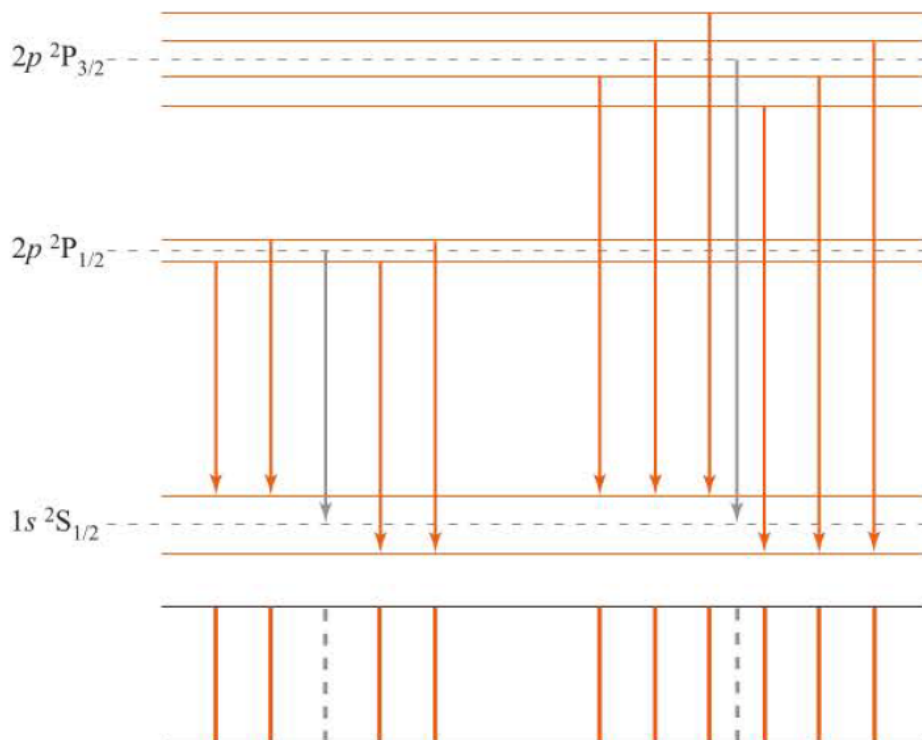
$$g_J = 1 + \frac{j(j+1) - l(l+1) + 3/4}{2j(j+1)} \quad (8)$$

² Ovvero, ci sono due rapporti giromagnetici diversi per i due momenti, $\gamma_e^S = 2\gamma_e^L$. γ_e^L l'avevamo ricavato classicamente. La natura puramente quantistica dello spin richiede un fattore 2 aggiuntivo, non spiegabile classicamente.

La (7) e la (8) in realtà non sono importanti per quel che ci riguarda. Ci permettono però di risolvere il problema delle linee di emissione osservate per l'idrogeno nei decadimenti dal livello 2 al livello 1. Il livello 2p si splitta in due livelli ($J=3/2$ e $J=1/2$) per effetto dell'interazione spin-orbita.

Il campo magnetico splitta ulteriormente i livelli con $J=3/2$ in 4 ($M_j = -3/2, -1/2, 1/2, 3/2$) e con $J=1/2$ in 2.

Rispettando la regole di selezione per le transizioni, che nel caso di stati autofunzioni di J e J_z diventano³ $\Delta L = \pm 1, \Delta S = 0, \Delta J = 0, \pm 1$ e $\Delta m_j = 0, \pm 1$, le transizioni permesse sono le 10 indicate in figura (dal McQuarrie):



³ La regola completa su J è $\Delta J = 0, \pm 1$ e $\Delta m_j = 0, \pm 1$ ma mai transizioni da $J=0$ a $J=0$. Queste regole di selezione derivano dalla valutazione della probabilità di transizione (in questo caso, transizione tra due stati con emissione di un fotone). L'argomento, affrontabile con la teoria di perturbazioni dipendenti dal tempo, non è argomento del corso, ma per capire l'origine degli spettri di emissione è necessario conoscere tali regole.