GRIFFITHS Es 4.55

- L'elettrone di un atomo di idrogeno si trova nello stato:

$$R_{21}\left(\sqrt{1/3}\, Y_1^0 \chi_+ + \sqrt{2/3}\, Y_1^1 \chi_-\right)$$

NOTA L'elettrone si trova in una combinazione degli orbitali

$|2\,1\,0\rangle$ e $|2\,1\,1\rangle$.

È definito anche lo spin. Parliamo in questo caso di

spin-orbitali.

Che sono descritti dal ket: $|n\, l\, m_l\, s\, m_s\rangle$

Siccome s è sempre $\frac{1}{2}$ (gli orbitali hanno un elettrone, quindi $s=\frac{1}{2}$), si omette di solito dal simbolo di ket

Nel presente caso quindi, l'elettrone si trova in una combinazione degli spinorbitali:

$$|2\,1\,0\,\tfrac{1}{2}\rangle \quad e \quad |2\,1\,1\,-\tfrac{1}{2}\rangle$$

a) Se misuriamo L^2, che valori ottengo e con che probabilità?

Gli spin orbitali sono entrambi autofunzioni di L^2, entrambi con autovalore $\hbar^2\, 1\cdot(1+1) = 2\hbar^2$

Quindi otterrò $2\hbar^2$ con probabilità 1

b) Se misuriamo L_z?

Gli spinorbitali sono autovettori anche di L_z. Con autovalori 0 e $\hbar$ rispettivamente.

Avrò $L_z = 0$ con prob. $\left(\sqrt{1/3}\right)^2 = \frac{1}{3}$

$L_z = \hbar$ con prob. $\left(\sqrt{2/3}\right)^2 = \frac{2}{3}$

c) Se misuriamo S^2 ?

Come per L^2, gli ~~autostati~~ stati sono autostati di S^2 con autovalore $\hbar^2 \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) = \frac{3}{4}\hbar^2$, con probabilità 1

d) Se misuriamo S_z ?

Otterrò $S_z = \frac{\hbar}{2}$ con $P = \frac{1}{3}$

$S_z = -\frac{\hbar}{2}$ con $P = \frac{2}{3}$

e) Se misuriamo J^2 ?

I due stati <u>non</u> sono autostati di J^2. Posso però scriverli come combinazione lineare di autostati di J^2 e J_z usando i coefficienti di Clebsch Gordan

Consultiamo le tabelle $\overset{L}{1} \times \overset{S}{\frac{1}{2}}$

Lo stato $|\overset{L}{1}\overset{m_\ell}{0}\rangle|\overset{S}{\tfrac{1}{2}}\overset{m_s}{\tfrac{1}{2}}\rangle$: $\sqrt{\frac{2}{3}}\left(|\overset{J}{\tfrac{3}{2}}\overset{J_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle\right) - \sqrt{\frac{1}{3}}\left(|\overset{J}{\tfrac{1}{2}}\overset{J_z}{\tfrac{1}{2}}\rangle\right)$

Lo stato $|1\,1\rangle|\tfrac{1}{2}\,-\tfrac{1}{2}\rangle$: $+\sqrt{\frac{1}{3}}\left(|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right) + \sqrt{\frac{2}{3}}\left(|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$

Lo stato dell'elettrone posso scriverlo, in termini di autostati di J^2 e J_z:

$$R_{21}\left(\sqrt{\tfrac{1}{3}}\cdot\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle - \sqrt{\tfrac{1}{3}}\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{\tfrac{1}{3}}\,|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle + \sqrt{\tfrac{2}{3}}\sqrt{\tfrac{2}{3}}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle\right)$$

$$= R_{21}\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}\right)|\tfrac{3}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle + \frac{1}{3}\,|\tfrac{1}{2}\,\tfrac{1}{2}\rangle$$

$\Rightarrow$ J^2 sarà $\boxed{\hbar^2\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}+1\right) = \hbar^2\frac{15}{4}}$ con $P = \frac{8}{9}$

e $\hbar^2\frac{3}{4}$ con $P = \frac{1}{9}$