IL MOMENTO ANGOLARE

In meccanica classica il momento angolare di una particella che si trova nella posizione $\vec{r} = (x, y, z)$ e che ha momento $p = (p_x, p_y, p_z) = (mv_x, mv_y, mv_z)$ è definito come e

$$\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$$

Se sulla particella non agiscono momenti esterni, il momento angolare si conserva. Esempio classico: la pattinatrice che raccoglie le braccia mentre fa una piroetta aumenta la velocità angolare proprio perchè $\vec{L}$ deve conservarsi.

Le componenti di $\vec{L}$ si trovano eseguendo il prodotto:

$$\begin{vmatrix} L_x & L_y & L_z \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{cases} L_x = y p_z - z p_y \\ L_y = z p_x - x p_z \\ L_z = x p_y - y p_x \end{cases}$$

Per scrivere la forma quantistica:

$$p_x \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial x}$$
$$p_y \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial y}$$
$$p_z \to -i\hbar \frac{\partial}{\partial z}$$

REGOLE di COMMUTAZIONE

$$[L_x , L_y] = [y p_z - z p_y , z p_x - x p_z]$$

$$= [y p_z , z p_x] - [y p_z , x p_z] - [z p_y , z p_x] + [z p_y , x p_z]$$

$$[y p_z , x p_z] = y p_z x p_z - x p_z y p_z = y x p_z p_z - x y p_z p_z = 0$$

$$[z p_y , z p_x] = z p_y z p_x - z p_x z p_y = z^2 p_y p_x - z^2 p_x p_y = 0$$

$$= [y p_z , z p_x] + [z p_y , x p_z]$$

$$= y p_z z p_x - z p_x y p_z + z p_y x p_z - x p_z z p_y$$

$$= y p_x \underbrace{(p_z z - z p_z)}_{= -[z, p_z]} + x p_y \underbrace{(z p_z - p_z z)}_{= [z, p_z]}$$

$$= [z, p_z] (x p_y - y p_x)$$

$$= \boxed{i\hbar \; L_z}$$

$$\boxed{\begin{aligned} [L_x , L_y] &= i\hbar L_z \\ [L_y , L_z] &= i\hbar L_x \\ [L_z , L_x] &= i\hbar L_y \end{aligned}}$$

L_x, L_y e L_z sono incompatibili

$$\boxed{\sigma_{L_x}\sigma_{L_y} \geq \frac{\hbar}{2}\left|\langle L_z\rangle\right|}$$

$$\left(\sigma_A^2\sigma_B^2 \geq \left(\frac{1}{2i}\langle[A,B]\rangle\right)^2\right)$$

Se però considero $L^2 = L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$

ho che

$$[L^2, L_x] = \underbrace{[L_x^2, L_x]}_{=0} + [L_y^2, L_x] + [L_z^2, L_x]$$

$$[AB, C] = ABC - CAB \pm ACB$$
$$= A(BC - CB) + (AC - CA)B$$
$$= A[B,C] + [A,C]B$$

$$= L_y[L_y, L_x] + [L_y, L_x]L_y + L_z[L_z, L_x] + [L_z, L_x]L_z$$

$$= \cancel{L_y(-i\hbar L_z)} + \cancel{(-i\hbar L_z)L_y} + \cancel{L_z(i\hbar L_y)} + \cancel{(i\hbar L_y)L_z}$$

$$= 0$$

e così per $[L^2, L_y] = [L^2, L_z] = 0$

Quindi, ad esempio L^2 e L_z sono compatibili

NOTA: ma $\vec{L}$ è un'osservabile?

Sì, dimostriamo ad esempio che L_z è hermitiano:

$$L_z^\dagger = (x p_z - z p_x)^\dagger = (x p_z)^\dagger - (z p_x)^\dagger = p_z^\dagger x^\dagger - p_x^\dagger z^\dagger = p_z x - p_x z = x p_z - z p_x = L_z$$

Siccome L^2 e L_z sono compatibili, possiamo cercare autovettori in comune.

Supponiamo di avere stato ψ tale che

$$L^2 \psi = \lambda \psi$$
$$L_z \psi = \mu \psi$$

Introduciamo gli operatori costruttori/distruttori:

$$\boxed{L_\pm = L_x \pm i L_y}$$

Si ha:

$$\boxed{[L_z, L_\pm]} = [L_z, L_x] \pm i [L_z, L_y] = i\hbar L_y \pm i [-i\hbar L_x] = \pm\hbar (L_x \pm i L_y) = \boxed{\pm\hbar L_\pm}$$

mentre $\boxed{[L^2, L_\pm] = 0}$

Vediamo come $L_\pm$ agiscono su uno stato ψ.

Se ψ è autostato di L^2, lo è anche $L_\pm \psi$:

$$L^2(L_\pm \psi) = L_\pm L^2(\psi) = L_\pm \lambda \psi = \lambda(L_\pm \psi)$$

e con lo stesso autovalore!

Invece:

$$L_z(L_\pm \psi) = (L_z L_\pm \quad \pm L_\pm L_z)\psi$$

$$= (L_z L_\pm - L_\pm L_z)\psi + L_\pm L_z \psi$$

$$= \pm \hbar L_\pm \psi + L_\pm(\mu \psi) = (\mu \pm \hbar)(L_\pm \psi)$$

quindi $L_\pm \psi$ è autovettore di L_z con autovalore $\mu \pm \hbar$

Anche qui, come per l'oscillatore armonico, non possiamo salire o scendere all'∞ con L_z, perché dovrà essere comunque $L_z^2 \leq L^2$

Ci sarà uno stato ψ^{TOP} con autovalore μ^{TOP} tale che

$$L_z \psi^{TOP} = \mu^{TOP} \psi^{TOP}$$

ma che: $L_+ \psi_z^{TOP} = 0$

Chiamiamo $\boxed{\mu^{TOP} = \hbar l}$

e valutiamo:

$$L_\pm L_\mp = (L_x \pm iL_y)(L_x \mp iL_y)$$
$$= L_x^2 + L_y^2 \mp L_x iL_y \pm iL_y L_x$$
$$= L_x^2 + L_y^2 \mp i(L_x L_y - L_y L_x)$$
$$= L^2 - L_z^2 \mp i(i\hbar L_z)$$

$$\Longrightarrow \boxed{L^2 = L_\pm L_\mp + L_z^2 \mp \hbar L_z}$$

2 modi di esprimere L^2
I e II

Questa relazione ci serve per valutare $L^2 \psi^{TOP}$:

$$L^2 \psi^{TOP} = (\overset{\mathrm{II}}{L_- L_+} + L_z^2 + \hbar L_z)\psi^{TOP}$$
$$= 0 + \hbar^2 \ell^2 + \hbar^2 \ell = \hbar^2 \ell(\ell+1)\psi^{TOP}$$

cioè $\lambda = \hbar^2 \ell(\ell+1)$

Allo stesso modo avrò un autovettore ψ^{BOTTOM} e autovalore μ^{BOTTOM} sotto il quale non potrò scendere.
Anche qui definisco $\mu^{BOTT} = \hbar \bar{\ell}$ e scrivo:

$$L^2 \psi^{BOTT} = (\overset{\mathrm{I}}{L_+ L_-} + L_z^2 - \hbar L_z)\psi^{BOTT}$$
$$= (0 + \hbar^2 \bar{\ell}^2 - \hbar^2 \bar{\ell})\psi^{BOTT} = \hbar^2 \bar{\ell}(\bar{\ell}-1) = \psi^{BOTTOM}$$
$$\Longrightarrow \lambda = \hbar^2 \bar{\ell}(\bar{\ell}-1)$$

Quindi $\quad \bar{\ell}(\bar{\ell}-1) = \ell(\ell+1) \quad \Rightarrow \quad \bar{\ell} = -\ell$ $\quad$ * NOTA SOTTO

Quindi, dato l'autovalore di $L^2 = \lambda = \hbar^2 \ell(\ell+1)$,
L_z assume gli autovalori $\hbar m$, $m = -\ell, -\ell+1, \dots, \ell-1, \ell$

In particolare, $\quad \ell = -\ell + N$ $\quad$ ← gradini che devo fare con L_+

$$\boxed{\ell = \frac{N}{2}}$$ $\quad \ell$ è intero o semintero

$$\boxed{\begin{gathered} L^2 \psi_\ell^m = \hbar^2 \ell(\ell+1) \psi_\ell^m \quad ; \quad L_z \psi_\ell^m = m\hbar \psi_\ell^m \\ \ell = 0, \tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \dots \qquad m = -\ell, \dots, \ell \end{gathered}}$$

NOTA | La relazione vale per ogni $\hat{L}$ che ha le proprietà di commutazione che abbiamo trovato.
Non necessariamente $\hat{L}$ deve essere il momento angolare definito come $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$.

---

* $\bar{\ell}(\bar{\ell}-1) = \ell(\ell+1) \rightarrow \bar{\ell}^2 - \bar{\ell} - \ell(\ell+1) = 0$ la risolvo come fosse $ax^2+bx+c=0$

$\hookrightarrow x_{12} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

$\Rightarrow \bar{\ell}_{12} = \frac{1 \pm \sqrt{1+4\ell(\ell+1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{(2\ell+1)^2}}{2} = \begin{cases} -\ell \\ (\ell+1) \end{cases}$ → non accettabile, sono partito con L_- ....

Ora però, nel caso $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ ci interessa vedere la forma degli autovettori.

Non lo ricaviamo, ma se si trasformano L_x, L_y e L_z in coordinate sferiche, si trova:

$$L_z = \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$L^2 = -\hbar^2 \left[\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right]$$

Sono esattamente le equazioni trovate per la parte angolare in coord. sferiche!!

$\Rightarrow$ le autofunzioni di L_z e L^2 sono le armoniche sferiche $Y_\ell^m(\theta, \phi)$

Nell'eq. di Schrödinger dell'atomo di idrogeno:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial \psi}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta} \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} \right) \right] + V\psi = E\psi$$

$$\Downarrow$$

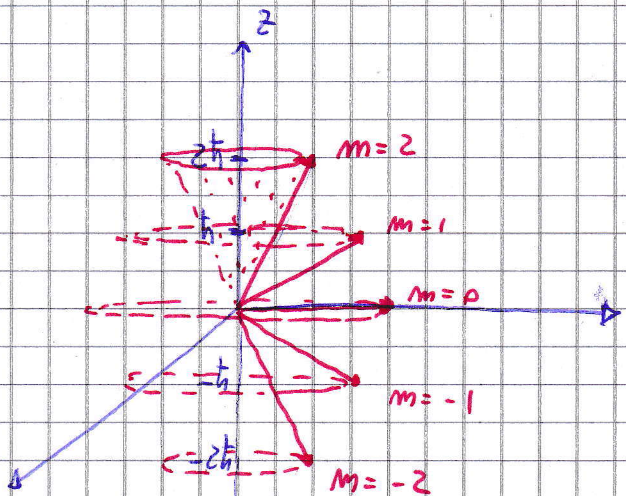
$$\boxed{\frac{1}{2mr^2} \left[-\hbar \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + L^2 \right] \psi + V\psi = E\psi}$$

- H, L^2 e L_z costituiscono un CSCO per l'atomo di idrogeno

- La soluzione per la parte angolare che ci aveva portato a trovare le Y_ℓ^m come soluzioni impone ℓ interi anche se algebricamente un momento angolare potrebbe avere ℓ seminteri

- I risultati che abbiamo ottenuto, ovvero che solo alcuni autovalori discreti di L^2 e L_z sono possibili, sono definiti a volte QUANTIZZAZIONE SPAZIALE.
In sostanza essi pongono dei vincoli alle proprietà orbitali della particella.

Esempio, se $\ell = 2$ avrò:



L_z potrà assumere i valori $2\hbar$, $\hbar$, 0, $-\hbar$, $-2\hbar$

Siccome L_x e L_y restano indefiniti, è più corretto rappresentare $\vec{L}$ come un cono anziché come una semplice freccia-vettore...