

## 4 Drogaggio e polarizzazioni

Ricapitolando quanto visto per le **giunzioni pn**, abbiamo che:

1. lungo l'**interfaccia**, le cariche libere (i.e. elettroni e buche) tendono a spostarsi nelle rispettive zone opposte, al fine di **ricombinarsi**, lasciando così **ionizzati** gli atomi di provenienza;
2. si crea dunque una **densità di carica** netta  $\rho(x)$ , descritta nella formula 18;
3. il **campo elettrico** *built-in*  $E(x)$  che si viene a generare, come descritto nella formula 20, inibisce ulteriori passaggi di cariche libere, e si crea una **zona di svuotamento** a ridosso dell'interfaccia;
4. il **potenziale elettrico**  $\phi(x)$ , descritto nella formula 27, ha un andamento analogo a quello dell'energia delle bande.

Osserviamo che nelle formule menzionate compare la **permittività elettrica**, che è definita come  $\varepsilon = \varepsilon_0 \varepsilon_r$ , dove  $\varepsilon_0$  è la **costante dielettrica del vuoto**, mentre  $\varepsilon_r$  è la **permittività relativa** (coefficiente **adimensionale**). Nel caso del **silicio**  $\varepsilon_r = 11.7$ .

Vediamo la **variazione massima di potenziale**  $V_0$ , ossia la **tensione built-in**. Possiamo ricavarla imponendo la condizione di raccordo  $\phi_p(x=0) = \phi_n(x=0)$ , da cui segue che:

$$\frac{qN_p}{2\varepsilon}x_p^2 = V_0 - \frac{qN_n}{2\varepsilon}x_n^2 \quad \Longrightarrow \quad V_0 = \frac{q}{2\varepsilon}(N_px_p^2 + N_nx_n^2) \quad (42)$$

Utilizzando la relazione 21, è possibile eliminare, in alternativa  $x_n$  od  $x_p$ , ottenendo le due espressioni equivalenti:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{q}{2\varepsilon} \left( N_px_p^2 + N_n \frac{N_p^2}{N_n^2} x_p^2 \right) = \frac{q}{2\varepsilon} N_px_p^2 \left( 1 + \frac{N_p}{N_n} \right) = \frac{q}{2\varepsilon} N_px_p^2 \frac{N_p + N_n}{N_n} \\ V_0 &= \frac{q}{2\varepsilon} \left( N_p \frac{N_n^2}{N_p^2} x_n^2 + N_nx_n^2 \right) = \frac{q}{2\varepsilon} N_nx_n^2 \left( \frac{N_n}{N_p} + 1 \right) = \frac{q}{2\varepsilon} N_nx_n^2 \frac{N_p + N_n}{N_p} \end{aligned} \quad (43)$$

Avere una stima di tale grandezza può essere utile in quanto una sua **misura diretta**, ad esempio inserendo degli elettrodi all'interno della zona svuotata, andrebbe a **perturbare il potenziale** creato.

Invertendo le relazioni precedenti (formula 43) possiamo esprimere gli spessori di svuotamento delle due zone come:

$$x_p = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q} \frac{N_n}{N_p(N_p + N_n)}} \quad \text{e} \quad x_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q} \frac{N_p}{N_n(N_p + N_n)}} \quad (44)$$

Per cui lo spessore di svuotamento complessivo sarà:

$$\begin{aligned}
W &= x_p + x_n = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q}} \frac{1}{\sqrt{N_p + N_n}} \left( \sqrt{\frac{N_n^2}{N_p N_n}} + \sqrt{\frac{N_p^2}{N_p N_n}} \right) = \\
&= \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q}} \frac{1}{\sqrt{N_p + N_n}} \left( \frac{N_p + N_n}{\sqrt{N_p N_n}} \right) = \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q}} \sqrt{\frac{N_p + N_n}{N_p N_n}} = \\
&= \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q} \left( \frac{1}{N_p} + \frac{1}{N_n} \right)}
\end{aligned} \tag{45}$$

Vediamo inoltre qual è il **modulo massimo del campo elettrico**, che si ha all'interfaccia della giunzione pn, ovvero  $E_{MAX} = E(x = 0)$ . Scegliendo di utilizzare la definizione del campo elettrico  $E_n(x)$  (seconda relazione nella formula 20), unitamente all'espressione dello spessore di svuotamento  $x_n$  (seconda relazione nella formula 44), otteniamo:

$$\begin{aligned}
E_{MAX} &= \frac{qN_n}{\varepsilon} x_n = \frac{qN_n}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q} \frac{N_p}{N_n(N_p + N_n)}} = \sqrt{\frac{q^2 N_n^2 2\varepsilon V_0}{\varepsilon^2 q} \frac{N_p}{N_n(N_p + N_n)}} = \\
&= \sqrt{\frac{2qV_0}{\varepsilon} \frac{N_p N_n}{(N_p + N_n)}} = \sqrt{\frac{2qV_0}{\varepsilon} \left( \frac{1}{N_p} + \frac{1}{N_n} \right)^{-1} \frac{2V_0}{2V_0}} \\
&= \sqrt{\left[ \frac{q}{2\varepsilon V_0} \left( \frac{1}{N_p} + \frac{1}{N_n} \right)^{-1} \right] 4V_0^2} = \frac{2V_0}{W}
\end{aligned} \tag{46}$$

Ricapitolando quanto già visto, le **densità dei portatori** in un semiconduttore (relazioni ?? e ??) possono essere scritte come:

$$n = N_C \exp \left[ - \left( \frac{E_C - E_F}{kT} \right) \right] \quad \text{e} \quad p = P_V \exp \left[ - \left( \frac{E_F - E_V}{kT} \right) \right] \tag{47}$$

Nel caso in cui esso sia **intrinseco**, queste coincidono, per cui possiamo definire la **densità intrinseca di portatori**  $n_i = n = p$ . Da questa ricaviamo che:

$$\begin{aligned}
N_C \exp \left[ - \left( \frac{E_C - E_F}{kT} \right) \right] &= P_V \exp \left[ - \left( \frac{E_F - E_V}{kT} \right) \right] \Rightarrow \\
\frac{N_C}{P_V} &= \exp \left[ - \left( \frac{E_F - E_V}{kT} - \frac{E_C - E_F}{kT} \right) \right] = \exp \left[ - \left( \frac{2E_F - E_V - E_C}{kT} \right) \right] \Rightarrow \\
-\ln \left( \frac{N_C}{P_V} \right) &= \frac{2E_F - E_V - E_C}{kT} \Rightarrow 2E_F - E_V - E_C = -kT \ln \left( \frac{N_C}{P_V} \right) \Rightarrow \\
E_F &= \frac{E_C + E_V + E_V - E_V}{2} - \frac{1}{2} kT \ln \left( \frac{N_C}{P_V} \right) = E_V + \frac{E_C - E_V}{2} - \frac{1}{2} kT \ln \left( \frac{N_C}{P_V} \right) \\
E_F &= E_V + \frac{E_g}{2} - \frac{1}{2} kT \ln \left( \frac{N_C}{P_V} \right)
\end{aligned} \tag{48}$$

Osserviamo che il rapporto  $N_C/P_V$  fra le densità dei portatori agli estremi delle rispettive bande, è dell'ordine dell'unità, per cui il termine logaritmico nella formula 48 è piccolo, dunque l'energia di Fermi si discosta dell'ordine di  $kT$  dal punto medio della banda di gap.

Vale inoltre la **legge di azione di massa** (relazione ??):

$$np = N_C P_V \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right) \propto T^3 \exp\left(-\frac{E_g}{kT}\right) \quad (49)$$

Questa formula è valida per semiconduttori **sia intrinseci che drogati**, infatti non dipende esplicitamente dall'energia di Fermi, la quale cambia, a seconda della purezza del semiconduttore considerato.

Abbiamo visto che il processo di drogaggio introduce nel semiconduttore portatori di carica di un solo tipo. Ciò non esclude però la presenza di portatori del tipo opposto, seppur in concentrazione minore. Per distinguerli, chiameremo:

- **maggioritari** quei portatori presenti in concentrazione maggiore (i.e. elettroni nel drogaggio  $n$ , e buche nel drogaggio  $p$ );
- **minoritari** quei portatori presenti in concentrazione minore (i.e. buche nel drogaggio  $n$ , ed elettroni nel drogaggio  $p$ ).

Nel caso di una **giunzione pn** all'equilibrio, il calcolo delle concentrazioni dei portatori deve tenere conto della presenza dei drogaggi. Dal fatto che il materiale è **elettricamente neutro**, le cariche devono essere bilanciate:

$$p + N_D^{(+)} = n + N_A^{(-)} \quad (50)$$

Notare che i drogaggi prevedono l'inserimento di atomi neutri, i quali non danno di per sé un contributo netto al bilancio delle cariche. Abbiamo dovuto però tenere conto delle ricombinazioni fra i portatori quasi-liberi nella zona svuotata: in tal senso, i droganti contribuiscono al bilancio grazie alla carica ionica rimasta. Quindi, oltre alle concentrazioni di elettroni e lacune ( $n$  e  $p$ , rispettivamente), abbiamo:

- $N_D^{(+)}$  (in precedenza anche chiamata  $N_p$ ), ovvero la **concentrazione degli atomi donori**, con carica positiva, in quanto considerati senza i rispettivi elettroni aggiuntivi;
- $N_A^{(-)}$  (in precedenza anche chiamata  $N_n$ ), ovvero la **concentrazione degli atomi accettori**, con carica negativa, in quanto considerati senza le rispettive buche aggiuntive.

Per chiarezza, l'indicazione della carica con cui ciascun drogante contribuisce, è stata riportata in apice, ma essendo ridondante non verrà più indicata esplicitamente.

Utilizzando la **legge di azione di massa** (relazione ??), possiamo sostituire all'interno della precedente (formula 50), una concentrazione, fra  $n$  e  $p$ , in funzione dell'altra, ottenendo:

$$p + N_D = \frac{n_i^2}{p} + N_A \quad \text{e} \quad \frac{n_i^2}{n} + N_D = n + N_A \quad (51)$$

Volendo considerare la situazione in cui una delle due concentrazioni è molto maggiore dell'altra, posso dividere per la concentrazione dei donori o degli accettori, a seconda dei casi, ottenendo:

$$\frac{p}{N_A} + \frac{N_D}{N_A} = \frac{n_i}{p} \frac{n_i}{N_A} + 1 \quad \text{e} \quad \frac{n_i}{n} \frac{n_i}{N_D} + 1 = \frac{n}{N_D} + \frac{N_A}{N_D} \quad (52)$$

Ricordiamo che, in pratica, possiamo realizzare una giunzione  $pn$  inizialmente **drogando tutto il semiconduttore di un unico tipo**, che costituisce la **base** del nostro drogaggio, e solo in un secondo momento ne **droghiamo pesantemente una parte del tipo opposto** (i.e. con una concentrazione molto maggiore, anche di diversi ordini di grandezza rispetto alla precedente). Il ragionamento che stiamo seguendo ha dunque fini pratici, ed è anche chiaro il motivo per cui si ha presenza di entrambi i tipi di drogaggio in tutta la giunzione, seppur in misura maggioritaria o minoritaria, a seconda dei casi, che ora analizziamo.

Nel caso in cui **prevalgano gli accettori**, avremo che  $N_A \gg N_D$ , ed anche  $N_A \gg n_i$  (così non fosse, prevarrebbe il comportamento del materiale intrinseco). Sotto tali condizioni, dalla precedente formula 52, e dalla legge di azione di massa ??, otteniamo che:

$$p \simeq N_A \quad \text{ed} \quad n \simeq \frac{n_i^2}{N_A} \ll N_A \quad (53)$$

In questo caso viene a crearsi un **semiconduttore drogato di tipo p**, in cui la conducibilità è dominata dalla presenza delle buche.

Nel caso in cui invece **prevalgano i donori**, abbiamo che  $N_D \gg N_A$  e che  $N_D \gg n_i$ . Per considerazioni analoghe alle precedenti, otteniamo:

$$n \simeq N_D \quad \text{e} \quad p \simeq \frac{n_i^2}{N_D} \ll N_D \quad (54)$$

Si tratta in questo caso di un **semiconduttore drogato di tipo n**, in cui la conducibilità è dominata dalla presenza degli elettroni.

Vediamo ora di capire quanto l'energia di Fermi ( $E_F$ ) si discosta dai limiti  $E_C$  ed  $E_V$  delle rispettive bande di conduzione e valenza. Consideriamo ad esempio il caso di un **semiconduttore di tipo n**, nel quale dunque  $n \gg p$ . Per chiarezza, indichiamo il tipo di drogaggio in apice all'energia di Fermi, che dunque chiameremo  $E_F^{(n)}$ . Dal bilanciamento delle cariche (formula 50), e tenendo conto anche della densità di elettroni in BC (formula ??), otteniamo:

$$n = N_D - N_A \quad \Longrightarrow \quad N_C \exp \left[ - \left( \frac{E_C - E_F^{(n)}}{kT} \right) \right] = N_D - N_A$$

$$\frac{E_C - E_F^{(n)}}{kT} = - \ln \left( \frac{N_D - N_A}{N_C} \right) = \ln \left( \frac{N_C}{N_D - N_A} \right) \quad (55)$$

Quindi osserviamo che, al crescere di  $N_D$ , l'energia di Fermi  $E_F^{(n)}$  tende ad avvicinarsi al minimo della banda di conduzione  $E_C$ . Nel caso non-degenere abbiamo  $E_C > E_F^{(n)}$ , ed è quindi evidente che l'argomento del logaritmo dovrà essere  $N_C / (N_D - N_A) > 1$ , ovvero  $N_C > N_D - N_A$ .

Possiamo esprimere convenientemente la concentrazione degli elettroni in BC (formula ??) in funzione dei parametri del materiale intrinseco, cioè:

$$\begin{aligned}
n &= N_C \exp \left[ - \left( \frac{E_C - E_i + E_i - E_F^{(n)}}{kT} \right) \right] = \\
&= N_C \exp \left[ - \left( \frac{E_C - E_i}{kT} \right) \right] \exp \left( \frac{E_F^{(n)} - E_i}{kT} \right) = \\
&= n_i \exp \left( \frac{E_F^{(n)} - E_i}{kT} \right)
\end{aligned} \tag{56}$$

dove ricordiamo che  $E_i$  indica l'energia di Fermi del materiale intrinseco. Tenendo conto che  $n = N_D - N_A$  (semiconduttore tipo  $n$ ), vediamo che il valore raggiunto dall'energia di Fermi differisce da quello intrinseco di una quantità pari a:

$$E_F^{(n)} - E_i = kT \ln \left( \frac{n}{n_i} \right) = kT \ln \left( \frac{N_D - N_A}{n_i} \right) \tag{57}$$

Con ragionamento analogo, nel caso di un **semiconduttore di tipo p** abbiamo che  $p \gg n$ , e dunque  $p = N_A - N_D$ . La densità degli elettroni in BV (formula ??) può essere riscritta in termini dei parametri intrinseci, come:

$$\begin{aligned}
p &= P_V \exp \left[ - \left( \frac{E_F^{(p)} - E_i + E_i - E_V}{kT} \right) \right] = \\
&= P_V \exp \left[ - \left( \frac{E_i - E_V}{kT} \right) \right] \exp \left( \frac{E_i - E_F^{(p)}}{kT} \right) = \\
&= n_i \exp \left( \frac{E_i - E_F^{(p)}}{kT} \right)
\end{aligned} \tag{58}$$

Lo scarto tra l'energia di Fermi intrinseca e quella del materiale drogato è:

$$E_i - E_F^{(p)} = kT \ln \left( \frac{p}{n_i} \right) = kT \ln \left( \frac{N_A - N_D}{n_i} \right) \tag{59}$$

Posso ora introdurre il **potenziale elettrico** di cui risentono i portatori di carica:  $\phi_p$  per le buche nel drogaggio  $p$ , e  $\phi_n$  per gli elettroni nel drogaggio  $n$ . Se  $q$  è la carica elementare del portatore, avremo:

$$E_i - E_F^{(p)} = q\phi_p \quad \text{ed} \quad E_F^{(n)} - E_i = q\phi_n \tag{60}$$

Queste possono essere riscritte usando le relazioni 57 e 59, ottenendo:

$$\begin{aligned}
kT \ln \left( \frac{p}{n_i} \right) = q\phi_p &\quad \Longrightarrow \quad \frac{p}{n_i} = \exp \left( \frac{q\phi_p}{kT} \right) \\
kT \ln \left( \frac{n}{n_i} \right) = q\phi_n &\quad \Longrightarrow \quad \frac{n}{n_i} = \exp \left( \frac{q\phi_n}{kT} \right)
\end{aligned} \tag{61}$$

La somma di questi due potenziali risulta essere il **potenziale built-in**  $V_0$ , precedentemente introdotto. Tenendo conto delle relazioni in formula 61, possiamo scriverlo come:

$$\begin{aligned} V_0 = \phi_n + \phi_p &= \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{n}{n_i}\right) + \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{p}{n_i}\right) = \\ &= \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{np}{n_i^2}\right) \simeq \frac{kT}{q} \ln\left(\frac{N_D N_A}{n_i^2}\right) \end{aligned} \quad (62)$$

dove nell'ultimo passaggio abbiamo tenuto conto che  $n \simeq N_D$  nel drogaggio  $n$ , mentre  $p \simeq N_A$  nel drogaggio  $p$ .

Osserviamo che per ottenere del silicio drogato, le concentrazioni dei droganti (donori o accettori, a seconda del tipo di drogaggio) possono essere scelte in un intervallo limitato, in particolare avremo:

- un valore **minimo**  $N_{min} \simeq 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ . Infatti stiamo ragionando nell'ipotesi che il drogaggio porti un numero di cariche libere significativamente maggiore rispetto a quelle presenti nel materiale intrinseco. La concentrazione delle impurità dovrà dunque essere  $N_{min} \gg n_i$ , ovvero molto maggiore di quella dei portatori nel materiale intrinseco. Nel caso del silicio abbiamo  $n_i \simeq 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ , è dunque ragionevole richiedere che sia perlomeno  $N_{min} \simeq 10^2 n_i$ ;
- un valore **massimo**  $N_{max} \simeq 10^{19 \div 20} \text{ cm}^{-3}$ . Infatti l'operazione di drogaggio è unicamente volta ad introdurre nuovi portatori di carica, mantenendo idealmente inalterata la struttura cristallina del materiale intrinseco. Ciò porta dunque a limitare superiormente la concentrazione di impurezze ad un valore molto più basso di quello degli atomi nel materiale intrinseco. Come abbiamo già visto, la concentrazione di atomi di silicio nel cristallo intrinseco è  $n_{Si} \simeq 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ , ed è dunque ragionevole richiedere che sia perlomeno  $N_{max} \simeq 10^{-(2 \div 3)} n_{Si}$ .

**Esempio.** Considero una giunzione  $pn$  in silicio a temperatura ambiente ( $T_0 = 300 \text{ K}$ ), le cui due concentrazioni, degli accettori e dei donori, sono rispettivamente:

$$N_A = 5.0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \quad \text{e} \quad N_D = 5.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

Notiamo che questi valori rientrano nei limiti appena visti. Posso ricavare il potenziale *built-in* attraverso la formula 62:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{kT_0}{q} \ln\left(\frac{N_D N_A}{n_i^2}\right) = \frac{0.026 \text{ eV}}{e} \ln\left[\frac{(5 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3})(5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3})}{(1.4 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3})^2}\right] = \\ &= 0.026 \text{ V} \ln\left(\frac{5^2 \cdot 10^{31}}{1.4^2 \cdot 10^{20}}\right) = 0.026 \text{ V} \ln\left(\frac{5^2}{1.4^2} \cdot 10^{11}\right) = \\ &= 0.026 \text{ V} [2 \ln(5) - 2 \ln(1.4) + 11 \ln(10)] = 0.026 \cdot 27.87 \text{ V} = 0.72 \text{ V} \end{aligned}$$

Gli spessori di svuotamento saranno diversi nei due lati della giunzione. Dalla formula 44 ricavo dunque lo spessore di svuotamento dal lato  $n$ :

$$\begin{aligned}
 x_n &= \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q} \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)}} = \\
 &= \sqrt{\frac{2 (1.054 \cdot 10^{-12} \text{ F cm}^{-1}) 0.72 \text{ V}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \frac{5.0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}}{5.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3} (5.0 \cdot 10^{15} + 5.0 \cdot 10^{16}) \text{ cm}^{-3}}} = \\
 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1.054 \cdot 0.72 \cdot 5.0}{1.6 \cdot 5.0 (5.0 + 50)} 10^{(-12+15+19-16-15)} \frac{\text{C V}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ V cm}^{-3}}{\text{C cm}^{-3} \text{ cm}^{-3}}} = \\
 &= \sqrt{0.01724 \cdot 10^{-9} \text{ cm}^2} = \sqrt{17.24 \cdot 10^{-12}} \text{ cm} = 4.2 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = 0.042 \text{ } \mu\text{m}
 \end{aligned}$$

Grazie alla relazione 21, lo spessore di svuotamento dal lato  $p$  è:

$$x_p = x_n \frac{N_D}{N_A} = 0.042 \text{ } \mu\text{m} \cdot 10 = 0.42 \text{ } \mu\text{m}$$

Lo spessore totale di svuotamento, che corrisponde alla somma dei due precedenti, è ricavabile dalla formula 45:

$$\begin{aligned}
 W &= \sqrt{\frac{2\varepsilon V_0}{q} \left( \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right)} = \\
 &= \sqrt{\frac{2 (1.054 \cdot 10^{-12} \text{ F cm}^{-1}) 0.72 \text{ V}}{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \left( \frac{1}{5.0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}} + \frac{1}{5.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}} \right)} = \\
 &= \sqrt{\frac{2 \cdot 1.054 \cdot 0.72}{1.6} \left( \frac{1 + 0.1}{5.0} \right) \cdot 10^{(-12+19-15)} \frac{\text{C V}^{-1} \text{ cm}^{-1} \text{ V}}{\text{C cm}^{-3}}} = \\
 &= \sqrt{0.209 \cdot 10^{-8} \text{ cm}^2} = 0.46 \cdot 10^{-4} \text{ cm} = 0.46 \text{ } \mu\text{m}
 \end{aligned}$$

Osserviamo che:

- Lo spessore svuotato dal lato  $n$  è circa il 10% di quello complessivo  $W$ , e ciò è consistente con la proporzione vista in formula 21, essendo  $N_D = 10N_A$ ;
- Una particella passante nel silicio produce mediamente 80 ionizzazioni per  $\mu\text{m}$ . Essendo lo spessore della zona svuotata  $W \simeq 0.5 \text{ } \mu\text{m}$ , otterremo circa 40 ionizzazioni, insufficienti per avere un buon segnale.

Il modulo del campo elettrico è massimo nella coordinata di giunzione  $x = 0$ , e può essere calcolato come visto in formula 46:

$$\begin{aligned}
 E_{MAX} &= E(x = 0) = \frac{qN_D}{\varepsilon} x_n = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C } 5.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}}{1.054 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ cm}^{-1}} \cdot 4.1 \cdot 10^{-6} \text{ cm} = \\
 &= \frac{1.6 \cdot 5.0 \cdot 4.1}{1.054} \cdot 10^{(-19+16-6+12)} \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 31 \cdot 10^3 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 3.1 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{cm}}
 \end{aligned}$$

Si tratta di un campo **molto intenso**, concentrato in un piccolo spessore di materiale, nel quale ci aspetteremmo correnti altrettanto intense: ciò non si verifica poiché non ci sono portatori liberi di carica in tale zona. Per questo motivo avremo **basso rumore** nella zona di svuotamento. Osserveremo una corrente solo quando una particella ionizzante passa nella zona di svuotamento, provocando un rilascio di cariche. Queste effettueranno un moto di deriva dovuto alla presenza del campo elettrico, potendo essere così raccolte agli elettrodi, in periferia della giunzione.

Vedremo prossimamente che applicando un potenziale esterno è possibile svuotare completamente il volume finito della giunzione. Capiremo in che modo verrà modificato il campo elettrico in funzione della tensione fornita, chiedendoci, in particolare, fino a che punto sia realmente utile aumentarla.

Riepiloghiamo quanto visto in un confronto tra il silicio intrinseco e drogato:

Intrinseco	Tipo $p$	Tipo $n$
$n_i = p = n$	$N_A \gg n_i \Rightarrow p \simeq N_A$	$N_D \gg n_i \Rightarrow n \simeq N_D$
$n_i \simeq 10^{10} \text{ cm}^{-3}$	$N_A \simeq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ (ad es.)	$N_D \simeq 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ (ad es.)
$np = n_i^2 = 10^{20} \text{ cm}^{-6}$	$n = n_i^2/p = 10^3 \text{ cm}^{-3}$	$p = n_i^2/n = 10^3 \text{ cm}^{-3}$
$\mathbf{n + p = 2n_i = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}}$	$\mathbf{n + p \simeq p = 10^{17} \text{ cm}^{-3}}$	$\mathbf{n + p \simeq n = 10^{17} \text{ cm}^{-3}}$

Osserviamo che la concentrazione totale dei portatori ( $n + p$ ) del silicio intrinseco assume un valore che è 7 ordini di grandezza più piccolo di quelle del silicio drogato: con un numero così elevato di portatori, ci aspettiamo un aumento significativo della conducibilità.

Ci preoccupiamo dunque di calcolare la **resistività** nel caso di semiconduttori drogati. Generalizzando la formula ?? vista nel caso intrinseco, possiamo scrivere:

$$\rho = \frac{1}{q(p\mu_h + n\mu_e)} \quad (63)$$

Nei due diversi tipi di drogaggio, avremo:

$$\rho_p \simeq \frac{1}{qp\mu_h} \simeq \frac{1}{qN_A\mu_h} \quad \text{e} \quad \rho_n \simeq \frac{1}{qp\mu_e} \simeq \frac{1}{qN_D\mu_e} \quad (64)$$

Ad esempio, se consideriamo  $N_D = N_A = 1.0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ , ovvero due concentrazioni identiche per donori ed accettori, otteniamo:

$$\begin{aligned} \rho_p &= \left[ 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1.0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \cdot 450 \frac{\text{cm}^2}{\text{V s}} \right]^{-1} = \frac{10^{(19-13-2)}}{1.6 \cdot 4.50} \frac{\text{V s cm}}{\text{C}} = \\ &= 0.139 \cdot 10^4 \text{ V A}^{-1} \text{ cm} = 1390 \Omega \text{ cm} \\ \rho_n &= \left[ 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1.0 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3} \cdot 1350 \frac{\text{cm}^2}{\text{V s}} \right]^{-1} = \frac{10^{(19-13-3)}}{1.6 \cdot 1.35} \frac{\text{V s cm}}{\text{C}} = \\ &= 0.463 \cdot 10^3 \text{ V A}^{-1} \text{ cm} = 463 \Omega \text{ cm} \end{aligned}$$

In sostanza, passare dal semiconduttore intrinseco a quello drogato non modifica le proprietà del cristallo, infatti stiamo introducendo una quantità irrisoria di impurezze (dell'ordine di una ogni  $10^9$  atomi di silicio puro). Nel materiale intrinseco, come abbiamo visto, la presenza di cariche libere è un fenomeno di natura casuale, descrivibile in modo statistico,



mentre attraverso il drogaggio stiamo introducendo un numero di cariche libere pari a quello delle impurezze.

Vediamo cosa succede quando introduco un **potenziale esterno** in una giunzione pn. Per consuetudine, chiameremo il potenziale *built-in*  $V_{bi} = V_0$ . Come visibile in fig. 28, a partire dalla situazione iniziale di equilibrio termico (in cui le bande energetiche si piegano per eguagliare l'energia di Fermi da ambo le parti) posso avere due possibilità:

- **polarizzazione diretta** (*forward bias*). In questo caso, gli elettroni presenti nel lato  $n$  e le buche in quello  $p$ , vengono spinti verso i rispettivi lati opposti, andando a neutralizzare gli ioni in zona svuotata. In tal modo viene favorita la conducibilità. L'iniziale dislivello di potenziale *built-in* ( $V_{bi}$ ) fra le bande, viene ridotto;
- **polarizzazione inversa** (*reverse bias*). In questo caso, gli elettroni presenti nel lato  $n$  e le buche in quello  $p$ , fluiscono lungo il circuito, a causa del potenziale introdotto. Come risultato, rimangono più ioni negativi dal lato  $p$ , e positivi dal lato  $n$ , cosa che di fatto allarga la zona di svuotamento, ostacolando maggiormente il passaggio di elettroni. L'iniziale dislivello di potenziale *built-in* ( $V_{bi}$ ) fra le bande, aumenta.

In fig. 29, si osserva che il materiale, in polarizzazione diretta si comporta da conduttore, mentre in polarizzazione inversa, anche aumentando il modulo del potenziale applicato, non si ha passaggio di corrente. Ciò in pratica avviene fintantoché non si raggiunge il **potenziale di breakdown**, dove la giunzione si comporta nuovamente da conduttore. Mantenendo questa condizione per un tempo sufficientemente lungo, si possono avere danni permanenti sia per effetti termici che reticolari.

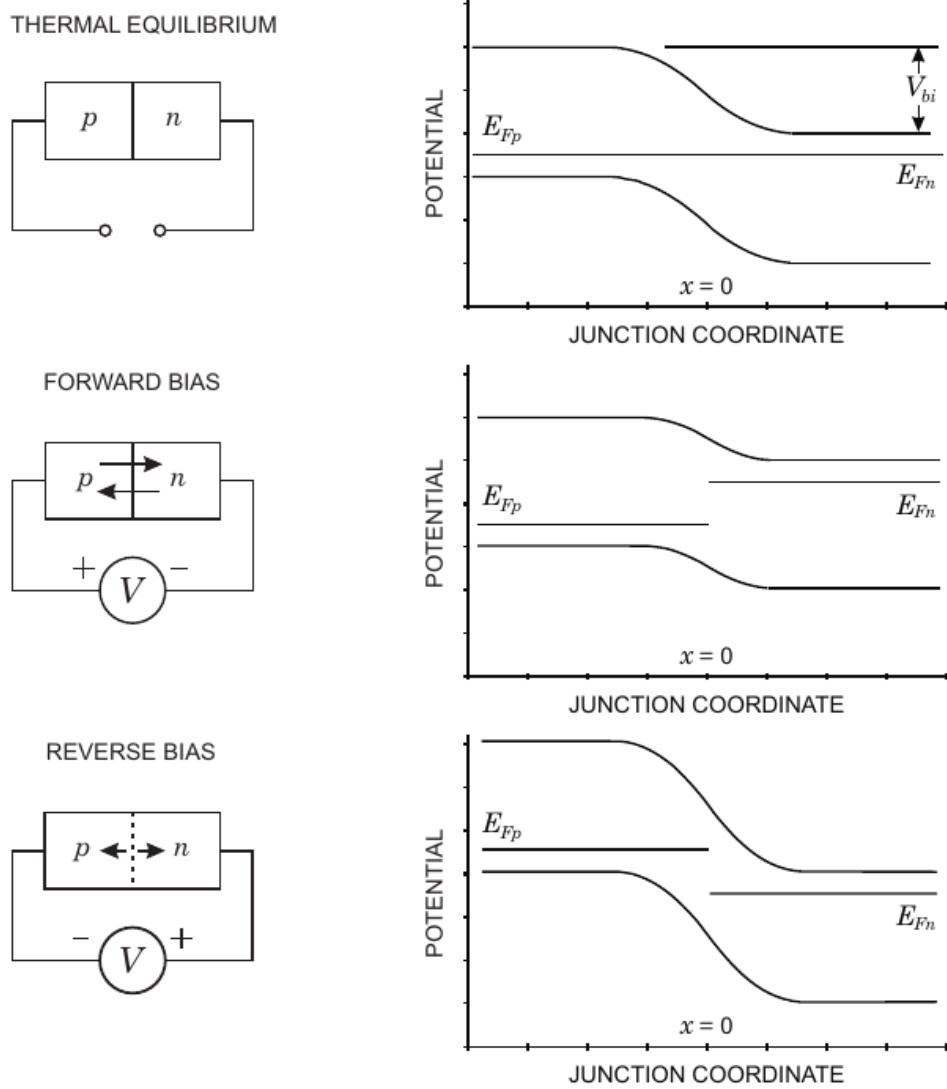


Figura 28: Confronto tra: giunzione  $pn$  all'equilibrio termico, in polarizzazione diretta (*forward bias*), ed inversa (*reverse bias*). All'equilibrio, le bande si piegano per eguagliare l'energia di Fermi su entrambi i lati. In polarizzazione diretta, la differenza di potenziale si riduce, favorendo il passaggio di elettroni. In polarizzazione inversa invece, la differenza di potenziale aumenta, bloccando il passaggio di elettroni.

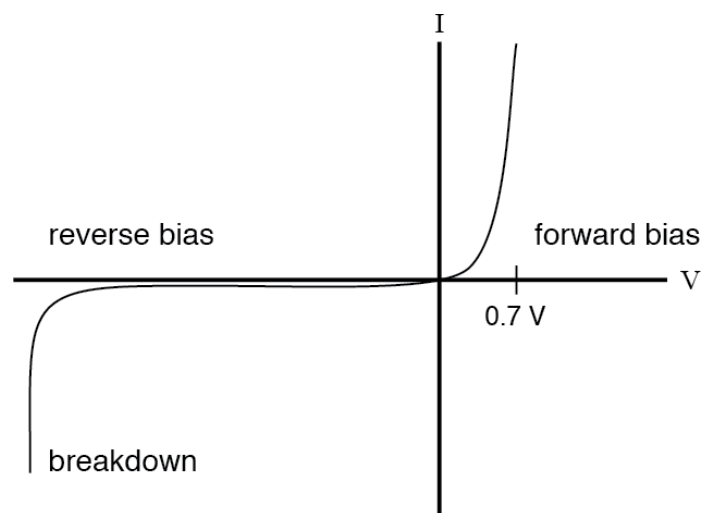


Figura 29: Curva di tensione-corrente per una giunzione *pn* in silicio. A potenziali positivi (*forward bias*) la giunzione si comporta da conduttore: la corrente cresce molto velocemente in funzione della tensione. A potenziali negativi (*reverse bias*) la giunzione si comporta da isolante: al crescere del potenziale, la corrente rimane ad un piccolo valore costante (corrente di buio, o *dark current*). Se il potenziale aumenta sino al valore di rottura (*breakdown*), si ha nuovamente conducibilità, e la corrente aumenta rapidamente.

## 5 Capacità della giunzione

Abbiamo visto che i valori tipici delle concentrazioni di drogaggio sono  $10^{12-20} \text{ cm}^{-3}$ , con un profilo che, rispetto alla coordinata della giunzione, è **idealmente** a gradino (come riportato nel grafico in alto di fig. 27). Nella realtà tale profilo è più **smussato**, poiché varia in modo **continuo**, ma comunque **simmetrico** rispetto alla coordinata della giunzione. Per questo motivo è sufficiente la trattazione vista fin'ora, senza dover ricalcolare le formule già viste.

Ricordiamo i passaggi principali con cui si giunge alla formazione di una giunzione pn:

1. Il **principio di diffusione** prevede che le cariche libere di ciascun tipo, presenti nei rispettivi lati, tendano ad occupare **tutto il volume** a disposizione, diffondendo verso i rispettivi lati opposti della giunzione;
2. Avendo segno opposto, le cariche libere si **neutralizzano**, lasciando **ionizzati** gli atomi, fissi nelle loro posizioni reticolari, a cui appartenevano. Tale processo inizia dapprima a ridosso della giunzione, per poi coinvolgere atomi man mano più periferici;
3. Si viene così a creare una **zona di svuotamento** in cui troviamo un egual numero di atomi ionizzati negativamente, nel lato  $p$ , e positivamente, nel lato  $n$ ;
4. Il processo diffusivo prosegue fintantoché il **campo elettrico built-in** che si viene a creare grazie agli atomi ionizzati nella zona di svuotamento, impedisce il passaggio di ulteriori cariche libere.

Ci troviamo in una condizione di **equilibrio termico**, in cui la diffusione è contrastata dal potenziale *built-in* che si è venuto a creare ( $V_{bi} \simeq 0.7 \text{ V}$ , nel caso del silicio).

La corrente totale che fluisce nella giunzione ( $\vec{J}_{tot}$ ), è data dal contributo delle componenti di **deriva** e di **diffusione**, ovvero  $\vec{J}_{tot} = \vec{J}_{der} + \vec{J}_{diff}$ . Nel dettaglio:

- la **corrente di diffusione** ( $\vec{J}_{diff}$ ) è unicamente dovuta alla presenza di un **gradiente di concentrazione** delle cariche libere, che tendono a muoversi verso quelle di segno opposto, e per tale motivo è detta anche **corrente di ricombinazione** ( $\vec{J}_{ric}$ );
- la **corrente di deriva** ( $\vec{J}_{der}$ ) dipende invece solo dalle **cariche generate** all'interno della zona svuotata, e per tale motivo è detta anche **corrente di generazione** ( $\vec{J}_{gen}$ ).

All'equilibrio termico, osserviamo che non circola alcuna corrente, ovvero  $\vec{J}_{tot} = \vec{0}$ . Ciò comporta che le due componenti, in generale non-nulle, debbano compensarsi:  $\vec{J}_{der} = -\vec{J}_{diff}$ .

Se inserisco un generatore di tensione in polarizzazione **diretta** (come nello schema al centro in fig. 28), sto sostanzialmente **introducendo elettroni nel lato n e buche nel lato p**. Per cui fornisco portatori liberi di carica, che, diffondendo nella zona svuotata, ripristinano la neutralità degli ioni da entrambi i lati della giunzione. Di conseguenza il campo elettrico cala in intensità, e **la barriera di potenziale diminuisce**.

La corrente totale non è nulla ( $\vec{J}_{tot} \neq \vec{0}$ ), ed il contributo dominante è dovuto alla componente di **diffusione**. La componente di deriva non influisce apprezzabilmente per due ragioni:

- avendo ridotto il volume della zona svuotata, si è ridotta anche la probabilità di generare coppie di cariche libere;
- si è ridotto anche il potenziale, e dunque il modulo del campo elettrico, ossia ciò che causa del moto delle cariche.

In questo regime, il materiale si comporta da **conduttore**. La corrente che fluisce lungo la giunzione, in funzione del potenziale introdotto, ha un andamento inizialmente lineare (per i primi decimi di Volt), a cui segue una crescita esponenziale, come visibile nel grafico in fig. 29. Esiste un **valore massimo di tensione** applicata per l'operatività della giunzione: a  $\sim 0.7$  V stiamo infatti compensando la tensione *built-in* ( $V_{bi}$ ), e la zona svuotata idealmente non sussiste più, in realtà ne rimane comunque una piccola parte, dovuta alla presenza del drogaggio.

Diamo una spiegazione al fenomeno della conduzione in *forward bias*. Rispetto alla situazione iniziale di equilibrio termico, il potenziale esterno aumenta la concentrazione di cariche libere in entrambi gli estremi della giunzione. Riprende dunque il moto di diffusione, che spinge le cariche a muoversi verso i rispettivi lati opposti lungo la giunzione, portandole a ricombinarsi. A differenza dell'equilibrio termico, in cui le ricombinazioni portavano ad un incremento del volume della zona svuotata, in questo caso il generatore provvede a portare nuove cariche libere ad entrambi gli estremi della giunzione, ripristinandone la concentrazione iniziale, ed il processo si ripete. In tal modo si osserva il passaggio di una corrente nel circuito.

Vediamo cosa succede quando inserisco il generatore di tensione in polarizzazione **inversa**. Per comodità, esprimiamo il potenziale complessivo come la somma quello fornito dal generatore ( $V_R$ ) e quello intrinseco della giunzione ( $V_{bi}$ ):

$$V = V_R + V_{bi} \quad (65)$$

Come si può osservare in fig. 28, **la barriera di potenziale cresce**, e quindi aumenta anche il modulo del campo elettrico presente nella zona svuotata. Questo è proporzionale all'entità delle cariche che lo generano ( $Q$ ) all'interno della zona svuotata. Tale quantità dipende dalla concentrazione del drogaggio ( $N_q$ , i.e. quanti ioni positivi e negativi ci sono nella zona svuotata, per unità di volume) moltiplicata per lo spessore di svuotamento ( $W$ , assumendo che la sezione trasversa della giunzione sia costante). Possiamo dunque scrivere:

$$E \propto Q \propto N_q W \quad (66)$$

Siccome la concentrazione di cariche non cambia, l'incremento al campo elettrico può essere unicamente dovuto ad un **aumento dello spessore della zona svuotata**. Quindi, osservandolo in funzione della tensione, avremo:

$$W(V_R + V_{bi}) > W(V_{bi}) \quad (67)$$

In sostanza, attraverso il generatore di tensione, stiamo inserendo cariche libere di segno opposto rispetto a quelle già presenti in ciascuno dei due lati a causa del drogaggio. Abbiamo quindi un maggior numero di ricombinazioni alle due periferie della zona svuotata, con un aumento dello spessore  $W$  di svuotamento.

In questo regime, la corrente di diffusione è ancora più piccola di quella che avevamo all'equilibrio termico, per cui è trascurabile ( $\vec{J}_{diff} = \vec{0}$ ). Avendo un campo elettrico più intenso, ci potremmo aspettare un contributo significativo da parte della corrente di deriva: ciò in realtà non avviene poiché la zona svuotata è sostanzialmente **priva di cariche libere**. Ciò che si osserva, all'aumentare della tensione di *reverse bias*, è una corrente di deriva molto piccola ( $|\vec{J}_{der}| \gtrsim 0$ ), che inizialmente cresce in modo lineare, e subito si stabilizza ad un valore costante. Ciò accade poiché il puro moto di deriva è contrastato dalla presenza degli atomi attraverso i quali le particelle diffondono: in tali condizioni esse raggiungono una velocità limite.

Quest'ultima viene chiamata **corrente di buio** (*dark current*), nota anche come *leakage current*, a seconda delle applicazioni. Essa è sempre presente, e sussistono inoltre fenomeni che, col tempo, possono aumentarla: per tali motivi si cerca sempre di **minimizzarla**.

Quanto visto accade fintantoché, aumentando la tensione di *reverse bias*, non si raggiunge il valore di **rottura** (o *breakdown*), oltre al quale entrano in gioco altri fenomeni, e si ha un aumento esponenziale della corrente.

La giunzione *pn* è in definitiva un oggetto che può comportarsi da conduttore od isolante, a seconda della tensione con cui viene alimentata. Nel nostro caso, la useremo come rivelatore di particelle, quindi sempre in *reverse bias*. La si può trovare in diverse applicazioni elettroniche, quali i **diodi** ed i **transistor**, usati anche come **amplificatori**.

Le grandezze già introdotte per le giunzioni in regime di equilibrio termico, che ridefiniremo aggiungendovi il **pedice 0**, possono facilmente essere riadattate al regime di *reverse bias*. In particolare, gli **spessori di svuotamento** (formule 44 e 45) possono essere scritti come:

$$\begin{aligned}
 x_p &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)}} = x_{p,0} \sqrt{\frac{V_R + V_{bi}}{V_{bi}}} = x_{p,0} \sqrt{1 + \frac{V_R}{V_{bi}}} \\
 x_n &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)}} = x_{n,0} \sqrt{\frac{V_R + V_{bi}}{V_{bi}}} = x_{n,0} \sqrt{1 + \frac{V_R}{V_{bi}}} \\
 W &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_A + N_D}{N_A N_D}} = W_0 \sqrt{\frac{V_R + V_{bi}}{V_{bi}}} = W_0 \sqrt{1 + \frac{V_R}{V_{bi}}}
 \end{aligned} \tag{68}$$

Mentre il **campo elettrico massimo** (formula 46) viene ad essere:

$$\begin{aligned}
 E_{MAX} &= \sqrt{\frac{2q(V_R + V_{bi})}{\varepsilon} \frac{N_A N_D}{(N_A + N_D)} \frac{2(V_R + V_{bi})}{2(V_R + V_{bi})}} = \\
 &= \sqrt{\left[ \frac{q}{2\varepsilon(V_R + V_{bi})} \frac{N_A N_D}{(N_A + N_D)} \right] 4(V_R + V_{bi})^2} = \\
 &= \frac{2(V_R + V_{bi})}{W}
 \end{aligned} \tag{69}$$

**Esempio.** Considero la giunzione  $pn$  in silicio vista in precedenza (a temperatura ambiente  $T_0 = 300$  K, con  $N_A = 5.0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  e  $N_D = 5.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ), per la quale avevamo già trovato che  $x_{p,0} = 0.42 \text{ }\mu\text{m}$  e  $x_{n,0} = 0.042 \text{ }\mu\text{m}$ .

Applicando una differenza di potenziale in regime di *reverse bias*  $V_R = 4.0$  V ai capi della giunzione, gli spessori di svuotamento diventano:

$$x_p = x_{p,0} \sqrt{\frac{V_R + V_{bi}}{V_{bi}}} = 0.42 \cdot \sqrt{\frac{4.0 + 0.7}{0.7}} \text{ }\mu\text{m} = 0.42 \cdot 2.6 \text{ }\mu\text{m} = 1.1 \text{ }\mu\text{m}$$

$$x_n = x_{n,0} \sqrt{\frac{V_R + V_{bi}}{V_{bi}}} = 0.042 \cdot \sqrt{\frac{4.0 + 0.7}{0.7}} \text{ }\mu\text{m} = 0.042 \cdot 2.6 \text{ }\mu\text{m} = 0.11 \text{ }\mu\text{m}$$

Ancora, se aumentiamo il potenziale a  $V_R = 8.0$  V:

$$x_p = x_{p,0} \sqrt{\frac{V_R + V_{bi}}{V_{bi}}} = 0.42 \cdot \sqrt{\frac{8.0 + 0.7}{0.7}} \text{ }\mu\text{m} = 0.42 \cdot 3.5 \text{ }\mu\text{m} = 1.5 \text{ }\mu\text{m}$$

$$x_n = x_{n,0} \sqrt{\frac{V_R + V_{bi}}{V_{bi}}} = 0.042 \cdot \sqrt{\frac{8.0 + 0.7}{0.7}} \text{ }\mu\text{m} = 0.042 \cdot 3.5 \text{ }\mu\text{m} = 0.15 \text{ }\mu\text{m}$$

**Esempio.** Voglio calcolare la tensione esterna  $V_R$  che devo applicare ai capi di una giunzione  $pn$  per ottenere un valore di campo massimo pari ad  $E_{MAX} = 7.2 \cdot 10^4$  V/cm. Stiamo operando a temperatura ambiente, con concentrazioni di accettori e donori rispettivamente pari a  $N_A = 3.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  e  $N_D = 5.0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ .

In tal caso basta invertire opportunamente la relazione 69, che, elevata al quadrato, ci da:

$$E_{MAX}^2 = \frac{2q(V_R + V_{bi})}{\varepsilon} \frac{N_A N_D}{(N_A + N_D)} \implies V_R + V_{bi} = \frac{\varepsilon E_{MAX}^2}{2q} \frac{(N_A + N_D)}{N_A N_D}$$

Sapendo inoltre che  $V_{bi} = 0.7$ , abbiamo dunque:

$$\begin{aligned} V_R &= \frac{\varepsilon E_{MAX}^2}{2q} \frac{(N_A + N_D)}{N_A N_D} - V_{bi} = \\ &= \frac{1.054 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ cm}^{-1} \cdot (7.2 \cdot 10^4 \text{ V cm}^{-1})^2}{2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \frac{(3.0 \cdot 10^{16} + 5.0 \cdot 10^{15}) \text{ cm}^{-3}}{(3.0 \cdot 10^{16} \cdot 5.0 \cdot 10^{15}) \text{ cm}^{-6}} - 0.7 \text{ V} = \\ &= \frac{1.054 \cdot 7.2^2 \cdot 3.5}{2 \cdot 1.6 \cdot 3.0 \cdot 5.0} 10^{(-12+8+16+19-31)} \text{ C}^{(+1-1)} \text{ V}^{(-1+2)} \text{ cm}^{(-1-2-3+6)} - 0.7 \text{ V} = \\ &= 4.0 \cdot 10^0 \text{ V} - 0.7 \text{ V} = 3.3 \text{ V} \end{aligned}$$

Vediamo ora come si modifica la **carica** inclusa nella zona svuotata in funzione del potenziale esterno  $V_R$  applicato, in *reverse bias*. Tenendo anche conto della geometria del problema, è utile definire la **carica per unità di superficie** ( $Q'$ ) e la **capacità per unità di superficie** ( $C'$ ), come:

$$Q' = \frac{Q}{A} \quad \text{e} \quad C' = \frac{C}{A} = \frac{dQ'}{dV_R} \quad (70)$$

dove  $A$  rappresenta la sezione trasversale della giunzione, rispetto alla coordinata  $x$ . Dimensionalmente avremo che  $[Q'] = \text{C cm}^{-2}$ , mentre  $[C'] = \text{C V}^{-1} \text{ cm}^{-2} = \text{F cm}^{-2}$ .

La carica presente nel lato  $p$  della zona svuotata è identica, in modulo, a quella presente nel lato  $n$ , ovvero  $Q' = qN_D x_n = qN_A x_p$ . Tenendo in considerazione l'espressione trovata per  $x_n$  (in formula 68), posso calcolare la capacità per unità di superficie come:

$$\begin{aligned} C' &= \frac{dQ'}{dV_R} = \frac{d}{dV_R}(qN_D x_n) = qN_D \frac{dx_n}{dV_R} = \\ &= qN_D \frac{1}{2} \left[ \frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)} \right]^{-1/2} \left[ \frac{2\varepsilon}{q} \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)} \right] = \\ &= \sqrt{q^2 N_D^2 \frac{1}{4} \frac{q}{2\varepsilon(V_R + V_{bi})} \frac{N_D(N_A + N_D)}{N_A} \frac{4\varepsilon^2}{q^2} \frac{N_A^2}{N_D^2(N_A + N_D)^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{q\varepsilon N_A N_D}{2(N_A + N_D)(V_R + V_{bi})}} \end{aligned} \quad (71)$$

Tenendo conto dell'espressione trovata per  $W$  (nella formula 68), posso anche scriverla come:

$$C' = \sqrt{\frac{q\varepsilon N_A N_D}{2(N_A + N_D)(V_R + V_{bi})} \frac{\varepsilon}{\varepsilon}} = \sqrt{\varepsilon^2 \underbrace{\frac{q\varepsilon N_A N_D}{2(N_A + N_D)(V_R + V_{bi})}}_{=W^{-1}}} = \frac{\varepsilon}{W} \quad (72)$$

**Esempio.** Voglio calcolare la capacità per unità di superficie ( $C'$ ) nel caso della giunzione dell'esempio precedente, con l'unica differenza che le concentrazioni di accettori e donori sono invertite, ovvero  $N_A = 5.0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  e  $N_D = 3.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ . Notiamo che la formula 69 non cambia invertendo le due concentrazioni, quindi la tensione di alimentazione in *reverse bias* rimane  $V_R = 3.3 \text{ V}$ , con  $V_{bi} = 0.7 \text{ V}$ .

Utilizzando la formula 71, ricaviamo immediatamente che:

$$\begin{aligned} C' &= \sqrt{\frac{q\varepsilon N_A N_D}{2(N_A + N_D)(V_R + V_{bi})}} = \\ &= \sqrt{\frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1.054 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1} \text{ cm}^{-1} \cdot 5.0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} \cdot 3.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}}{2 \cdot (5.0 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3} + 3.0 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}) \cdot (3.3 \text{ V} + 0.7 \text{ V})}} = \\ &= \sqrt{\frac{1.6 \cdot 1.054 \cdot 5.0 \cdot 3.0}{2 \cdot 3.5 \cdot 4.0} 10^{(-19-12+15+16-16)} \text{ C}^{(1+1)} \text{ V}^{(-1-1)} \text{ cm}^{(-1-3-3+3)}} = \\ &= \sqrt{0.90 \cdot 10^{-16} \text{ C}^2 \text{ V}^{-2} \text{ cm}^{-4}} = 0.95 \cdot 10^{-8} \frac{\text{C}}{\text{V cm}^2} = 9.5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{cm}^2} = 9.5 \frac{\text{nF}}{\text{cm}^2} \end{aligned}$$



Applicando al caso realistico di un sensore avente area:

$$A = 100 \mu\text{m} \cdot 100 \mu\text{m} = (1.00 \cdot 10^{-2} \text{ cm})^2 = 1.00 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2$$

la sua capacità (C) sarà:

$$C = C' A = 9.5 \cdot 10^{-9} \frac{\text{F}}{\text{cm}^2} 1.00 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^2 = 9.5 \cdot 10^{-13} \text{ F} = 0.95 \cdot 10^{-12} \text{ F} = 0.95 \text{ pF}$$

Vediamo ora il caso delle **giunzioni unilaterali**, ovvero nelle quali **una delle due concentrazioni è molto maggiore dell'altra**.

Se considero  $N_A \gg N_D$  ho che:

$$\frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)} \sim 0 \quad , \quad \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)} \sim \frac{1}{N_D} \quad \text{e} \quad \frac{N_A + N_D}{N_A N_D} \sim \frac{1}{N_D} \quad (73)$$

Quindi le relazioni nelle formule 68, 71 e 72 si approssimano come:

$$\begin{aligned} x_p &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)}} \simeq 0 \\ x_n &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)}} \simeq \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q N_D}} \\ W &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_A + N_D}{N_A N_D}} \simeq \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q N_D}} \simeq x_n \\ C' &= \sqrt{\frac{q\varepsilon N_A N_D}{2(N_A + N_D)(V_R + V_{bi})}} = \sqrt{\frac{q\varepsilon N_D}{2(V_R + V_{bi})}} \simeq \frac{\varepsilon}{x_n} \end{aligned} \quad (74)$$

In modo del tutto analogo, se invece considero  $N_D \gg N_A$  ho che:

$$\frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)} \sim \frac{1}{N_A} \quad , \quad \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)} \sim 0 \quad \text{e} \quad \frac{N_A + N_D}{N_A N_D} \sim \frac{1}{N_A} \quad (75)$$

In questo caso, le relazioni nelle formule 68, 71 e 72 si approssimano come:

$$\begin{aligned} x_p &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_D}{N_A(N_A + N_D)}} \simeq \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q N_A}} \\ x_n &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_A}{N_D(N_A + N_D)}} \simeq 0 \\ W &= \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q} \frac{N_A + N_D}{N_A N_D}} \simeq \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{q N_A}} \simeq x_p \\ C' &= \sqrt{\frac{q\varepsilon N_A N_D}{2(N_A + N_D)(V_R + V_{bi})}} = \sqrt{\frac{q\varepsilon N_A}{2(V_R + V_{bi})}} \simeq \frac{\varepsilon}{x_p} \end{aligned} \quad (76)$$

In entrambi i casi, si osserva che:

- $W \propto \sqrt{V_R + V_{bi}}$ , ovvero il volume sensibile cresce con la radice del potenziale complessivo;
- $C' \propto 1/\sqrt{V_R + V_{bi}}$ , ovvero la capacità decresce con la radice del potenziale complessivo.

In pratica, possiamo considerare la quantità  $1/C'^2$ , che risulta lineare nella tensione  $V_R$  di *reverse bias*, del tipo  $a + bV_R$ . Usando le relazioni per  $C'$  nelle rispettive formule 74 e 76, otteniamo:

$$\begin{aligned} \frac{1}{C'^2}(V_R) &= \frac{2(V_R + V_{bi})}{q\varepsilon N_D} = \underbrace{\frac{2V_{bi}}{q\varepsilon N_D}}_{=a} + \underbrace{\frac{2}{q\varepsilon N_D}}_{=b} V_R & \text{se } N_A \gg N_D \\ \frac{1}{C'^2}(V_R) &= \frac{2(V_R + V_{bi})}{q\varepsilon N_A} = \underbrace{\frac{2V_{bi}}{q\varepsilon N_A}}_{=a} + \underbrace{\frac{2}{q\varepsilon N_A}}_{=b} V_R & \text{se } N_D \gg N_A \end{aligned} \quad (77)$$

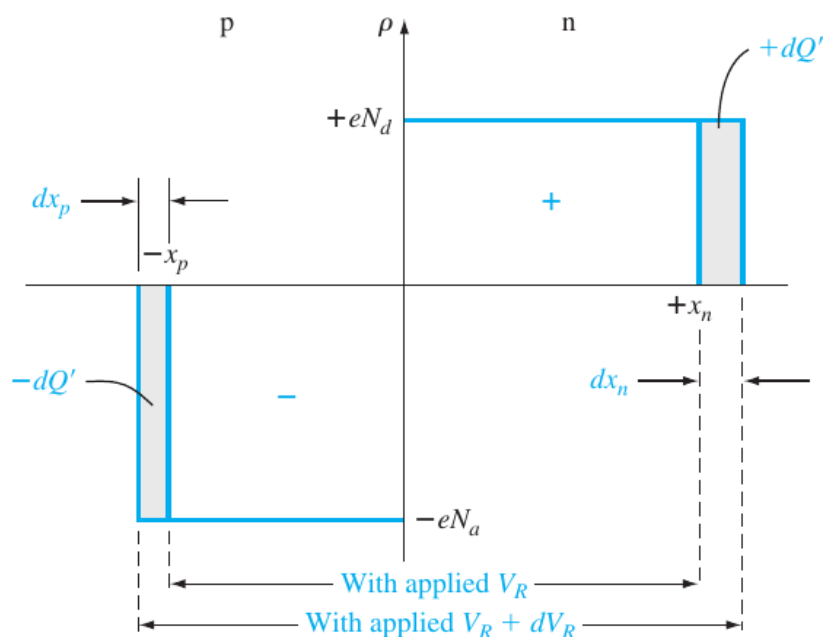


Figura 30: Incrementando il potenziale esterno  $V_R$  in regime di *reverse bias*, la zona di svuotamento si allarga, ed aumenta la carica in essa contenuta.

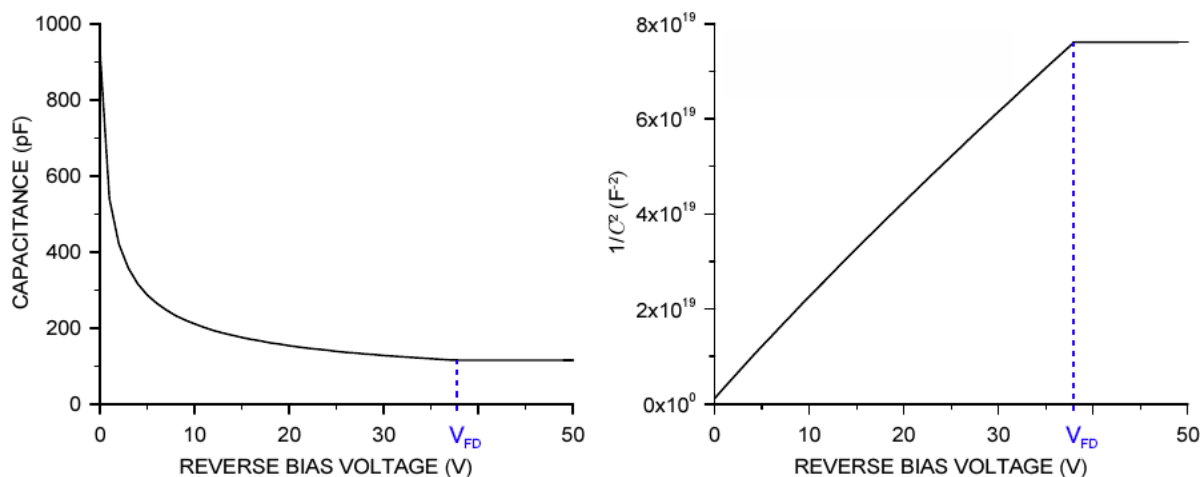


Figura 31: Grafici della capacità  $C$  (a sinistra) e del suo reciproco al quadrato  $1/C^2$  (a destra) in funzione della tensione di *reverse bias*  $V_R$ , per una giunzione *pn* unilaterale, avente concentrazione  $N = 5 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}$  del drogante maggioritario. Aumentando  $V_R$  oltre al valore della tensione di massimo svuotamento  $V_{FD}$ , la capacità raggiunge il suo valore minimo e rimane costante.

## 6 Svuotamento, sovratensione, rottura

D'ora in poi non distingueremo fra la capacità  $C$  e la capacità per unità di sezione  $C' = C/A$ , visto che esse differiscono solo per un fattore costante (la sezione trasversa  $A$  della giunzione).

Abbiamo già visto (lezione 5) che la **capacità** di una giunzione  $pn$  è proporzionale allo **spessore di svuotamento**, il quale è proporzionale a sua volta dalla **tensione** di alimentazione in regime di *reverse bias*, ossia:  $C \propto (1/W) \propto (1/\sqrt{V_R})$ .

Aumentando la tensione  $V_R$ , la zona di svuotamento cresce, fino ad eguagliare il volume del semiconduttore stesso. Tale condizione viene raggiunta quando  $V_R = V_{FD}$ , che viene definita **tensione svuotamento totale** (*full depletion voltage*).

Aumentando ulteriormente la tensione di alimentazione a valori  $V_R \geq V_{FD}$ , la capacità resta **costante**, come si può osservare nel grafico riportato a sinistra in fig. 31. Tale andamento è ancora più evidente se consideriamo la variabile  $1/C^2$ , il cui grafico in funzione di  $V_R$  è riportato a destra in fig. 31.

Consideriamo il caso di una giunzione unilaterale  $p^+n$ , dove l'**apice**  $+$  davanti al tipo di drogaggio ( $p$ , nel nostro caso) indica che esso è molto maggiore rispetto a quello del tipo opposto ( $n$ , nel nostro caso). Per quanto visto in formula 74,  $W \simeq x_n$ , mentre  $x_p \simeq 0$ . La zona svuotata dunque si estende prettamente nel lato  $n$ , mentre dall'altro lato avremo una piccolissima zona che rimane pesantemente drogata di tipo  $p$ .

Derivando rispetto a  $V_R$  l'espressione 77 ottenuta per  $1/C^2$ , otteniamo:

$$\frac{d}{dV_R} \left( \frac{1}{C^2} \right) = \frac{2}{q\varepsilon N_D} \quad (78)$$

Tale derivata corrisponde alla pendenza della retta nel grafico a destra in fig. 31. Possiamo ricavare il suo valore mediante un *fit* a retta su delle misure di capacità in funzione della tensione applicata. Ciò permette di ottenere la **concentrazione dei portatori minoritari**  $N_D$  in funzione di quantità note, o comunque misurabili:

$$N_D = \frac{2}{q\varepsilon} \left[ \frac{d}{dV_R} \left( \frac{1}{C^2} \right) \right]^{-1} \quad (79)$$

Di solito, tale concentrazione viene espressa in termini della **resistività**  $\rho$ . Invertendo la formula 64, abbiamo che  $N_D = (\rho q \mu_e)^{-1}$ , quindi:

$$\rho = \frac{\varepsilon}{2\mu_e} \frac{d}{dV_R} \left( \frac{1}{C^2} \right) \quad (80)$$

Volendo misurare lo spessore di svuotamento, possiamo usare la relazione 72, da cui:

$$C = \frac{\varepsilon}{W} \quad \text{e} \quad \frac{1}{C} = \frac{W}{\varepsilon} \quad (81)$$

Effettuandone le misure, si ottengono due grafici simili a quelli visti in fig. 31. Ragionando in modo analogo a quanto fatto prima, possiamo ricavare lo **spessore di svuotamento massimo**, che chiameremo  $W_{FD}$ .

Abbiamo quindi dei metodi per **misurare indirettamente** le tre grandezze viste. Ciò è utile a **fini pratici** poiché il produttore della giunzione spesso non è in grado di fornire

misure dirette di tali grandezze: in tal modo esse possono comunque essere **misurate a posteriori**.

Notiamo che gli andamenti visti nei grafici in fig. 31 presentano solo idealmente un punto angoloso per  $V_R = V_{FD}$ . Nella realtà si osserva che essi sono raccordati in modo **continuo**: ciò è dovuto al fatto che anche il profilo di drogaggio varia in modo continuo fra i due lati della giunzione. Ad ogni modo, dal secondo grafico è comunque possibile ricavare la tensione di svuotamento massimo  $V_{FD}$ , come l'intersezione tra i due *fit* a retta, fatti sui rispettivi andamenti.

Nel caso in cui la giunzione venga utilizzata come rivelatore, il **rilascio di carica** che avviene entro il volume svuotato (sensibile) dipende dalla sua **capacità**. Come visibile nei grafici in fig. 32, aumentando la tensione  $V_R$  di alimentazione in *reverse bias*, aumenta anche la capacità, e quindi la carica raccolta, sino al raggiungimento della tensione di massimo svuotamento, oltre la quale rimane invece costante.

Vediamo ora come cambia il **campo elettrico** entro la zona svuotata di una giunzione  $p^+n$ . Innanzitutto, abbiamo già visto (formula 74) che  $x_p \simeq 0$ , mentre:

$$x_n \simeq W \simeq \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{qN_D}} \Rightarrow W^2 \simeq \frac{2\varepsilon(V_R + V_{bi})}{qN_D} \Rightarrow \frac{qN_D}{\varepsilon} \simeq \frac{2(V_R + V_{bi})}{W^2} \quad (82)$$

La relazione 20, vista nel caso di una giunzione all'equilibrio termico, può dunque essere riadattata per ricavare il **modulo del campo elettrico** in funzione della tensione e dello spessore di svuotamento, come:

$$E(x) = \frac{qN_D}{\varepsilon}(x - x_n) \simeq \frac{2(V_R + V_{bi})}{W^2}(W - x) = \frac{2(V_R + V_{bi})}{W} \left(1 - \frac{x}{W}\right) \quad (83)$$

Se la giunzione ha spessore  $d$ , lo svuotamento totale si verifica per  $W = W_{FD} = d$ , quasi interamente dal lato  $n$ . Ad esempio, nel caso dei tracciatori di nostro interesse, aventi spessore  $d \sim 10^2 \mu\text{m}$ , avremo che  $x_p \sim 10^{-1} \mu\text{m}$ , trascurabile dunque rispetto ad  $x_n$ .

Sapendo che lo svuotamento totale si ottiene applicando una tensione  $V_R = V_{FD}$ , l'espressione per  $W$ , ricavata in formula 74, possiamo scrivere:

$$d = \sqrt{\frac{2\varepsilon(V_{FD} + V_{bi})}{qN_D}} \Rightarrow d^2 = \frac{2\varepsilon(V_{FD} + V_{bi})}{qN_D} \Rightarrow d^2 = \frac{2\varepsilon}{qN_D} V_{FD} + \frac{2\varepsilon}{qN_D} V_{bi} \quad (84)$$

In tal modo otteniamo un'espressione per la tensione  $V_{FD}$  di svuotamento totale in funzione di grandezze note, o comunque misurabili:

$$V_{FD} = \frac{qN_D}{2\varepsilon} d^2 - V_{bi} \quad (85)$$

Viene anche definita la **tensione di svuotamento interno** (*internal depletion voltage*), come:

$$V_{di} = V_{FD} + V_{bi} \quad (86)$$

Negli scopi pratici, la tensione *built-in* risulta essere **trascurabile** rispetto a quella fornita dall'esterno, ossia  $V_{FD} \gg V_{bi}$ , per cui potremo approssimare  $V_{di} \simeq V_{FD}$ . Ad esempio, i tracciatori al silicio di nostro interesse sono alimentati con tensioni di svuotamento completo  $V_{FD} = (60 \div 100)$  V, quindi  $V_{bi} \simeq 0.7$  V risulta almeno due ordini di grandezza più piccola, dunque trascurabile in somma.

Quando la tensione di alimentazione supera quella di svuotamento completo, ovvero  $V_R > V_{FD}$ , si parla di **sovrassvuotamento** (o *overbias*). In tale condizione lo spessore  $W$  della zona svuotata **non può aumentare ulteriormente**, siccome esso ha già raggiunto il suo valore massimo, pari allo spessore  $d$  della giunzione stessa.

Come visibile nei grafici di fig. 33, il modulo del campo elettrico  $E$  è massimo all'interfaccia ( $x = 0$ ) e **decresce linearmente** con  $x$ . La **quota** della retta varia con la radice della tensione applicata ( $E \propto \sqrt{V_R + V_{bi}}$ , come in formula 69). Essendo  $x_p \simeq 0$ , l'iniziale fase di crescita lineare per  $-x_p \leq x \leq 0$  viene trascurata.

Nel grafico a sinistra in fig. 33 vediamo che, per tensioni applicate  $V_R < V_{FD}$ , il campo elettrico si annulla in  $x = W < d$ . In quello di destra vediamo invece il caso per  $V_R > V_{FD}$ . Qui il campo elettrico **non si annulla** mai, ma raggiunge un **valore minimo** sull'elettrodo  $n$ , ovvero  $E(x = d) = E_{min} > 0$ , dovuto al contributo della sovratensione, che possiamo scrivere come  $V_R - (V_{FD} + V_{bi})$ . In questo caso, il modulo del campo elettrico sarà quindi:

$$E(x) = \frac{2(V_{FD} + V_{bi})}{d} \left(1 - \frac{x}{d}\right) + \frac{V_R - (V_{FD} + V_{bi})}{d} \quad (87)$$

dove il primo termine discende dalla formula 83, e descrive la decrescita lineare fra  $x = 0$  ed  $x = d$ , mentre il secondo termine è l'*offset* costante dovuto al contributo della sovratensione.

Ci preoccupiamo adesso di ricavare il **tempo di raccolta** delle cariche liberate all'interno della zona svuotata di una giunzione  $p^+n$ . Nel caso di **svuotamento parziale**, per  $V_R < V_{FD}$ , possiamo scrivere il campo elettrico (sempre riadattando la relazione 20, vista nel caso di una giunzione all'equilibrio termico) come:

$$E(x) = E_0 \cdot (W - x) \quad \text{con} \quad E_0 \equiv -\frac{qN_D}{\varepsilon} \quad (88)$$

Usando la definizione di **mobilità** (formula ??), possiamo scrivere la **velocità di deriva** delle cariche come:

$$v(x) = \mu E(x) = \mu E_0 \cdot (W - x) \quad (89)$$

Come si vede nel grafico di fig. 34, la mobilità dei portatori di carica dipende dal campo elettrico che si crea nel materiale. Nel caso del silicio a temperatura ambiente, osserviamo che:

- per  $E \lesssim 10^3$  V/cm, la mobilità è circa **costante**;
- per  $E \gtrsim 10^4$  V/cm, essa **decresce**. Gli elettroni a questi regimi infatti gli sentono l'**interazione con il reticolo** cristallino del materiale in cui si muovono, e ivi perdono energia con emissione di **fononi**;

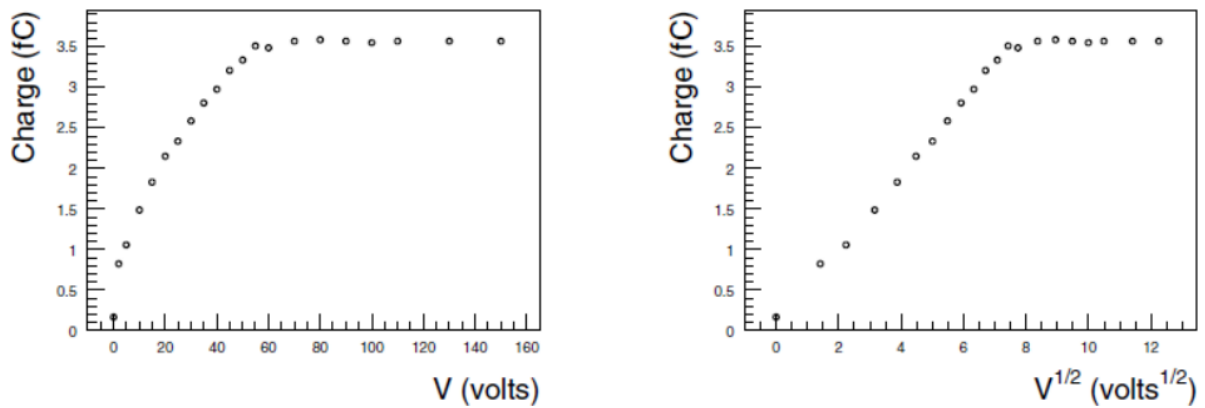


Figura 32: Grafici della carica raccolta in un rivelatore al silicio (dello spessore di 300  $\mu\text{m}$  ed area di 1  $\text{cm}^2$ ) esposto ad un fascio di elettroni (ad energia  $\geq 2$  MeV), in funzione della tensione di alimentazione in *reverse bias*, a sinistra, e della sua radice, a destra.

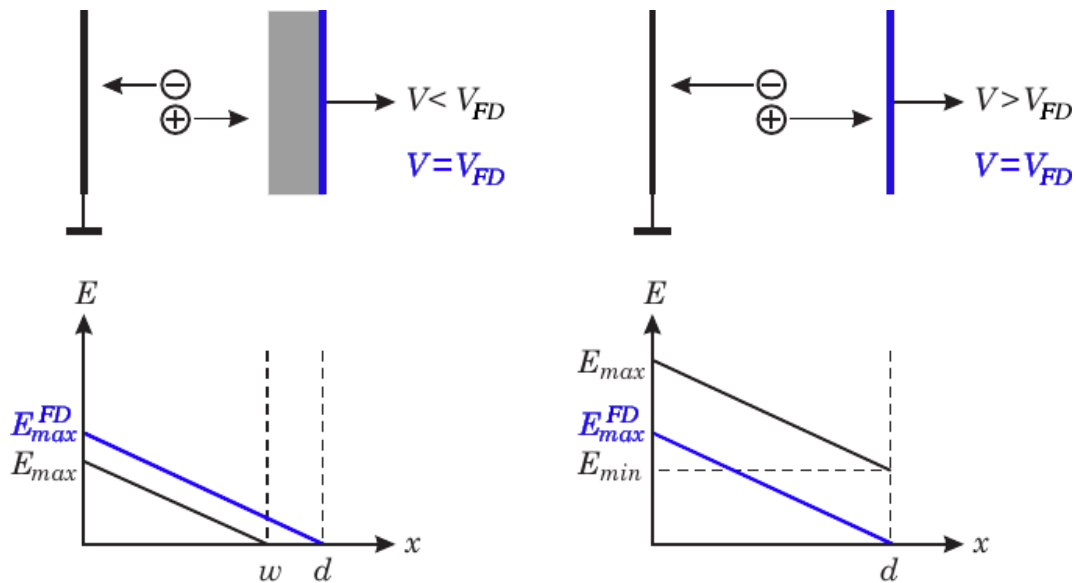


Figura 33: Campo elettrico nella zona svuotata di una giunzione  $p^+n$  di spessore  $d$ . A sinistra nel caso di svuotamento parziale (ad una tensione applicata  $V < V_{FD}$ ), a destra nel caso di *overbias* (ad una tensione applicata  $V > V_{FD}$ ). Per confronto, viene riportato anche il caso di svuotamento completo (ad una tensione applicata  $V = V_{FD}$ ).

- per  $E \gtrsim 10^5$  V/cm, persiste l'andamento decrescente, con  $\mu \propto 1/E$ . A questo regime la **velocità** dei portatori diventa **costante**, con  $v \simeq 10^7$  cm/s.

Per ricavare il tempo di deriva, sarà sufficiente integrare il reciproco della velocità (formula 89) nella coordinata spaziale  $x$ . Per i nostri scopi possiamo trascurare la dipendenza della mobilità dal campo elettrico, e dunque dalla posizione  $x$ . Come riferimenti posizionali, avremo:

- in  $x = 0$  l'elettrodo  $p$ , verso il quale migrano le buche;
- in  $x = W$  l'elettrodo  $n$ , verso il quale migrano gli elettroni;
- in  $x = x_0$ , con  $0 \leq x_0 \leq W$ , il punto di origine del rilascio di carica.

Il tempo impiegato dal portatore di carica per portarsi dalla posizione di origine  $x_0$  alla generica posizione  $x$  (interna alla giunzione) è calcolabile come:

$$t(x) = \int_{x_0}^x \frac{dx'}{v(x')} = \frac{1}{\mu E_0} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{W - x'} = -\frac{1}{\mu E_0} \ln(w - x)|_{x_0}^x = \frac{\varepsilon}{\mu q N_D} \ln \left( \frac{W - x}{W - x_0} \right) \quad (90)$$

Nel caso di una **lacuna** ( $h$ ) che migra dal punto di origine (in  $x = x_0$ ) all'elettrodo  $p$  (in  $x = 0$ ), il tempo di deriva si ottiene applicando la formula 90 appena vista:

$$t_h(0) = \frac{\varepsilon}{\mu_h q N_D} \ln \left( \frac{W}{W - x_0} \right) = \tau_h \ln \left( \frac{W}{W - x_0} \right) \quad \text{con} \quad \tau_h \equiv \frac{\varepsilon}{\mu_h q N_D} \quad (91)$$

dove  $\tau_h$  viene definito **tempo caratteristico delle lacune**. Confrontando alcuni valori numerici, si osserva come variano i tempi di deriva, ad esempio:

- se il rilascio di carica avviene **al centro** dello spessore svuotato, ovvero  $x_0 = 50\%W$ , allora  $t_h(0) = 0.7\tau_h$ ;
- se invece avviene nei pressi dell'**elettrodo opposto**, come potrebbe essere  $x_0 = 95\%W$ , allora  $t_h(0) = 3.0\tau_h$ .

Nel caso di un **eletttrone** ( $e$ ) che si muove dal punto di origine (in  $x = x_0$ ) all'elettrodo  $n$  (in  $x = W$ ), la formula 90 **non si può applicare** direttamente, poiché porterebbe a tempi divergenti:  $t_e(W) \propto \ln(W - W) = \ln(0) = -\infty$ . Il problema può essere comunque trattato, invertendo la formula stessa, come:

$$\ln \left( \frac{W - x(t)}{W - x_0} \right) = -\frac{t}{\tau_e} \Rightarrow \exp \left( -\frac{t}{\tau_e} \right) = \frac{W - x(t)}{W - x_0} \Rightarrow W - x(t) = (W - x_0) e^{-t/\tau_e}$$

$$x(t) = W - (W - x_0) e^{-t/\tau_e} \quad \text{con} \quad \tau_e \equiv \frac{\varepsilon}{\mu |q| N_D} \quad (92)$$

Notare che il **tempo caratteristico degli elettroni** ( $\tau_e$ ) viene **definito positivo**, per cui il **segno negativo** dovuto alla carica elementare è riportato in modo **esplicito**. Qualora l'eletttrone venga generato sull'elettrodo  $p$ , ovvero  $x_0 = 0$ , avremo:



$$x(t) = W(1 - e^{-t/\tau_e}) \quad (93)$$

Osserviamo che, secondo questa descrizione, un elettrone che viene rilasciato in  $0 \leq x_0 < W$ , dovrebbe raggiungere l'elettrodo  $n$  in un **tempo infinito**. Se  $t_e$  è il tempo di deriva impiegato dall'elettrone per giungere all'elettrodo  $n$ , sarà  $x(t_e) = W$ , che sostituito nella formula 92, da:

$$W = W - (W - x_0) e^{-t_e/\tau_e} \Leftrightarrow 0 = \underbrace{(W - x_0)}_{>0} e^{-t_e/\tau_e} \Leftrightarrow t_e \rightarrow +\infty \quad (94)$$

Un elettrone però, con il solo moto di deriva, può comunque arrivare in prossimità dell'elettrodo  $n$  in tempi relativamente brevi. Usando la relazione 93, possiamo stimare il tempo  $t'$  necessario a percorrere il 95% dello spessore svuotato:

$$1 - e^{-t'/\tau_e} = \frac{95}{100} \Rightarrow e^{-t'/\tau_e} = \frac{5}{100} \Rightarrow -\frac{t'}{\tau_e} = \ln\left(\frac{5}{100}\right) = \ln\left(\frac{1}{20}\right) = -\ln(20)$$

$$t' = \tau_e \ln(20) \simeq 3.0\tau_e \quad (95)$$

A questo punto diventano rilevanti altri meccanismi, come la **diffusione**, che permetteranno all'elettrone di giungere comunque all'elettrodo  $n$ .

Osserviamo che il **tempo caratteristico** dipende sia dalla **mobilità**  $\mu$  del portatore considerato, che dalla **concentrazione**  $N_D$  dei portatori minoritari. Mentre **non** dipende né dalla **tensione** di alimentazione  $V_R$ , né dallo **spessore svuotato**  $W$ .

Esprimiamo ora il tempo caratteristico in funzione della **resistività** del materiale. Secondo la formula 64, essa è definita come  $\rho = (\mu q N_D)^{-1}$ , quindi abbiamo che:

$$\tau = \varepsilon \rho \quad (96)$$

Per il silicio abbiamo  $\varepsilon = 1.054 \cdot 10^{-12} \text{ C V}^{-1}\text{cm}^{-1}$ . Nella pratica, la resistività  $\rho$  si trova spesso espressa in  $\text{k}\Omega \cdot \text{cm}$ . Riscriviamo dunque  $\varepsilon$  in modo opportuno, utilizzando la legge di Ohm. Dimensionalmente, abbiamo  $[V] = [R] \cdot [I]$ , ossia  $\text{V} = \Omega \cdot \text{A} = \Omega \cdot \text{C} \cdot \text{s}^{-1}$ , da cui:

$$\varepsilon = 1.054 \cdot 10^{-12} \frac{\text{C}}{\text{V} \cdot \text{cm}} = 1.054 \frac{10^{-9}}{10^3} \frac{\text{C} \cdot \text{s}}{\Omega \cdot \text{C} \cdot \text{cm}} = 1.054 \frac{(10^{-9} \text{ s})}{(10^3 \Omega) \cdot \text{cm}} = 1.054 \frac{\text{ns}}{\text{k}\Omega \cdot \text{cm}} \quad (97)$$

Abbiamo già visto che  $\mu_h \simeq \mu_e/3$ , dunque essendo  $\rho \propto (1/\mu)$ , la resistività per le **buche** sarà  $\rho_h \simeq 3\rho_e$ . Ed anche il suo tempo caratteristico sarà  $\tau_h = \varepsilon\rho_h \simeq 3\varepsilon\rho_e = 3\tau_e$ .

**Esempio.** Consideriamo una giunzione  $p^+n$  con resistività  $\rho_e = 10.0 \text{ k}\Omega \text{ cm}$ . Possiamo calcolare i tempi caratteristici per elettroni e buche, come:

$$\tau_e = \varepsilon\rho_e = 1.054 \frac{\text{ns}}{\text{k}\Omega \text{ cm}} 10.0 \text{ k}\Omega \text{ cm} = 10.5 \text{ ns} \quad \text{e} \quad \tau_h = 3\tau_e = 3 \cdot 10.5 \text{ ns} = 31.5 \text{ ns}$$

Per le considerazioni fatte in precedenza, abbiamo che entrambi i tipi di portatori di carica percorrono il 95% dello spessore svuotato in un tempo  $t \simeq 3\tau$ , che approssimiamo al tempo necessario a percorrerlo per intero. Per cui avremo:

$$t_e = 3\tau_e = 31.5 \text{ ns} \quad \text{e} \quad t_h = 3\tau_h = 94.5 \text{ ns}$$

Ci preoccupiamo ora di calcolare i **tempi di raccolta** delle cariche nel caso in cui la giunzione  $p^+n$  sia **sovrasvuotata**. Vedremo che saranno **più bassi** rispetto a quelli che si hanno nel caso di svuotamento parziale. Per prima cosa, scriviamo il campo elettrico in forma analoga a quella vista per il suo modulo (formula 87):

$$E(x) = - \left[ E_0 \cdot \left( 1 - \frac{x}{d} \right) + E_1 \right] \quad (98)$$

In riferimento al grafico a destra in fig. 33, qui  $E_0 = E_{max}^{FD} = E_{max} - E_{min}$  rappresenta il valore massimo del campo, che otteniamo in condizione di svuotamento completo, mentre  $E_1 = E_{min}$  è l'*offset* costante, dovuto alla tensione di *overbias*.

Anche in questo caso, usiamo la definizione di **mobilità** (formula ??) per scrivere la **velocità di deriva** delle cariche come:

$$v(x) = \mu E(x) = -\mu \left[ E_0 \cdot \left( 1 - \frac{x}{d} \right) + E_1 \right] \quad (99)$$

Quindi il tempo di deriva dei portatori di carica si può ricavare come:

$$\begin{aligned} t(x) &= \int_{x_0}^x \frac{dx'}{v(x')} = -\frac{1}{\mu} \int_{x_0}^x \left[ E_0 \cdot \left( 1 - \frac{x'}{d} \right) + E_1 \right]^{-1} dx' = \\ &= -\frac{1}{\mu} \left( -\frac{d}{E_0} \right) \ln \left( E_0 + E_1 - E_0 \frac{x'}{d} \right) \Big|_{x_0}^x = \\ &= \frac{d}{\mu E_0} \ln \left( \frac{E_0 + E_1 - E_0 \frac{x}{d}}{E_0 + E_1 - E_0 \frac{x_0}{d}} \right) \end{aligned} \quad (100)$$

Nel caso di una **buca** che viene generata in  $x_0 = d$  (ovvero al limite della zona svuotata, sull'elettrodo  $n$ ), essa compirà un moto di deriva lungo tutta la giunzione, per venir raccolta in  $x = 0$ , in un tempo:

$$t_h(0) = \frac{d}{\mu_h E_0} \ln \left( \frac{E_0 + E_1 - E_0 \frac{0}{d}}{E_0 + E_1 - E_0 \frac{d}{d}} \right) = \frac{d}{\mu_h E_0} \ln \left( \frac{E_0 + E_1}{E_1} \right) = \frac{d}{\mu_h E_0} \ln \left( 1 + \frac{E_0}{E_1} \right) \quad (101)$$

Si osserva che aumentando la tensione di *overbias*, ovvero il campo  $E_1$ , il termine logaritmico si riduce, assieme al tempo di deriva. Ricordando che  $\ln(1+x) \sim x$  quando  $x$  è piccolo, otteniamo:

$$t_h(0) = \frac{d}{\mu_h E_0} \frac{E_0}{E_1} = \frac{d}{\mu_h E_1} \quad \text{quando} \quad E_1 \gg E_0 \quad (102)$$

La carica si muoverà dunque come fosse sotto l'azione soltanto della componente costante  $E_1$  del campo elettrico.

Consideriamo invece un **elettrone** generato in  $x_0 = 0$ , ossia al limite della giunzione sull'elettrodo  $p$ , che compie un moto di deriva verso l'elettrodo opposto, in  $x = d$ . Osservando che **mobilità** sarà **negativa** a causa del segno della carica elementare, avremo un tempo di deriva pari a:

$$\begin{aligned} t_e(d) &= -\frac{d}{\mu_e E_0} \ln \left( \frac{E_0 + E_1 - E_0 \frac{d}{d}}{E_0 + E_1 - E_0 \frac{0}{d}} \right) = -\frac{d}{\mu_h E_0} \ln \left( \frac{E_1}{E_0 + E_1} \right) = \\ &= -\frac{d}{\mu_e E_0} \left[ -\ln \left( \frac{E_0 + E_1}{E_1} \right) \right] = \frac{d}{\mu_e E_0} \ln \left( 1 + \frac{E_0}{E_1} \right) \end{aligned} \quad (103)$$

Valgono dunque le stesse considerazioni viste per le buche. In particolare, avremo anche qui:

$$t_e(d) = \frac{d}{\mu_e E_0} \frac{E_0}{E_1} = \frac{d}{\mu_e E_1} \quad \text{quando} \quad E_1 \gg E_0 \quad (104)$$

Vogliamo ora calcolare i **tempi caratteristici** di deriva, come fatto nel caso precedente. Ricordiamo innanzitutto che i parametri definiti in formula 87, a partire dalla 98, sono:

$$E_0 = \frac{2(V_{FD} + V_{bi})}{d} \quad \text{ed} \quad E_1 = \frac{V_R - (V_{FD} + V_{bi})}{d} \quad (105)$$

A partire da questi, posso dunque riscrivere il tempo di deriva totale  $t_c$  per buche ed elettroni (formule 101 e 103) in funzione della **tensione**, come:

$$\begin{aligned} t_c &= \frac{d}{\mu E_0} \ln \left( \frac{E_0 + E_1}{E_1} \right) = \\ &= \frac{d^2}{2\mu(V_{FD} + V_{bi})} \ln \left[ \frac{2(V_{FD} + V_{bi}) + V_R - (V_{FD} + V_{bi})}{V_R - (V_{FD} + V_{bi})} \right] = \\ &= \frac{d^2}{2\mu(V_{FD} + V_{bi})} \ln \left[ \frac{V_R + (V_{FD} + V_{bi})}{V_R - (V_{FD} + V_{bi})} \right] \end{aligned} \quad (106)$$

in cui la generica mobilità  $\mu$  dev'essere sostituita con quella degli elettroni o delle buche, a seconda dei casi.

**Esempio.** Consideriamo il caso di un tipico sensore, costituito da una giunzione  $p^+n$  in silicio avente uno spessore  $d = 300 \mu\text{m}$  ed una tensione di svuotamento interno  $V_{di} = 30 \text{ V}$ . Supponiamo di applicare una tensione esterna in *reverse bias*  $V_R = 2V_{di} = 60 \text{ V}$ . Possiamo calcolare il tempo di deriva totale per le buche applicando la formula 106:

$$\begin{aligned} t_{c,h} &= \frac{d^2}{2\mu_h V_{di}} \ln \left[ \frac{V_R + V_{di}}{V_R - V_{di}} \right] = \frac{(3.00 \cdot 10^{-2} \text{ cm})^2}{2 \cdot 450 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \cdot 30 \text{ V}} \ln \left[ \frac{60 \text{ V} + 30 \text{ V}}{60 \text{ V} - 30 \text{ V}} \right] = \\ &= \frac{(3.00)^2}{2 \cdot 4.50 \cdot 3.0} \ln \left( \frac{90}{30} \right) 10^{(-4-2-1)} \text{ cm}^{(2-2)} \text{ V}^{(+1-1)} \text{ s} = 0.33 \ln(3) 10^{-7} \text{ s} = \\ &= 0.36 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 36 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 36 \text{ ns} \end{aligned}$$

Per gli elettroni inoltre, ricaviamo immediatamente che:

$$t_{c,e} = \frac{\mu_h}{\mu_e} t_{c,h} = \frac{t_{c,h}}{3} = 12 \text{ ns}$$

Osserviamo che si tratta di tempi decisamente più bassi rispetto a quelli calcolati, nell'esempio precedente, nel caso di svuotamento parziale, dove avevamo  $t_e = 31.5 \text{ ns}$  e  $t_h = 94.5 \text{ ns}$ .

Nel caso dei rivelatori, si vuole **minimizzare** il tempo di raccolta del segnale, e quindi si opera in regime di **sovrasvuotamento**, aumentando la tensione a valori  $V_R > V_{FD}$ . Come rappresentato nel grafico in fig. 29, esiste un limite superiore, rappresentato dalla **tensione di rottura**, o di *breakdown*,  $V_{BD}$ , oltre il quale la corrente cresce esponenzialmente. Dunque la regione operativa del sensore è limitata all'intervallo di tensioni  $V_{FD} < V_R < V_{BD}$ .

Il *breakdown* può avvenire secondo due modalità:

- per **effetto Zener**, rappresentato nel grafico a sinistra di fig. 35. Esso avviene poiché l'eccessiva tensione di sovrasvuotamento porta la BV del lato  $p$  molto vicina alla BC del lato  $n$ : la natura quantistica dell'elettrone prevede che esso possa passare, con una certa probabilità, dalla prima alla seconda per **effetto tunnel**. Tale meccanismo non è controllabile, e si crea dunque un passaggio di corrente attraverso la giunzione;
- per **effetto valanga**, rappresentato nel grafico a destra di fig. 35. In questo caso, l'intensità del campo elettrico entro la zona svuotata è molto alta. Può capitare che un elettrone di valenza nel lato  $p$  entri, per diffusione, nella zona svuotata, oppure che in essa si generi una coppia elettrone-buca per effetto termico. Quando ciò accade, queste cariche subiscono una forte accelerazione a causa del campo molto elevato. L'elettrone, migrando verso il lato  $n$ , acquisisce tanta energia da poter ionizzare gli atomi del materiale che incontra sulla sua traiettoria, creando così altre coppie elettrone-buca. Queste cariche subiscono lo stesso processo, instaurando un meccanismo "a valanga" non controllabile, con conseguente passaggio di corrente lungo la giunzione.

Il *breakdown* è un fenomeno a soglia che si verifica per campi elettrici di intensità  $E \geq E_C$ , dove  $E_C$  viene definito **campo critico**. Possiamo calcolare la tensione di rottura  $V_{BD}$  in funzione di  $E_C$  attraverso la relazione 83 (al quadrato), nella quale approssimiamo lo spessore  $x_n$  come in formula 74, considerando  $V_R + V_{bi} \simeq V_{BD}$  come tensione totale. Otteniamo:

$$E_C^2 = \frac{q^2 N_D^2}{\varepsilon^2} x_n^2 = \frac{q^2 N_D^2}{\varepsilon^2} \frac{2\varepsilon V_{BD}}{q N_D} = \frac{2q N_D}{\varepsilon} V_{BD} \quad \Rightarrow \quad V_{BD} = \frac{\varepsilon E_C^2}{2q N_D} \quad (107)$$

Come visibile nel grafico a sinistra in fig. 36, il campo critico cresce all'aumentare della concentrazione dei portatori minoritari  $N_D$ . La rottura avviene per effetto valanga fino a concentrazioni di drogaggio  $N_D \lesssim 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . L'effetto Zener (*tunneling* quantistico) prevale invece quando esse raggiungono valori più elevati, ovvero per  $N_D \gtrsim 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

Descriviamo meglio l'**effetto valanga**. Consideriamo una corrente iniziale  $I_{n0}$  causata dagli elettroni che riescono ad entrare nella zona svuotata dal lato  $p$  per moto di diffusione. A causa delle ionizzazioni a valanga, questa corrente  $I_n(x)$  aumenta lungo la coordinata  $x$  della giunzione, raggiungendo un massimo in  $x = W$ , come visibile nel grafico a destra

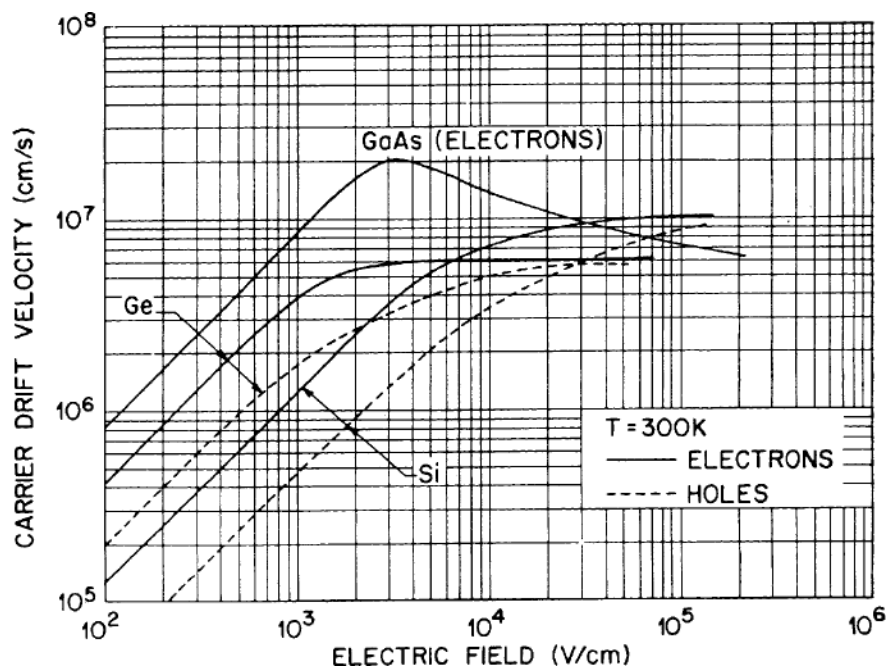


Figura 34: Velocità dei portatori di carica (elettroni e buche) per diversi semiconduttori, a temperatura ambiente ( $T_0 = 300$  K), in funzione del campo elettrico.

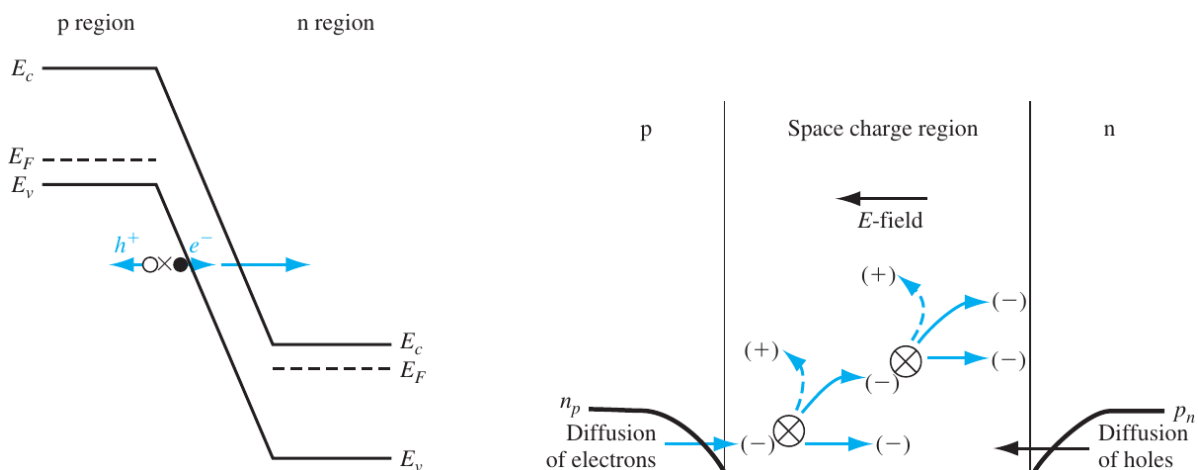


Figura 35: Grafici delle bande per l'effetto Zener (a sinistra) e rappresentazione schematica dell'effetto valanga (a destra).

in fig. 36. Parallelamente, si generano altrettante buche che migrano verso il lato  $p$  della giunzione, dando origine ad una corrente  $I_p(x)$ , speculare rispetto alla precedente. Avremo una corrente totale  $I = I_n(x) + I_p(x)$  che fluisce lungo la giunzione, **costante** in ogni punto  $x$ . Definiamo quindi il **fattore di moltiplicazione**  $M$  tale che:

$$I_n(W) = MI_{n0} \quad (108)$$

Si tratta di una relazione particolarmente utile quando siamo in grado di operare separatamente con le correnti delle due specie. In tal caso, ad esempio, l'ultima relazione può essere utilizzata nel caso si voglia **amplificare** la corrente degli elettroni che migrano dal lato  $p$  verso  $n$ .

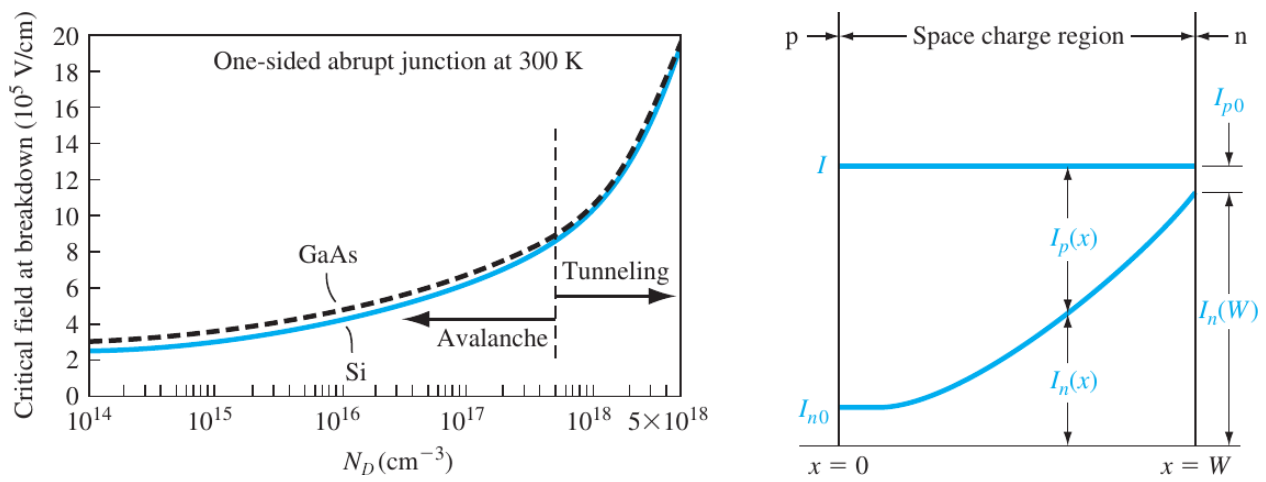


Figura 36: A sinistra: campo critico in funzione della concentrazione dei portatori minoritari, per una giunzione  $p^+n$  a temperatura ambiente. A destra: profilo della corrente per effetto valanga nella regione di svuotamento.

## 7 Segnale indotto e teorema di Ramo

I rivelatori di nostro interesse vengono operati in regime di **sovrasvuotamento**. Di solito, la tensione di alimentazione  $V_R$  in tale regime viene chiamata  $V_b$ , detta tensione di *bias*. Ricordiamo inoltre che la tensione di svuotamento interno è  $V_{di} = V_{FD} + V_{bi}$  (formula 86). Il **tempo di raccolta** delle cariche, ricavato in formula 106, può dunque essere riscritto, separatamente per elettroni e buche, come:

$$t_{c,e} = \frac{d^2}{2\mu_e V_{di}} \ln \left( \frac{V_b + V_{di}}{V_R - V_{di}} \right) \quad \text{e} \quad t_{c,h} = \frac{d^2}{2\mu_h V_{di}} \ln \left( \frac{V_b + V_{di}}{V_R - V_{di}} \right) \quad (109)$$

Ci chiediamo ora quale sia l'**istante iniziale** in cui si osserva la corrente di segnale in uscita dal rivelatore. Si potrebbe ingenuamente pensare che essa inizi nel momento in cui le cariche vengono raccolte all'elettrodo, ma in realtà non è così. Vedremo infatti che si osserva una corrente di segnale già nell'istante in cui le cariche iniziano a muoversi nella giunzione.

Per analizzare il problema, consideriamo il circuito schematizzato in fig. 37. Nella giunzione si originano le cariche che vanno a costituire la **corrente di segnale**  $i_s(t)$ , la quale poi arriva all'**amplificatore**. Entrano anche in gioco la **capacità di carico**  $C_l$ , ovvero la capacità equivalente introdotta dalla giunzione stessa, e la **resistenza interna**  $R_i$  dell'amplificatore.

Consideriamo una carica puntiforme  $q$  che compie uno spostamento  $\Delta x$  lungo la coordinata  $x$  della giunzione, il cui spessore di svuotamento è  $W$ . Viene allora **indotta istantaneamente** una carica  $\Delta Q$  sull'elettrodo, tale che:

$$\Delta Q : q = \Delta x : W \quad \implies \quad \Delta Q = q \frac{\Delta x}{W} \quad (110)$$

Diamone una motivazione. Considero inizialmente una carica puntiforme  $q$  nelle vicinanze di un **elettrodo planare infinitamente esteso**. Le linee di campo che escono dalla carica puntiforme, entrano tutte nell'elettrodo. Il **teorema di Gauss** ci dice che, se integriamo il campo elettrico  $\vec{E}$  su una superficie chiusa  $S$  che include unicamente la carica puntiforme  $q$ , otteniamo:

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{q}{\varepsilon} \quad (111)$$

Se invece integriamo su una superficie chiusa che contiene solo l'elettrodo, il flusso del campo è lo stesso del caso precedente, ma il verso è entrante, per cui otteniamo  $-q$ , ovvero la carica indotta sull'elettrodo.

Consideriamo invece il caso in cui gli elettrodi siano due. Se la carica puntiforme  $q$  è posta equidistante dai due elettrodi (come a sinistra in fig. 38), il flusso del campo attraverso le superfici  $S_1$  ed  $S_2$  è uguale (i.e. lo stesso numero di linee di campo terminano su ciascuno dei due elettrodi), e la carica indotta su ciascuno di essi è  $-q/2$ . Se invece la carica puntiforme  $q$  è posta più vicina all'elettrodo inferiore (come a destra in fig. 38), un maggior numero di linee di campo termina su quest'ultimo, dunque il flusso del campo attraverso la superficie gaussiana  $S_2$  è più grande di quello attraverso  $S_1$ , ed anche la carica indotta su questo elettrodo è maggiore di quella indotta sull'elettrodo superiore.



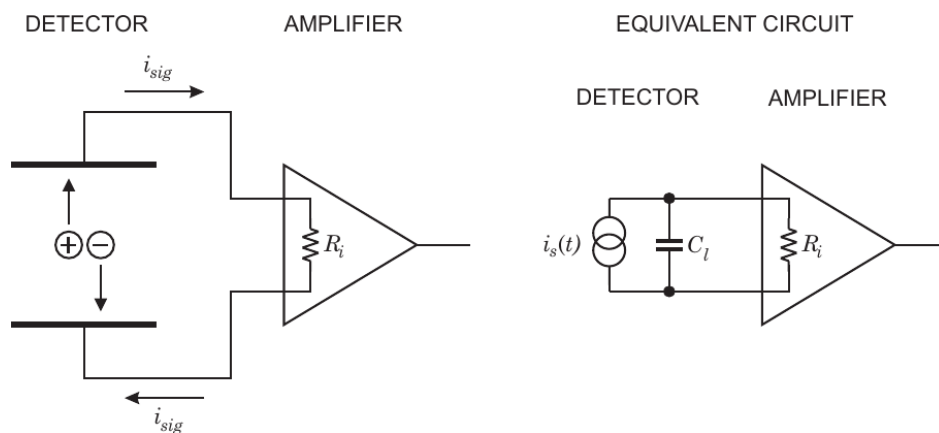


Figura 37: Il movimento delle cariche nel rivelatore induce una corrente di segnale nel circuito di acquisizione (a sinistra). Viene riportato, a destra, anche il circuito equivalente.

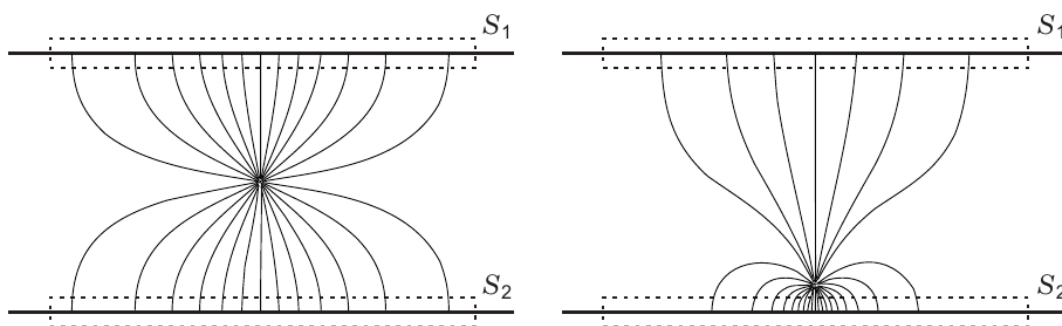


Figura 38: Flusso del campo elettrico generato da una carica puntiforme  $q$  posta fra due elettrodi piani paralleli ed infinitamente estesi. Vediamo che esso varia in funzione della posizione di  $q$ .

Quindi non possiamo stabilire come si muove la carica puntiforme  $q$  tra gli elettrodi, e non conosciamo nemmeno la carica indotta su questi ultimi. Siamo però in grado di osservare che un movimento di  $q$ , produce una variazione di carica indotta  $\Delta q$  sugli elettrodi, e dunque il passaggio di una **corrente elettrica** nel circuito esterno che li unisce.

Quanto visto è formalizzato nel **teorema di Ramo**. Consideriamo la situazione descritta nello schema a sinistra in fig. 39: una carica puntiforme  $q$  si muove in una regione in cui sono presenti  $n$  elettrodi messi a terra. Se  $V$  è il potenziale elettrostatico, in tutto lo spazio che esclude i conduttori e la carica, avremo che il Laplaciano di  $V$ , ovvero la divergenza del gradiente di  $V$ , è nullo:

$$\nabla^2 V = 0 \quad (112)$$

Consideriamo una superficie sferica  $S_q$  che racchiude unicamente la carica puntiforme  $q$ . Ricordando che il campo elettrico da essa generato può essere espresso come  $-\vec{\nabla}V$ , applichiamo il teorema di Gauss per ottenere:

$$\oint_{S_q} \vec{\nabla}V \cdot d\vec{s} = -\frac{q}{\varepsilon} \quad (113)$$

Ora, come descritto nello schema a destra in fig. 39, rimuoviamo la carica  $q$  ed inseriamo un generatore di tensione che elevi il potenziale di uno degli elettrodi al valore  $V' = 1$ . Definiamo un nuovo potenziale elettrostatico  $V_1$ , e chiamiamo  $V_{q1}$  il valore che esso assume nella posizione precedentemente occupata dalla carica  $q$ . Anche in questo caso, in tutta la regione al di fuori degli elettrodi, includendo stavolta però anche il punto precedentemente occupato dalla carica  $q$ , avremo che:

$$\nabla^2 V_1 = 0 \quad (114)$$

Per il teorema di reciprocità di Green, presi due sistemi di cariche e potenziali A e B, l'energia potenziale totale delle cariche A a riposo nel potenziale B è la stessa delle cariche B nel potenziale A.

Quindi il prodotto della carica originale moltiplicata per il potenziale preso in quel punto è pari alla carica indotta sugli elettrodi per il potenziale preso sugli elettrodi, di cui solo quello considerato ha potenziale diverso da zero.

Calcoliamo la quantità:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot (V_1 \vec{\nabla}V - V \vec{\nabla}V_1) &= (\vec{\nabla}V_1) \cdot (\vec{\nabla}V) + V_1 \nabla^2 V - [(\vec{\nabla}V) \cdot (\vec{\nabla}V_1) + V \nabla^2 V_1] = \\ &= V_1 \nabla^2 V - V \nabla^2 V_1 \end{aligned} \quad (115)$$

che dobbiamo integrare sul volume  $\mathcal{V}$ , comprendente tutto l'apparato, ad esclusione dei volumi racchiusi dalle superfici  $S_1, S_2, \dots, S_n$  ed  $S_q$ . Indicando con  $\Sigma$  la superficie che delimita  $\mathcal{V}$ , ed usando il teorema della divergenza, abbiamo che:

$$\int_{\mathcal{V}} (V_1 \nabla^2 V - V \nabla^2 V_1) d\tau = \oint_{\Sigma} (V_1 \vec{\nabla}V - V \vec{\nabla}V_1) \cdot d\vec{s} \quad (116)$$

Osserviamo che l'integrale a sinistra è nullo, infatti nel volume  $\mathcal{V}$  valgono le relazioni 112 e 114, ovvero  $\nabla^2 V = \nabla^2 V_1 = 0$ . L'integrale a destra può invece essere suddiviso in tre contributi:

1. quello degli integrali calcolati sulle superfici  $S_2, \dots, S_n$ , che racchiudono gli elettrodi messi a terra. Siccome su di essi  $V = V_1 = 0$ , il loro contributo è nullo;
2. quello dell'integrale calcolato sulla superficie  $S_1$ , che racchiude il primo elettrodo, sul quale  $V = 0$  e  $V_1 = 1$ . Possiamo scriverlo utilizzando il teorema di Gauss, come:

$$\oint_{S_1} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} = -\frac{Q}{\varepsilon} \quad (117)$$

dove  $Q$  è la carica indotta su tale elettrodo;

3. quello dell'integrale fatto sulla superficie sferica  $S_q$ , centrata sulla carica puntiforme  $q$ , sulla quale  $V = V_q$  e  $V_1 = V_{q1}$ . Possiamo dunque scriverlo come:

$$V_{q1} \left( \oint_{S_q} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} \right) - V_q \left( \oint_{S_q} \vec{\nabla} V_1 \cdot d\vec{s} \right) = V_{q1} \left( \oint_{S_q} \vec{\nabla} V \cdot d\vec{s} \right) = -V_{q1} \frac{q}{\varepsilon} \quad (118)$$

Il primo passaggio è giustificato dal fatto che, sulla superficie  $S_q$ , vale la relazione 114, ovvero  $\vec{\nabla} V_1 = 0$ , quindi il secondo termine integrale della somma è nullo. L'ultimo passaggio è dato dall'applicazione del teorema di Gauss, vista in formula 113.

Possiamo quindi riscrivere la relazione 116 più semplicemente come:

$$0 = -\frac{Q}{\varepsilon} - V_{q1} \frac{q}{\varepsilon} \quad \implies \quad Q = -qV_{q1} \quad (119)$$

dove il potenziale  $V_{q1}$  prende il nome di **potenziale peso** (*weighting potential*), e viene solitamente indicato con  $\Phi$ .

Riassumendo, abbiamo calcolato la carica  $Q$  indotta su un elettrodo dalla presenza di una carica puntiforme  $q$  come:

$$Q = -q\Phi \quad (120)$$

con il potenziale peso  $\Phi$  ottenuto fissando ad 1 il potenziale sull'elettrodo considerato, ed a 0 quello sugli elettrodi rimanenti. Definendo inoltre il **campo peso** (*weighting field*)  $\vec{E}_w = -\vec{\nabla}\Phi$ , possiamo calcolare la **corrente**  $i$  che viene indotta sull'elettrodo come:

$$i = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(-q\Phi) = -q \frac{d\Phi}{dt} = -q \frac{d\vec{x}}{dt} \cdot \vec{\nabla}\Phi = q\vec{v} \cdot \vec{E}_w \quad (121)$$

Nel caso in cui la carica  $q$  compia un moto da  $\vec{x}_1$  ad  $\vec{x}_2$ , la carica indotta sull'elettrodo sarà:

$$\Delta Q = -q[\Phi(\vec{x}_2) - \Phi(\vec{x}_1)] \quad (122)$$

Osserviamo complessivamente che:

- il **campo elettrico**  $\vec{E}$  determina la **traiettoria** e la **velocità** del moto di **deriva** della carica;
- il **campo peso**  $\vec{E}_w$  dipende solo dalla **geometria** dell'apparato, e determina come il moto della carica si accoppia ad uno degli elettrodi;
- in generale  $\vec{E}_w \neq \vec{E}$ . Solo nelle configurazioni a due elettrodi essi hanno la stessa forma.

Consideriamo il caso delle giunzioni semplici fin ora viste. Si tratta di una configurazione a due elettrodi, schematizzata a sinistra in fig. 40. Vediamo che il campo elettrico è uniforme, ed il campo peso ha la stessa direzione, con rispettivi moduli:

$$E = \frac{V_b}{d} \quad \text{ed} \quad E_w = \frac{1}{d} \quad (123)$$

Una carica puntiforme  $q$  compie fra gli elettrodi un moto di deriva lungo la direzione del campo elettrico, con velocità calcolabile mediante la formula ??:

$$v = \mu E = \mu \frac{V_b}{d} \quad (124)$$

Attraverso la formula 121 ricaviamo la corrente circolante fra gli elettrodi:

$$i = qvE_w = q\mu \frac{V_b}{d} \frac{1}{d} = \frac{q\mu V_b}{d^2} \quad (125)$$

Osserviamo che si tratta di una corrente costante, che circola per la durata del tempo di raccolta della carica  $q$ , ovvero tra l'istante in cui essa viene rilasciata e quello in cui essa giunge all'elettrodo, ricombinandosi. Il tempo di raccolta massimo è quello in cui la carica si origina su un elettrodo, e deriva lungo tutto lo spessore  $d$  della giunzione:

$$t_c = \frac{d}{v} = \frac{d}{\frac{\mu V_b}{d}} = \frac{d^2}{\mu V_b} \quad (126)$$

La carica indotta sull'elettrodo si ottiene integrando la corrente sul tempo di raccolta:

$$Q = it_c = \frac{q\mu V_b}{d^2} \frac{d^2}{\mu V_b} = q \quad (127)$$

Notiamo che l'azione **a distanza** del meccanismo di induzione della carica, permette di ottenere un segnale anche nel caso in cui  $q$  **non raggiunga l'elettrodo**. In tal caso **avremo comunque un segnale**, seppur di minor ampiezza (i.e. viene indotta una carica  $Q$  più piccola all'elettrodo). Per contro, se il segnale fosse dovuto alla raccolta della carica, in questo caso non vedremmo nulla. Ciò può accadere, come vedremo meglio in seguito, a causa delle **trappole**, ossia di impurezze nella struttura cristallina, che possono inibire il moto delle cariche libere.

Vediamo il caso generico, in cui il rilascio di carica avviene in un generico punto  $x$  entro la zona svuotata, come riportato nello schema a destra in fig. 40. Elettroni e buche migrano in direzioni opposte, con **tempi di raccolta**:

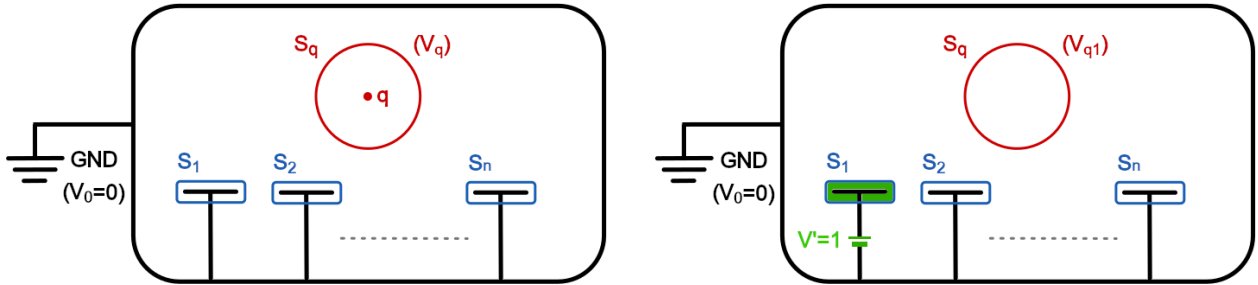


Figura 39: Schemi circuitali per il teorema di Ramo. A sinistra:  $n$  elettrodi messi a terra, ed una carica puntiforme  $q$ . A destra: viene rimossa la carica puntiforme ed il primo elettrodo è elevato al potenziale  $V' = 1$ , introducendo un generatore di tensione costante.

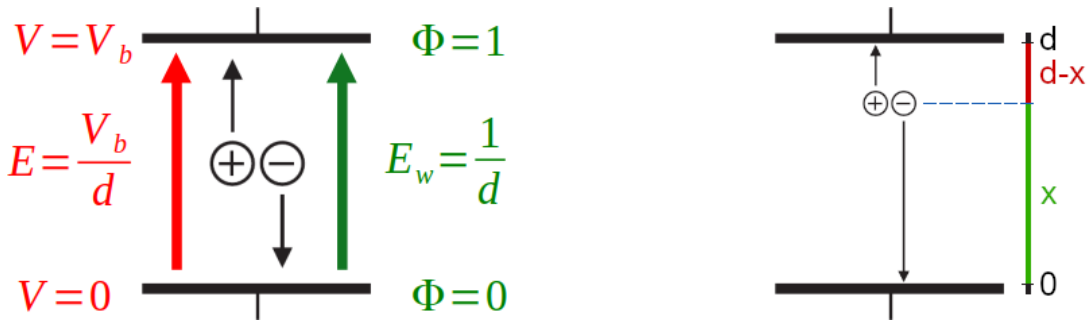


Figura 40: A sinistra: schema della configurazione a due elettrodi piani paralleli, posti a distanza  $d$ . Vengono riportati i valori di potenziale e potenziale peso, assieme al campo elettrico e al campo peso. A destra: schema del sistema di riferimento per il moto di deriva delle cariche all'interno degli elettrodi.

$$t_{c,e} = \frac{x}{v_e} = \frac{x}{\mu_e \frac{V_b}{d}} = \frac{xd}{\mu_e V_b} \quad \text{e} \quad t_{c,h} = \frac{d-x}{v_h} = \frac{d-x}{\mu_h \frac{V_b}{d}} = \frac{(d-x)d}{\mu_h V_b} \quad (128)$$

Osserviamo che i due tipi di portatori hanno carica di segno opposto, e muovendosi anche in direzioni opposte, contribuiscono ad una corrente netta che fluisce tutta nella stessa direzione. Indichiamo con  $i_e$  la corrente dovuta agli elettroni che migrano verso l'elettrodo  $n$ , ivi inducendo una carica  $Q_e$ , mentre con  $i_h$  indichiamo quella dovuta alle buche, che migrano verso l'elettrodo  $p$ , ivi inducendo una carica  $Q_h$ . Avremo dunque:

$$\begin{aligned} Q_e &= i_e t_e = \frac{q\mu_e V_b}{d^2} \frac{xd}{\mu_e V_b} = q \frac{x}{d} \\ Q_h &= i_h t_h = \frac{q\mu_h V_b}{d^2} \frac{(d-x)d}{\mu_h V_b} = q \frac{d-x}{d} = q \left(1 - \frac{x}{d}\right) \end{aligned} \quad (129)$$

Osserviamo che **in ogni istante la carica indotta su ciascun elettrodo è diversa**, poiché diversa è la velocità di deriva per i due tipi di cariche in moto, sebbene quella totale rimanga sempre  $q = Q_e + Q_h$ . Per vedere ciò, consideriamo il caso semplificato di una carica rilasciata a metà dello spessore svuotato, ossia in  $x = d/2$ . Calcoliamo il tempo di deriva degli elettroni:

$$t_{c,e} = v_e^{-1} \frac{d}{2} = \frac{d}{\mu_e V_b} \frac{d}{2} = \frac{d^2}{2\mu_e V_b} \quad (130)$$

Utilizzando la formula 125 per la corrente indotta, possiamo vedere che, in questo tempo, la carica indotta sull'elettrodo  $n$  sarà:

$$Q_e(t_{c,e}) = i_e t_{c,e} = \frac{q\mu_e V_b}{d^2} \frac{d^2}{2\mu_e V_b} = \frac{q}{2} \quad (131)$$

come ci aspettavamo. Nello stesso tempo, la carica indotta all'elettrodo  $p$  sarà invece:

$$Q_h(t_{c,e}) = i_h t_{c,e} = \frac{q\mu_h V_b}{d^2} \frac{d^2}{2\mu_e V_b} = \frac{\mu_h q}{\mu_e} \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \frac{q}{2} = \frac{q}{6} \quad (132)$$

Il tempo di raccolta delle buche è:

$$t_{c,h} = v_h^{-1} \frac{d}{2} = \frac{d}{\mu_h V_b} \frac{d}{2} = \frac{d^2}{2\mu_h V_b} \quad (133)$$

per cui posso calcolare il tempo  $\Delta t = t_{c,h} - t_{c,e}$  necessario per raccogliere le buche rimanenti dopo che gli elettroni sono già stati raccolti, come:

$$\begin{aligned} \Delta t &= t_{c,h} - t_{c,e} = \frac{d^2}{2\mu_h V_b} - \frac{d^2}{2\mu_e V_b} \frac{\mu_h}{\mu_h} = \frac{d^2}{2\mu_h V_b} \left(1 - \frac{\mu_h}{\mu_e}\right) \simeq \\ &\simeq \frac{d^2}{2\mu_h V_b} \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{d^2}{2\mu_h V_b} \frac{2}{3} = \frac{d^2}{3\mu_h V_b} \end{aligned} \quad (134)$$

Posso quindi calcolare la carica positiva ancora da raccogliere come:

$$\Delta Q_h = i_h \Delta t = \frac{q\mu_h V_b}{d^2} \frac{d^2}{3\mu_h V_b} = \frac{q}{3} \quad (135)$$

Possiamo verificare che la carica totale positiva raccolta, sarà:

$$Q_h(t_{c,h}) = Q_h(t_{c,e}) + \Delta Q = \frac{q}{3} + \frac{q}{6} = \frac{q}{2} \quad (136)$$

Se devo quindi fare una misura accurata del **rilascio energetico**, devo utilizzare un tempo d'integrazione almeno uguale a quello di raccolta delle buche. Viceversa, se sono interessato a misurare solo il **tempo di arrivo** del segnale, sarà sufficiente integrare sul tempo di raccolta dei soli elettroni, che danno un segnale molto piccato rispetto a quello dovuto alle buche: la risoluzione temporale sarà migliore, a scapito dell'informazione sulla carica totale rilasciata.

Notiamo che le correnti indotte sui due elettrodi hanno stesso modulo ma polarità opposta, ovvero  $i_1 = -i_2$ . Più in generale, vale l'equazione di **continuità** (legge di Kirchhoff). Essa afferma che, in ogni punto del circuito, la somma delle correnti indotte su ciascun  $k$ -esimo elettrodo è nulla, ovvero:

$$\sum_k i_k = 0 \quad (137)$$

Nel caso in cui ci siano più elettrodi, come nei rivelatori a **microstrisce**, la corrente indotta su un elettrodo deve compensare la somma di quelle indotte su tutti gli altri.

Questo tipo di sensori è caratterizzato da una distanza  $w$  fra i centri delle strisce, detta *pitch*, oltre che dallo spessore  $d$  della giunzione. Per avere un buon comportamento del sensore, richiediamo che il *pitch* sia minore dello spessore, tipicamente  $w \leq d/3$ . Immaginiamo che il sensore abbia entrambi gli elettrodi  $p$  ed  $n$  segmentati in strisce sovrapposte e parallele fra loro. All'interno di esse, tranne che in prossimità degli elettrodi, possiamo approssimare il campo elettrico come uniforme, con un potenziale che varia linearmente lungo la coordinata della giunzione. Ben diverso è invece il potenziale peso, che è illustrato nel grafico di fig. 41. Consideriamo un rilascio di carica nel punto di coordinata  $x_0$  lungo la verticale a metà della  $k$ -esima striscia. In questo punto si origina una coppia elettrone-buca, con cariche  $-q$  e  $+q$ , rispettivamente. Se  $x_p$  ed  $x_n$  sono le coordinate dei due elettrodi, possiamo calcolare la carica  $Q_k$  indotta, usando l'equazione 122:

$$\begin{aligned} Q_k &= q[\phi_k(x_p) - \phi_k(x_0)] - q[\phi_k(x_n) - \phi_k(x_0)] = \\ &= q[\phi_k(x_p) - \phi_k(x_0) - \phi_k(x_n) + \phi_k(x_0)] = \\ &= q[\phi_k(x_p) - \phi_k(x_n)] \end{aligned} \quad (138)$$

Supponiamo di leggere il segnale proveniente dall'elettrodo  $p$  della  $k$ -esima striscia, la quale ha un profilo di potenziale peso come nel grafico in alto a sinistra di fig. 42. Osservando che  $\phi_k(x_p) = 1$  e  $\phi_k(x_n) = 0$ , dalla precedente relazione, otteniamo:

$$Q_k = q[1 - 0] = q \quad (139)$$

Se invece misuriamo il segnale proveniente dall'elettrodo vicino  $(k+1)$ -esimo, il potenziale peso è quello riportato nel grafico in alto a destra di fig. 42, per cui, siccome  $\phi_{k+1}(x_p) = \phi_{k+1}(x_n) = 0$ , otteniamo:

$$Q_{k+1} = q[0 - 0] = 0 \quad (140)$$

In generale, come rappresentato nel grafico in fig. 43, vediamo che quando una carica non viene raccolta all'elettrodo su cui effettuiamo la misura, su di esso viene comunque indotta una corrente, che però cambia segno durante il moto della carica nella giunzione. Il suo integrale nel tempo, che rappresenta la carica raccolta su tale elettrodo, è nullo. Essendo  $i \propto E_w$  (dalla formula 121), possiamo analizzare il problema anche in termini di campo peso. Come visibile nei due grafici in basso in fig. 42, il campo peso della striscia  $k$ -esima, che è quella in lettura, presenta un andamento crescente sul percorso di deriva delle cariche, dunque l'integrale su tale cammino è non nullo. Ciò non accade per la striscia vicina,  $(k+1)$ -esima, che non viene letta: qui il campo peso cambia segno lungo il percorso, ed il suo integrale su tale cammino è nullo.

Quanto visto è vero se entrambi i portatori di carica vengono raccolti. Se, ad esempio, non siamo in grado di raccogliere le buche, l'equazione 138 si riduce a:

$$Q_k = -q[\phi_k(x_n) - \phi_k(x_0)] = q[\phi_k(x_0) - \phi_k(x_n)] \quad (141)$$

Si tratta di un contributo, in generale, non nullo, essendo  $\phi_k(x_0) \neq 0$ , motivo per cui osserveremo comunque un segnale, seppur più debole.



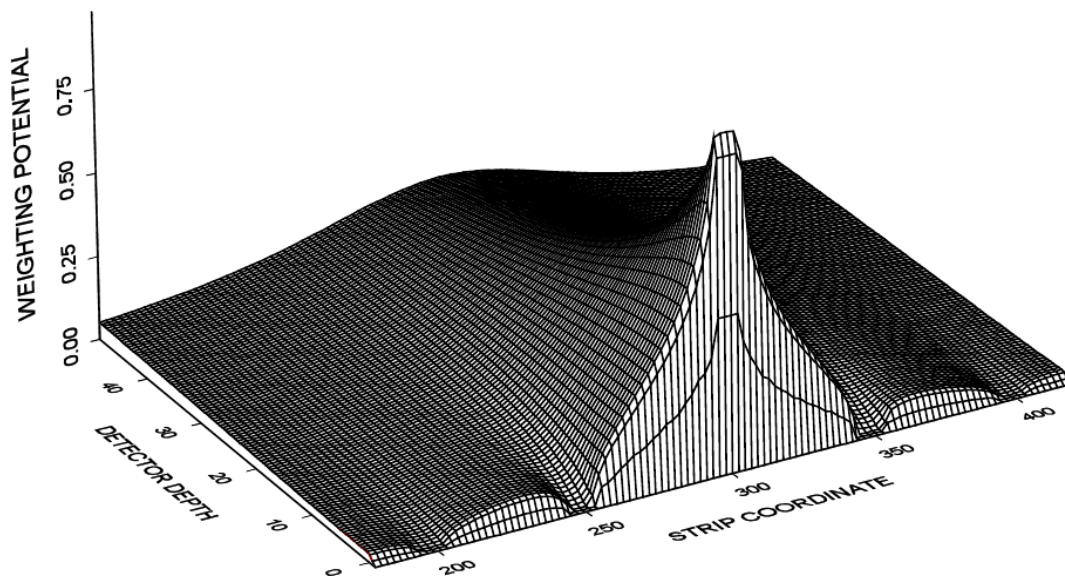


Figura 41: Potenziale peso di un rivelatore a *microstrip* di silicio avente spessore  $d = 300 \mu\text{m}$  e *pitch*  $w = 50 \mu\text{m}$ . La striscia centrale è a potenziale unitario, mentre le altre sono a zero. Viene mostrata la profondità solo fino a  $50 \mu\text{m}$  nel materiale.

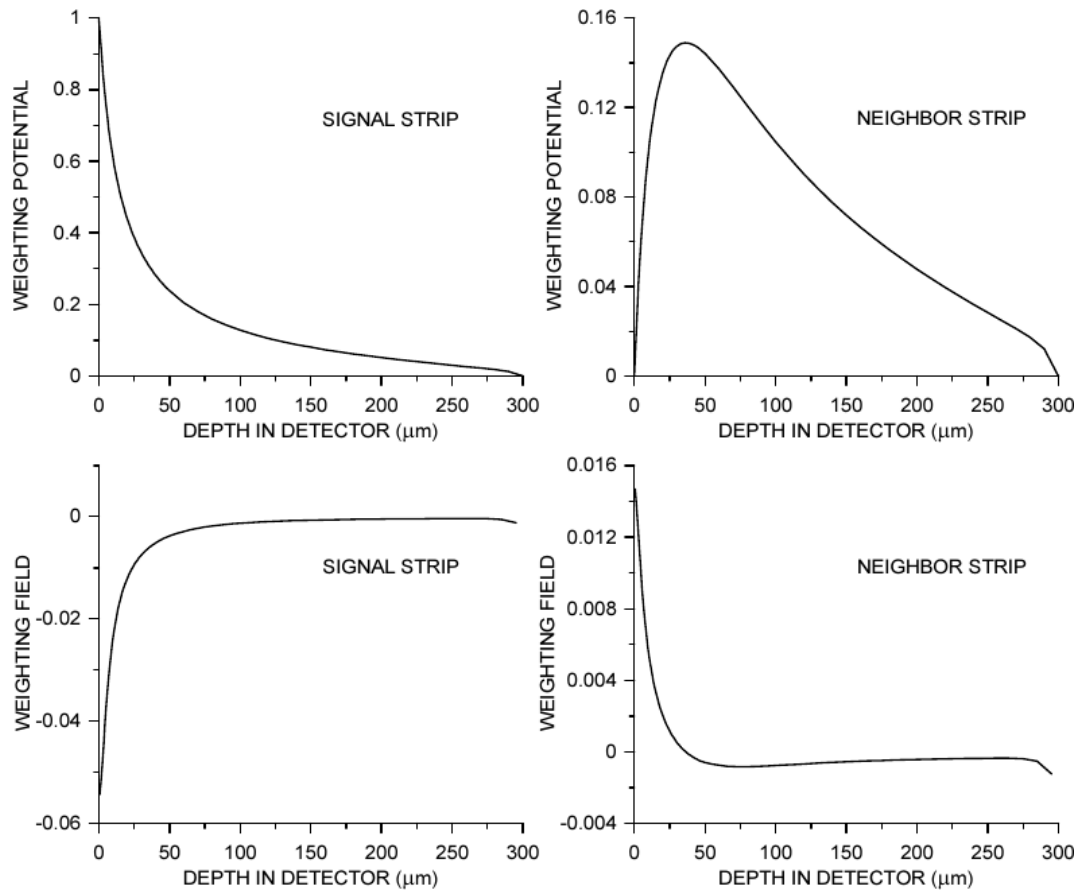


Figura 42: Profili del potenziale peso (in alto) e del campo peso (in basso) lungo il piano verticale a metà larghezza della striscia. A sinistra, per la striscia  $k$ -esima, su cui viene letto il segnale, mentre a destra per la sua vicina  $(k + 1)$ -esima. Gli elettrodi  $p$  hanno coordinata  $x_p = 0 \mu\text{m}$ , mentre quelli  $n$  sono in  $x_n = 300 \mu\text{m}$ . Poniamo ad 1 il potenziale peso dell'elettrodo  $p$  della  $k$ -esima striscia, 0 per tutti gli altri.

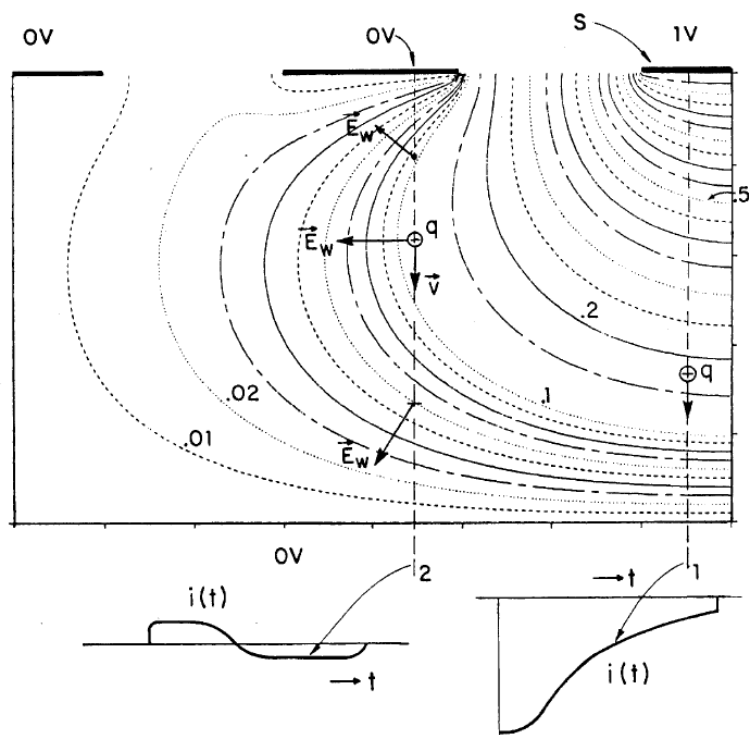


Figura 43: Rappresentazione del campo peso (linee di campo) per un sensore a microstrisce, visto di profilo. La striscia in lettura è quella più a destra. In basso, viene riportata la corrente indotta per l'elettrodo in lettura e per il suo vicino immediatamente a sinistra.

## 8 Equazione di Hecht

I semiconduttori reali possono presentare **imperfezioni** introdotte durante la crescita del cristallo, oppure durante la sua lavorazione, o ancora per danni da radiazione, quali:

- **atomi spurii** presenti in alcuni siti reticolari;
- **vacanze**, ovvero l'assenza di atomi in alcuni siti reticolari;
- irregolarità della struttura cristallina, come le **dislocazioni**.

Questi difetti generano degli stati aggiuntivi nel cristallo, nei quali le cariche libere possono venir **intrappolate** (*trapping*). Al moto di deriva della carica lungo il campo elettrico, si sovrappone anche quello stocastico, per effetto termico. La carica, muovendosi nel cristallo, "sonda" la probabilità di incontrare una trappola, che è proporzionale al tempo in cui essa compie il moto. La carica ha dunque una **vita media**  $\tau$ , che è definita come il tempo in cui essa mediamente "sopravvive" prima di venir intrappolata, o prima che si ricombini con una carica di segno opposto. Il successivo rilascio di una carica intrappolata può avvenire per effetto termico, oppure grazie alla presenza di campi elettrici esterni. Ciò provoca un **ritardo** nella raccolta della carica, e quindi nel segnale.

Una generica quantità di carica  $Q_0$  presente nel semiconduttore all'istante iniziale, decade esponenzialmente nel tempo. Trascorso un tempo  $t$ , essa sarà:

$$Q(t) = Q_0 e^{-t/\tau} \quad (142)$$

Supponendo che la carica si muova solo per deriva lungo il campo elettrico, possiamo esprimere il tempo in funzione della distanza  $x$  attraversata, come:

$$t = \frac{x}{v} = \frac{x}{\mu E} \quad (143)$$

Per cui la precedente relazione può essere riscritta come:

$$Q(x) = Q_0 e^{-x/\mu E \tau} = Q_0 e^{-x/L} \quad (144)$$

La quantità  $L \equiv \mu E \tau$  viene definita **lunghezza media di deriva**, e rappresenta il parametro caratteristico del *trapping*. In alternativa vengono utilizzati anche la vita media  $\tau$ , o anche  $\mu\tau$ .

Consideriamo ora un semplice rivelatore con elettrodi a facce piane parallele, poste a distanza  $D$  l'una dall'altra. Se una carica  $Q(x)$  effettua, per deriva, uno spostamento infinitesimo  $dx$  dalla posizione iniziale  $x$ , all'elettrodo viene indotta una carica di segnale  $dQ_s$ , che, usando il teorema di Ramo (formula 110), quantifichiamo come:

$$dQ_s = Q(x) \frac{dx}{D} \quad (145)$$

Tenendo ora conto del *trapping* (formula 144) possiamo calcolare la carica totale di segnale  $Q_s$ , integrando sulla distanza percorsa dalla carica libera:

$$Q_s = \frac{1}{D} \int_0^D Q(x) dx = \frac{Q_0}{D} \int_0^D e^{-x/L} dx = Q_0 \frac{L}{D} (1 - e^{-D/L}) \quad (146)$$

Osserviamo che, se  $D \ll L$ , ovvero la distanza che la carica deve percorrere è molto piccola rispetto a quella di decadimento, allora  $(1 - e^{-D/L}) \sim D/L$ , per cui  $Q_s \simeq Q_0$ . Ad esempio, perché tale rapporto sia  $> 85\%$ , dev'essere  $L > 3D$ .

La lunghezza di deriva dipende dalla natura del portatore di carica:  $L_e = \mu_e \tau_e E$  per gli elettroni,  $L_h = \mu_h \tau_h E$  per le buche. Considero che  $D$  sia lo spessore del rivelatore. Quando si verifica un rilascio di carica a distanza  $x_0$  dall'elettrodo  $p$ , gli elettroni percorreranno una distanza  $D - x_0$  sino all'elettrodo  $n$ , mentre le buche percorreranno una distanza  $x_0$  sino a quello  $p$ , analogamente a quanto visto nello schema a destra in fig. 40. La frazione di carica che viene misurata come segnale sarà data dal contributo di entrambi i portatori, ed utilizzando il risultato in formula 146, otteniamo l'**equazione di Hecht**:

$$\frac{Q_s}{Q_0} = \frac{L_e}{D} (1 - e^{-(D-x_0)/L_e}) + \frac{L_h}{D} (1 - e^{-x_0/L_h}) \quad (147)$$

Nel silicio purissimo (i.e. rivelatori di alta qualità) per gli elettroni abbiamo  $\tau_e \simeq 10$  ms. Ricordando che la loro mobilità è  $\mu_e = 1350 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} = 1.350 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ ms}^{-1}$ , con un campo elettrico  $E = 1.0 \cdot 10^4 \text{ V cm}^{-1}$ , otteniamo una lunghezza media di deriva pari a:

$$L_e = \mu_e \tau_e E = 1.350 \frac{\text{cm}^2}{\text{V ms}} 10 \text{ ms} \cdot 1.0 \cdot 10^4 \frac{\text{V}}{\text{cm}} = 1.4 \cdot 10^5 \text{ cm} \quad (148)$$

Per confronto, nel silicio amorfo (i.e. non cristallino) la lunghezza media di deriva per gli elettroni è dell'ordine di  $10 \text{ }\mu\text{m}$ , mentre nel diamante di alta qualità è dell'ordine di  $100 \text{ }\mu\text{m}$ .

Volendo migliorare l'efficienza di raccolta della carica, dobbiamo massimizzare il rapporto  $Q_s/Q_0$ , che è proporzionale alle lunghezze medie di deriva dei portatori di carica, ovvero:

$$\frac{Q_s}{Q_0} \propto L = \mu \tau E = \mu \tau \rho J \quad (149)$$

in cui  $\rho$  è la resistività e  $J$  la densità di corrente di *leakage*. Non possiamo dunque aumentare troppo il campo elettrico, poiché assieme ad esso aumenta anche la corrente di *leakage*, che porta dunque un maggior **rumore** indesiderato. Senza dimenticare che, assieme a ciò, vogliamo anche ridurre la fluttuazione relativa dell'energia misurata  $\sigma(\mathcal{E})/\mathcal{E}$ .

## 9 Equazione di Shockley

Vediamo ora più nel dettaglio cosa succede in una giunzione  $pn$  in **polarizzazione diretta** (*forward bias*). Come già visto, il generatore fornisce cariche positive dal lato  $p$  e negative dal lato  $n$ . Queste tendono a diffondere verso i rispettivi lati opposti della giunzione, ripristinando la neutralità degli atomi nella zona svuotata. Il volume di quest'ultima diminuisce, e si riduce anche l'intensità del campo elettrico. Ricordiamo che all'equilibrio la corrente di deriva, che dipende dal campo elettrico, compensa quella di diffusione, che dipende invece dal gradiente di concentrazione delle cariche, ovvero dal drogaggio. L'introduzione del potenziale in polarizzazione diretta riduce dunque la corrente di deriva, ma non quella di

diffusione, che dipende dalle concentrazioni dei droganti, rimaste inalterate. Tale squilibrio genera un flusso netto di cariche, e quindi una corrente, lungo la giunzione. Giunte nei rispettivi lati opposti, le cariche dei due tipi si ricombinano con quelle di segno opposto. Il generatore però provvede a ripristinarle ed il processo si ripete, creando una corrente di diffusione stazionaria.

L'equazione di continuita' per gli elettroni, a partire dal bilancio di quanti portatori entrano e escono da una specifica fetta di materiale che compone la giunzione (velocita' di variazione del numero di e-) e dal suo sviluppo in serie di Taylor, risulta essere:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x} + (G_n - R_n) \quad (150)$$

dove il termine a sinistra rappresenta la variazione temporale del numero di e-, e quelli a destra sono la variazione di concentrazione nella coordinata spaziale e  $G_n$  e  $R_n$  rappresentano rispettivamente la velocita' di generazione e ricombinazione degli e' per unita' di volume. Per un eccesso positivo di portatori, come nel caso in cui stiamo esaminando, il termine di ricombinazione prevale su quello di generazione, e portera' dunque a una riduzione dell'eccesso con un determinato tempo di decadimento caratteristico, che chiameremo  $\tau_n$  per gli elettroni.

Posso esprimere i termini dipendenti dalla corrente in funzione delle concentrazioni, grazie alle formule per le correnti di diffusione e di deriva usati in precedenza, per esempio per gli elettroni:

$$J_n = q\mu_n n E + qD_n \frac{dn}{dx} \quad (151)$$

L'equazione 150 nel caso generico di  $E$  e  $n$  dipendenti da  $x$  diventa quindi in questo caso:

$$\frac{\partial n}{\partial t} = \mu_n n(x) \frac{\partial E(x)}{\partial x} + \mu_n E(x) \frac{\partial n(x)}{\partial x} + D_n \frac{\partial^2 n(x)}{\partial x^2} + (G_n - R_n) \quad (152)$$

Poniamo alcune condizioni:

- il regime e' stazionario, ovvero  $\frac{\partial n}{\partial t} = 0$  e l'equazione diventa una semplice differenziale ordinaria nell'incognita  $x$
- il termine  $G_n - R_n$  si riduce alla variazione tra portatori alla coordinata  $x$  e portatori all'equilibrio scalato sul tempo caratteristico con cui esso decade, ovvero  $\tau_n$
- se il campo e' nullo o trascurabile, come per differenze di potenziale molto ridotte, il primo e il secondo termine a destra dell'uguale si possono trascurare
- anche se non trascurabile ma costante, come per tensioni di polarizzazione inversa molto alte o per drogaggi a profilo esponenziale, il primo termine a destra dell'uguale si annulla
- raramente si devono trattare tali equazioni nella loro piena complessita'

In tali condizioni, la concentrazione degli elettroni che diffondono dal lato  $n$  verso quello  $p$ , che chiameremo  $n_p$ , è descritta dall'equazione di diffusione:

$$D_n \frac{d^2 n_p(x)}{dx^2} - \frac{n_p(x) - n_{p0}}{\tau_n} = 0 \quad (153)$$

in cui  $n_{p0}$  è la concentrazione all'equilibrio. L'incremento  $n_p(x) - n_{p0}$  decade successivamente con un tempo caratteristico  $\tau_n$ , a cui corrisponde una lunghezza di deriva  $L_n$ . Come condizioni al contorno, consideriamo che:

- alla giunzione, ovvero nel passaggio tra  $n$  e  $p$  in  $x = 0$ , la concentrazione è fissata al valore di  $n_p(0)$ ;
- a grandi distanze la concentrazione non subisce perturbazioni dalla tensione applicata, per cui  $n_p(\infty) = n_{p0}$ , ovvero la concentrazione di minoritari all'equilibrio.

Definendo la **lunghezza media di diffusione** degli elettroni  $L_n = \sqrt{D_n \tau_n}$ , l'equazione può essere riscritta nella forma:

$$L_n^2 \frac{d^2 n_p(x)}{dx^2} - (n_p(x) - n_{p0}) = 0 \quad (154)$$

ed ha come soluzione:

$$n_p(x) = n_{p0} + (n_p(0) - n_{p0})e^{-x/L_n} \quad (155)$$

Seguendo il computo della componente di diffusione che abbiamo visto in precedenza, e ricordandoci che ora stiamo considerando una corrente di elettroni in verso inverso alla coordinata  $x$  (e al gradiente di concentrazione), la corrente di diffusione degli elettroni che entrano nel lato  $p$  può quindi essere scritta, derivando l'equazione precedente, come:

$$J_{np} = -qD_n \left. \frac{dn_p(x)}{dx} \right|_{x=0} = qD_n \frac{n_p(0) - n_{p0}}{L_n} \quad (156)$$

La densità di elettroni all'equilibrio nel lato  $p$  della giunzione è  $n_{p0} = n_i^2/N_A$ . Non è altrettanto semplice valutare la densità di elettroni che fluisce verso il lato  $p$ , ossia  $n_p(0)$ , poiché non si tratta di una situazione di equilibrio, per cui le equazioni precedentemente viste non possono essere applicate.

Come avevamo già introdotto parlando dei quasi-livelli di Fermi, per risolvere il problema, Shockley postulò che il prodotto delle concentrazioni rimanesse comunque costante, seppure con  $pn > n_i^2$ . Tale condizione venne definita di **quasi-equilibrio**, permettendo di definire i rispettivi **quasi-livelli di Fermi**  $E_{F,n}$  ed  $E_{F,p}$ , attraverso cui possiamo esprimere le concentrazioni dei maggioritari come:

$$n = n_i \exp\left(\frac{E_{F,n} - E_i}{kT}\right) \quad \text{e} \quad p = n_i \exp\left(\frac{E_i - E_{F,p}}{kT}\right) \quad (157)$$

Possiamo calcolare il prodotto delle concentrazioni dei rispettivi maggioritari in  $p$  e  $n$  come:

$$pn = n_i^2 \exp\left(\frac{E_{F,n} - E_{F,p}}{kT}\right) \quad (158)$$

che, dovendo rimanere costante, ci dice che lo stesso vale per la differenza  $E_{F,n} - E_{F,p}$  fra i due quasi-livelli di Fermi.

Sulla base di questo ragionamento, ed utilizzando anche la relazione di Einstein ( $qD_n = \mu_n kT$ ), la densità di corrente che fluisce da  $n$  verso  $p$  (formula 156) può essere riscritta come:

$$J_{np} = -qD_n \left. \frac{dn_p(x)}{dx} \right|_{x=0} = -\mu_n kT \frac{d}{dx} \left[ n_i \exp \left( \frac{E_{F,n} - E_i}{kT} \right) \right] = -\mu_n n \frac{dE_{F,n}}{dx} \quad (159)$$

Questa corrente proviene dal lato  $n$  della giunzione, all'interno del quale gli elettroni si muovono prevalentemente per deriva. Possiamo identificare tale corrente come:

$$J_{nn} = -qn v_{drift} = -qn \mu_n E = -\mu_n n \frac{dE_i}{dx} \quad (160)$$

Siccome dev'essere  $J_{np} = J_{nn}$ , si ricava immediatamente che:

$$\frac{dE_{F,n}}{dx} = \frac{dE_i}{dx} \quad (161)$$

ossia l'andamento dei quasi-livelli di Fermi è uguale a quello delle bande.

Applicando una tensione esterna  $V$  in regime di *forward bias*, i livelli di Fermi intrinseci vengono separati di una quantità  $qV$ , e lo stesso accade per i quasi-livelli di Fermi, ovvero  $E_{F,n} - E_{F,p} = qV$ . Possiamo quindi riscrivere il prodotto delle concentrazioni (formula 158) in condizioni di non-equilibrio come:

$$pn = n_i^2 \exp \left( \frac{E_{F,n} - E_{F,p}}{kT} \right) = n_i^2 \exp \left( \frac{qV}{kT} \right) \quad (162)$$

Consideriamo che la concentrazione dei portatori maggioritari sia molto maggiore di quella dei portatori minoritari, ossia delle cariche che vengono fatte fluire dai rispettivi lati opposti della giunzione. In questa condizione, la variazione indotta dal potenziale aggiuntivo non perturba in maniera rilevante la concentrazione dei portatori maggioritari, ma solo dei minoritari. Dall'equazione precedente quindi, visto che la concentrazione di  $p$  non è variata sensibilmente, dev'essere quella di  $n$  che varia, di un fattore pari a  $\exp(qV/kT)$  rispetto alla concentrazione di minoritari all'equilibrio. Le concentrazioni dei rispettivi portatori minoritari in  $x = 0$ , ovvero all'inizio della regione  $p$ , si possono quindi scrivere come:

$$\begin{aligned} n_p(0) &= n_{p0} \exp \left( \frac{qV}{kT} \right) = \frac{n_i^2}{N_A} \exp \left( \frac{qV}{kT} \right) \\ p_n(0) &= p_{n0} \exp \left( \frac{qV}{kT} \right) = \frac{n_i^2}{N_D} \exp \left( \frac{qV}{kT} \right) \end{aligned} \quad (163)$$

in cui abbiamo tenuto conto che all'equilibrio vale la legge di azione di massa, per cui  $n_i^2 = n_{p0} N_A$  nel lato  $p$ , mentre  $n_i^2 = p_{n0} N_D$  nel lato  $n$ .

Inserendo l'espressione appena ricavata nella formula 156, possiamo riscrivere la corrente di diffusione degli elettroni come:



$$J_n = qD_n \frac{n_p(0) - n_{p0}}{L_n} = qD_n \frac{n_i^2}{N_A L_n} (e^{qV/kT} - 1) \quad (164)$$

Con ragionamento analogo, possiamo calcolare anche la corrente di diffusione delle buche verso il lato  $n$  della giunzione:

$$J_p = qD_p \frac{p_n(0) - p_{n0}}{L_p} = qD_p \frac{n_i^2}{N_D L_p} (e^{qV/kT} - 1) \quad (165)$$

La corrente totale è data dal contributo degli elettroni e delle buche, ovvero:

$$J = J_n + J_p = qn_i^2 \left( \frac{D_n}{N_A L_n} + \frac{D_p}{N_D L_p} \right) (e^{qV/kT} - 1) = J_0 (e^{qV/kT} - 1) \quad (166)$$

Questo risultato prende il nome di **equazione del diodo** o **equazione di Shockley**. Essa mette in relazione la densità di corrente con la tensione applicata ai capi della giunzione, ed è valida **sia in regime di polarizzazione diretta che inversa**. Infatti non abbiamo imposto restrizioni sul segno della tensione applicata. La formula descrive semplicemente il moto delle cariche negative e positive in diffusione alla giunzione. Per  $V = 0$ , ovvero con la sola tensione  $V_{bi}$  presente alla giunzione, la corrente è nulla (equilibrio termodinamico). Per  $V < 0$ , il termine esponenziale tende velocemente a zero, e quindi l'equazione si riduce a  $J = -J_0$ . Osserviamo che:

- a fissata sezione trasversale della giunzione, l'andamento della corrente è quello descritto nel grafico in fig. 29;
- la densità di corrente ha una dipendenza forte dalla temperatura  $T$ ;
- la dipendenza dall'energia di *gap* non appare esplicitamente, ma solo attraverso la concentrazione intrinseca  $n_i$ ;
- i due contributi alla corrente totale,  $J_n$  e  $J_p$ , dovuti rispettivamente agli elettroni ed alle buche, sono in generale diversi.

In regime di *reverse bias*, per tensioni applicate (negative)  $V \gg kT/q$ , il termine esponenziale in formula 166 si annulla. Possiamo dunque scrivere la **corrente di saturazione** come:

$$J = -J_0 = -qn_i^2 \left( \frac{D_n}{N_A L_n} + \frac{D_p}{N_D L_p} \right) \quad (167)$$

Nella zona svuotata non ci sono cariche libere per effettuare catture o ricombinazioni. In tali condizioni, gli unici processi di rilievo sono quelli per emissione di coppie elettrone-buca che avevamo fin'ora trascurato, assumendo una estensione di  $W$  trascurabile. Queste cariche vanno a costituire la **corrente di generazione**  $J_{gen}$ , che risulta proporzionale alla variazione di concentrazione di centri emettitori  $N_e$  ed allo spessore  $W$  di svuotamento:

$$J_{gen} = q \frac{dN_e}{dt} W = q \frac{n_i}{2\tau_g} W \quad (168)$$

in cui abbiamo definito  $\tau_g$  il **tempo medio di generazione**. La corrente totale in *reverse bias* sarà data dal contributo della componente di deriva e di generazione, per cui:

$$-J = J_R = J_0 + J_{gen} = qn_i^2 \left( \frac{D_n}{N_A L_n} + \frac{D_p}{N_D L_p} \right) + q \frac{n_i}{2\tau_g} W \quad (169)$$

## 10 Elaborazione del segnale

Vediamo ora cosa succede al segnale dopo la raccolta della carica. Di solito, i segnali in uscita dal sensore hanno mediamente una durata dell'ordine dei ns. Solo quelli più veloci, e dunque più adatti a misure di tempo, possono arrivare all'ordine di 10 ps. In generale, essi hanno un'ampiezza molto piccola, e necessitano dunque di **amplificazione**. Ciò prevede di aggiungere al segnale altri elettroni, il cui numero però può fluttuare: si tratta del **rumore** dovuto all'elettronica, che dev'essere mantenuto più basso di quello intrinseco.

Come vediamo nello schema di fig. 44, il primo stadio di trattamento del segnale è costituito dal **preamplificatore**, che viene posto quanto più vicino possibile al sensore, per evitare dispersioni lungo il circuito. Qui il segnale viene amplificato, ovvero ne viene aumentata l'ampiezza, cercando di mantenerne inalterate le altre caratteristiche.

Successivamente, il segnale viene mandato al **formatore**, il cui scopo è di renderlo trattabile dall'elettronica di acquisizione a valle. Il segnale acquisisce una forma, con un fronte di salita ed uno di discesa ben definiti nel tempo. Anche la durata temporale, e dunque la frequenza, assumono un valore ben definito. In tal modo, attraverso una selezione (filtraggio) in frequenza, è possibile isolare il segnale dal rumore. In questa maniera, si evitano anche fenomeni di **sovrapposizione** (*pile-up*) di più segnali vicini nel tempo.

L'**ADC** (*Analog to Digital Converter*) è costituito da una serie di comparatori. Si tratta sostanzialmente di discriminatori a soglia via via più elevata. In tal modo vengono determinati degli intervalli di ampiezza, fra una soglia e quella immediatamente successiva, ed attraverso questi è possibile campionare i segnali in ingresso.

Vediamo ora il **rumore elettronico**. Consideriamo  $n$  elettroni che si muovono fra due elettrodi posti a distanza relativa  $s$  fissata, in un tempo  $t$ , con velocità media di deriva  $v$ . Per quanto visto nel teorema di Ramo (lezione 7), su di essi viene indotta una corrente  $i$ , che possiamo esprimere come:

$$i = \frac{nq}{t} = \frac{nqv}{s} \quad (170)$$

La sua fluttuazione media  $\langle \delta i \rangle$  dipende sia da quella della velocità  $v$  degli elettroni, sia da quella del loro numero  $n$ . Queste due componenti non sono correlate statisticamente, quindi le loro fluttuazioni vengono sommate in quadratura:

$$\langle \delta i \rangle^2 = \left( \frac{nq}{s} \langle \delta v \rangle \right)^2 + \left( \frac{qv}{s} \langle \delta n \rangle \right)^2 \quad (171)$$

La fluttuazione  $\delta v$  della velocità dei portatori avviene a causa dell'eccitazione termica di questi ultimi. Si tratta dunque di **rumore termico**, il cui spettro in frequenza è uniforme, per cui è un rumore **bianco**.

La fluttuazione  $\delta n$  del numero di portatori può avvenire per diversi motivi. Uno fra questi, è che la corrente si forma a causa di singoli eventi discreti di generazione e ricombinazione, che non sono correlati gli uni agli altri, ed il cui numero può dunque fluttuare casualmente. Tale componente viene definita **rumore shot**. Anche in questo caso lo spettro in frequenza è uniforme, e quindi si tratta di rumore **bianco**.

Il numero di cariche può fluttuare anche a causa delle impurità e delle imperfezioni del cristallo. La sovrapposizione di fenomeni di **intrappolamento** con tempi caratteristici diversi (i.e. vite medie), dà luogo ad un **rumore**, in particolare alle **basse frequenze**. Si tratta di rumore **rosa**, poiché il suo spettro è  $\propto 1/f^\alpha$ , dove  $f$  indica la frequenza, mentre l'esponente  $\alpha$  è tipicamente nell'intervallo  $0.5 \div 2$ .

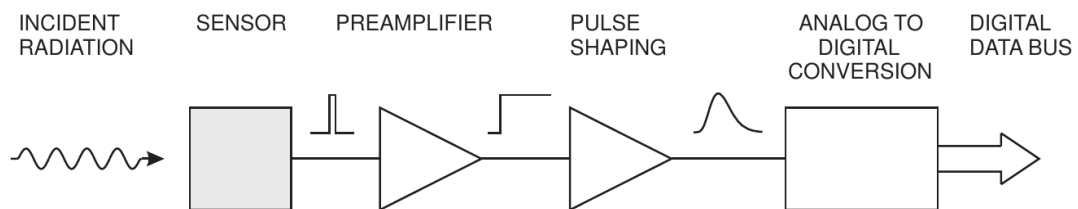


Figura 44: Schema delle funzionamento di base di un rivelatore: la radiazione incidente produce un segnale elettrico, che viene processato attraverso un preamplificatore ed un formatore, per venire infine digitalizzato, attraverso un ADC, e salvato poi in memoria.

## 11 Fluttuazione del segnale e trattazione del rumore

Le fluttuazioni del segnale originale si ripercuotono sulla **risoluzione energetica**. In particolare, vengono limitati il **minimo segnale rivelabile**, la **precisione sulla misura di ampiezza** e la **sensibilità**.

Riassumiamo quanto visto alla lezione ?? riguardo alla risoluzione ed al fattore di Fano. Quando una particella perde un'energia  $E$  nota, produce un numero  $N$  di ionizzazioni. Trattando tali eventi come indipendenti, il loro numero dovrebbe fluttuare come  $\sqrt{N}$ , seguendo la statistica poissoniana. Nella realtà però questi eventi sono correlati, ed il risultato dev'essere corretto per il fattore di Fano (nel caso del silicio,  $F = 0.12$ ). Siccome  $N = E/E_{ion}$ , dove  $E_{ion}$  è l'energia di ionizzazione, la **fluttuazione del numero di cariche** può essere scritta come:

$$\Delta N = \sqrt{NF} = \sqrt{\frac{EF}{E_{ion}}} \quad (172)$$

La **fluttuazione relativa dell'energia** misurata è dunque legata a quella del numero di cariche, per cui scriveremo:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\Delta N}{N} = \frac{\sqrt{EF/E_{ion}}}{E/E_{ion}} = \frac{\sqrt{F}}{\sqrt{E/E_{ion}}} = \sqrt{\frac{FE_{ion}}{E}} \quad (173)$$

Introduciamo brevemente il **valore quadratico medio** (RMS, *root mean square*). Nel caso di un insieme di  $N$  valori discreti  $\{x_1, \dots, x_N\}$ , esso viene definito come la radice della media quadratica, ovvero:

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i^2} \quad (174)$$

Possiamo definirlo anche per una funzione continua del tempo  $f(t)$ . Nel caso di un intervallo temporale finito  $T_1 \leq t \leq T_2$  avremo:

$$f_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T_2 - T_1} \int_{T_1}^{T_2} [f(t)]^2 dt} \quad (175)$$

Nel caso lo si consideri invece su tutto l'asse temporale, avremo:

$$f_{\text{RMS}} = \lim_{T \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{1}{2T} \int_{-T}^T [f(t)]^2 dt} \quad (176)$$

Qualora la funzione venga campionata ad istanti di tempo successivi, come accade nelle nostre misure, si può approssimare l'RMS riconducendosi al caso discreto (formula 174).

Possiamo ora definire il **rapporto segnale-rumore** (SNR, o S/N, *signal-to-noise ratio*) come:

$$S/N = \frac{\langle s^2(t) \rangle}{\langle n^2(t) \rangle} \quad (177)$$

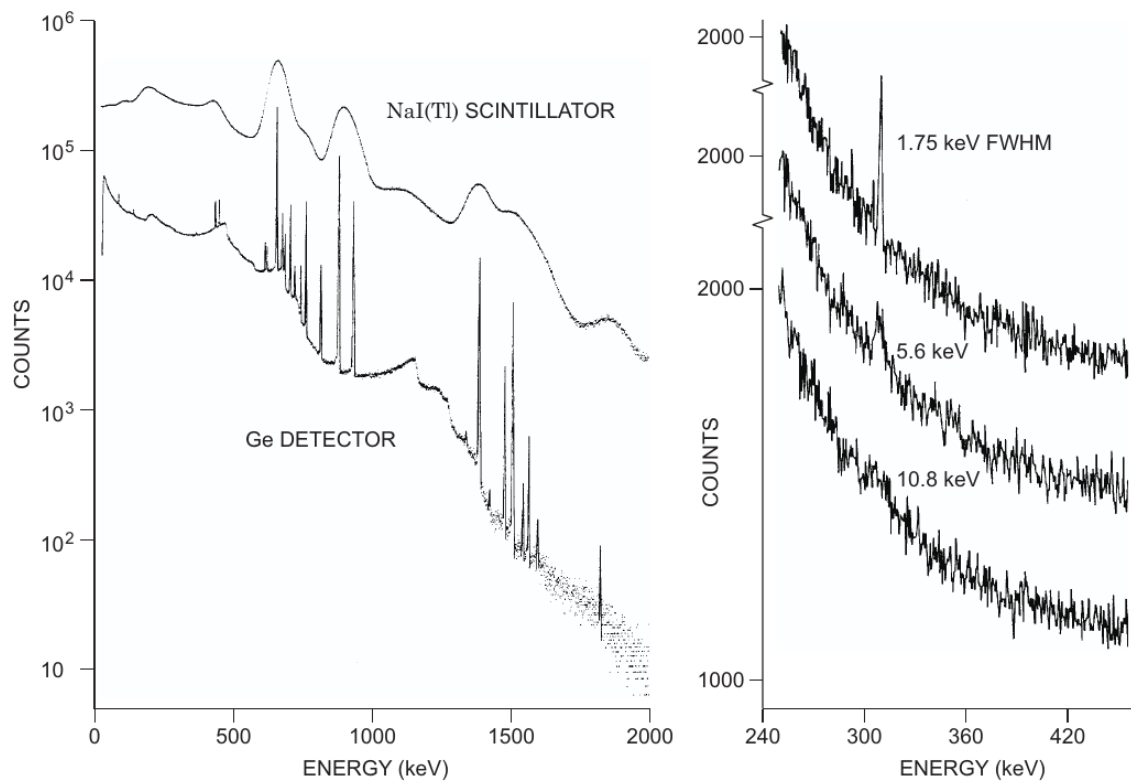


Figura 45: Effetti della risoluzione sulla misura di spettri energetici. A sinistra: confronto fra gli spettri energetici di raggi gamma misurati con un rivelatore a scintillazione ed uno a semiconduttore. La migliore risoluzione di quest'ultimo permette di visualizzare la struttura nel dettaglio, distinguendo i diversi picchi dei rispettivi segnali. A destra: una risoluzione migliore, qui espressa in termini di larghezza a metà altezza (FWHM), incrementa anche il rapporto segnale-rumore. Con risoluzioni migliori è possibile distinguere il picco segnale dal rumore.

ovvero come il rapporto fra la media quadratica del segnale  $s(t)$  e quella del rumore  $n(t)$ .

Il rumore si può misurare con la **carica equivalente di rumore** (ENC, *equivalent noise charge*), cioè con il numero di elettroni che producono un segnale equivalente al valore quadratico medio del rumore, ovvero quando il rapporto segnale-rumore è  $S/N = 1$ . In pratica, consideriamo che nel sensore venga rilasciata una carica  $Q_S$  di segnale, e che  $S/N$  sia il rapporto segnale-rumore, allora la carica equivalente di rumore sarà:

$$\text{ENC} \equiv Q_n = \frac{Q_S}{S/N} \quad (178)$$

Conoscendo l'energia media di ionizzazione  $\varepsilon_i$  del materiale di cui è composto il sensore, possiamo ricavare facilmente il rumore in termini energetici:

$$\Delta E_n = \varepsilon_i \text{ENC} \quad (179)$$

Come vedremo fra poco, risulta conveniente analizzare i singoli contributi al rumore in termini di tensione e corrente: l'ENC viene calcolata sul rumore complessivo, ed in tal senso non è una quantità primitiva, ma derivata.

Vediamo ora i metodi per effettuare l'**analisi spettrale del rumore**. Come abbiamo già detto, il rumore è una variabile **casuale**, di cui non possiamo prevedere l'evoluzione temporale. Possiamo però individuare delle proprietà in senso statistico, si tratta infatti di un processo:

- **stazionario**, ovvero le cui proprietà statistiche rimangono costanti nel tempo;
- **ergodico**, ovvero le cui proprietà statistiche rimangono costanti tra diverse misure (i.e. la media su tutte le possibili realizzazioni coincide con la media temporale).

Preliminarmente, definiamo la **media temporale** di una funzione del tempo  $x(t)$  come:

$$\bar{x} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \quad (180)$$

Solitamente, tranne nei casi in cui la funzione  $x(t)$  sia una sinusoidale, possiamo estendere la media temporale su tutto l'asse dei tempi, ridefinendo:

$$\bar{x} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) dt \right] \quad (181)$$

Ricordiamo che la potenza in un circuito resistivo può essere scritta come  $P = VI = RI^2 = V^2/R$ . Possiamo quindi definire la **potenza fisica** del segnale come:

$$P_{phy} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} RI^2(t) dt \right] = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \frac{V^2(t)}{R} dt \right] \quad (182)$$

ovvero  $P_{phy} = R\overline{I^2} = \overline{V^2}/R$ . Esprimendo il segnale in uscita in termini di tensione, chiamiamo  $x(t) = V(t)$ . Generalizzando, possiamo ora definire la **potenza del segnale**  $x(t)$  come:

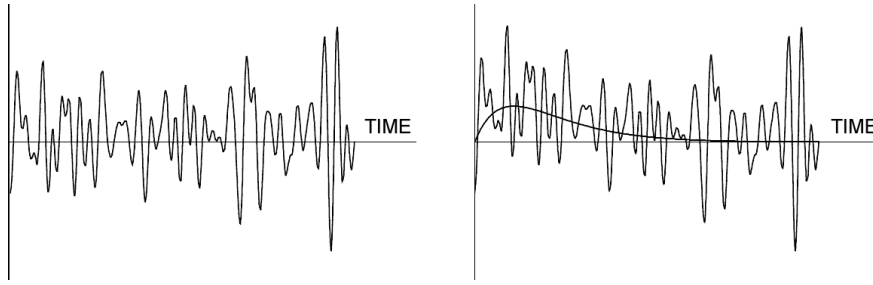


Figura 46: A sinistra: forma d'onda del rumore casuale. A destra: forma d'onda del segnale sovrapposto al rumore. Viene riportata anche la forma del segnale separata dal rumore. Il rapporto segnale-rumore è  $S/N = 1$ , ovvero l'ampiezza del picco del segnale coincide con l'RMS del rumore.

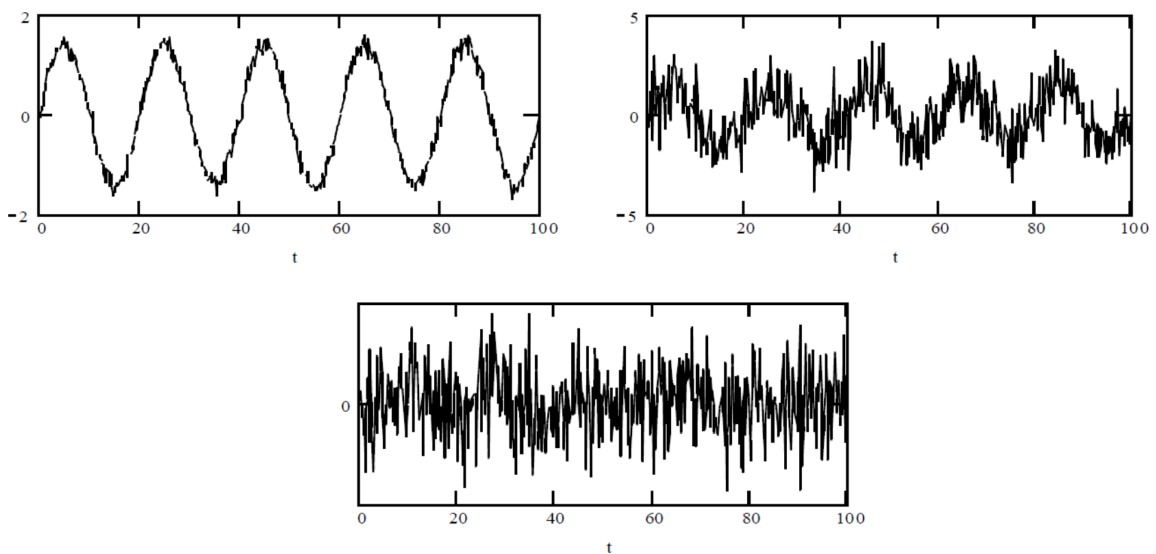


Figura 47: Segnale sinusoidale sommato a rumore gaussiano, per tre diversi valori di rapporto segnale-rumore. Nel grafico in alto a sinistra  $S/N = 10$ , in quello in alto a destra  $S/N = 1$ , mentre in quello in basso al centro  $S/N = 0.1$ . Osserviamo che risulta sempre più difficile distinguere il segnale dal rumore al diminuire di tale rapporto.

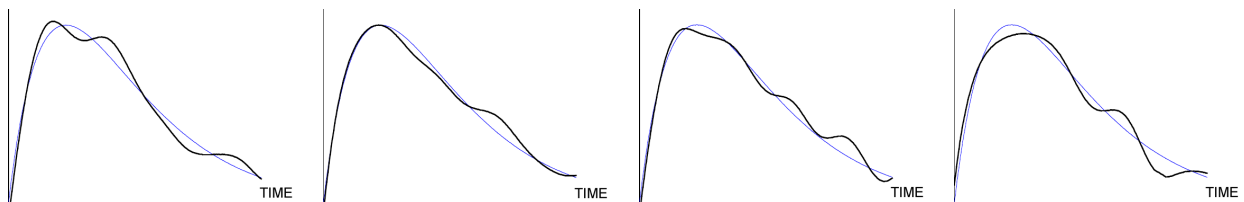


Figura 48: Effetti del rumore sulla risoluzione temporale. Vediamo quattro esempi di segnali affetti rumore, con  $S/N = 20$ . Per confronto, viene riportato anche il segnale ideale, senza rumore, che è sempre lo stesso. Se il tempo del segnale è dato dal superamento di una soglia fissata in ampiezza, ripetendo la misura otterremo, in generale, tempi diversi.



$$P = \overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^2(t) dt \right] \quad (183)$$

Notiamo che non si tratta della potenza fisica, per ottenere la quale dovrei dividere per la resistenza:  $P_{phy} = P/R$ .

Come visibile dai grafici in fig. 50, un segnale con rapporto segnale-rumore sufficientemente elevato avrà una potenza simile a quella del segnale ideale, privo di rumore. Per ottenere maggiori informazioni, dobbiamo però passare al **dominio delle frequenze**.

A tale scopo, definiamo la **densità spettrale di potenza** (PSD, *power spectral density*)  $S_x(f)$  di un segnale  $x$  in funzione della frequenza  $f$ . La **potenza del segnale**  $x$  in una banda di frequenze  $\Delta f$  viene indicata con  $P_{x\Delta f}$ .

Cerchiamo di trattare il nostro segnale complessivo nello spazio delle frequenze, e per un dato intervallo di frequenze vogliamo sapere quale sia il contributo di potenza, ovvero qual è l'energia del sistema apportato da queste frequenze, e fare poi una scansione di tale quantità su tutte le frequenze. Posso immaginare di prendere per esempio 1 Hz di intervallo e calcolare la potenza media su quell'intervallo, poi spostare l'intervallo di 1 Hz e ricalcolare. I punti calcolati riportati in grafico in funzione della frequenza centrale del mio intervallo costruiranno l'andamento di tale potenza spettrale in funzione della frequenza. Se cambiamo l'estensione dell'intervallo, il contributo di ogni intervallo cambierà. Possiamo quindi normalizzare il contributo dividendolo per l'estensione dell'intervallo e far tendere a zero l'estensione dell'intervallo, in modo da rendere la quantità calcolata una densità. Abbiamo quindi ottenuto la **densità spettrale di potenza**.

Quindi avremo:

$$S_x(f) \equiv \lim_{\Delta f \rightarrow 0} \frac{P_{x\Delta f}}{\Delta f} \quad (184)$$

La potenza totale del segnale si ottiene integrando la densità spettrale di potenza su tutte le frequenze, cioè:

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f) df \quad (185)$$

Introduciamo ora la **funzione di cross-correlazione** tra due segnali  $x(t)$  ed  $y(t)$ , definita come:

$$R_{xy}(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)y(t + \tau) dt \right] \quad (186)$$

Essa ci indica quanto i due segnali sono simili, in funzione del ritardo  $\tau$  fra l'uno e l'altro. Si può anche calcolare la correlazione di un segnale  $x(t)$  con se stesso, ritardato di un tempo  $\tau$ , ottenendo così la **funzione di autocorrelazione**:

$$R_{xx}(\tau) \equiv \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t)x(t + \tau) dt \right] \quad (187)$$

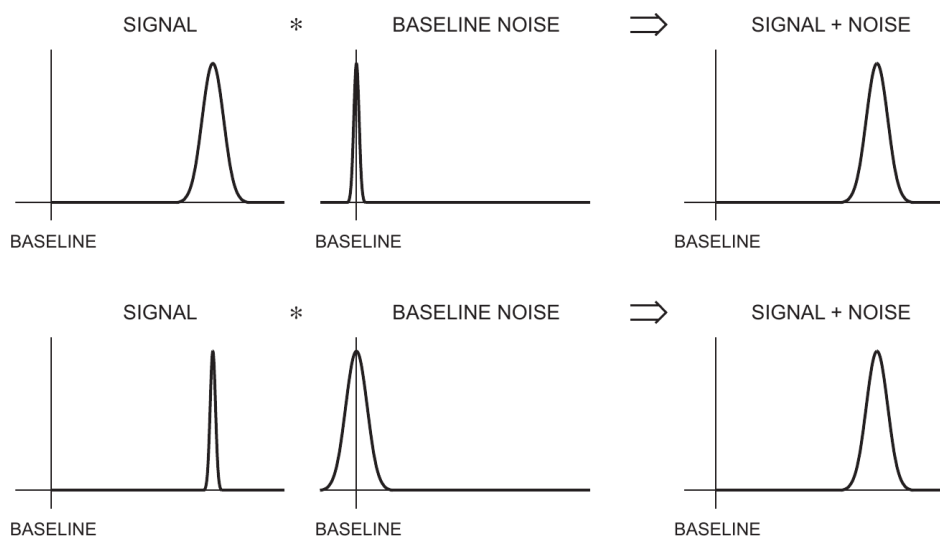


Figura 49: Le fluttuazioni del segnale e del rumore si sommano in quadratura. Se il segnale ha una varianza grande (schema in alto), le fluttuazioni del rumore sono solitamente trascurabili. In tal caso è ammissibile un'elettronica più rumorosa, come avviene, ad esempio, negli scintillatori o nelle camere proporzionali. Se invece il segnale ha una varianza piccola (schema in basso), è cruciale avere un'elettronica silenziosa, per mantenere una buona risoluzione del segnale.

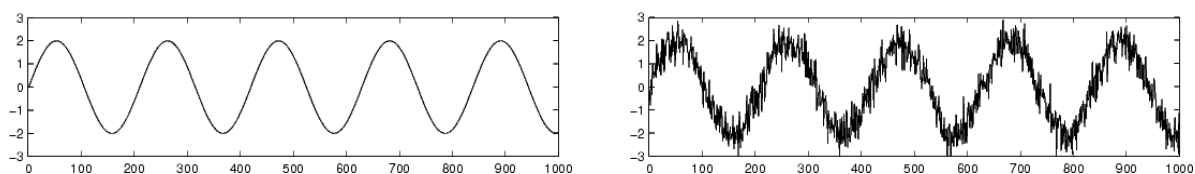


Figura 50: Confronto fra un segnale sinusoidale ideale (a sinistra) ed il medesimo affetto da rumore casuale (a destra). Nei grafici abbiamo l'ampiezza in ordinata ed il tempo in ascissa. Notiamo che il rapporto segnale-rumore nel secondo grafico è abbastanza grande, per cui i due segnali hanno circa la stessa potenza.

che invece da un'indicazione di quanto il segnale stesso abbia memoria di se stesso, ovvero di quanto l'evoluzione temporale sia frutto di una correlazione con gli istanti precedenti e successivi al momento considerato, al variare del tempo  $\tau$ .

Osserviamo che la potenza del segnale (formula 183), ovvero il valore quadratico medio, si ottiene anche calcolandone l'autocorrelazione in  $\tau = 0$ , ovvero  $P = \overline{x^2} = R_{xx}(0)$ . In questo punto, inoltre, la funzione di autocorrelazione assume il valore **massimo**, che, solitamente, viene normalizzato ad 1.

In fig. 51 vengono riportati quattro esempi di funzioni di autocorrelazione, per quattro tipi di segnali. Notiamo che:

- nel caso A, la funzione di autocorrelazione di un segnale sinusoidale è sempre sinusoidale, con stesso periodo. L'ampiezza sarebbe costante se il segnale fosse definito su tutti i tempi;
- il caso B è quello di un segnale non periodico, ma abbastanza regolare: la funzione di autocorrelazione varia lentamente con il ritardo;
- nel caso C il segnale varia più velocemente nel tempo, senza periodicità, quindi la funzione di autocorrelazione varia rapidamente dal suo valore massimo;
- il caso D è quello del rumore casuale: il segnale varia molto rapidamente nel tempo e senza periodicità. L'autocorrelazione è quindi molto piccola ovunque, tranne per ritardo nullo, dove notiamo il picco normalizzato ad uno.

In generale, notiamo che più è rumoroso il segnale, più piccata risulta essere la funzione di autocorrelazione. Se invece il segnale è meno rumoroso, allora la funzione di autocorrelazione è più regolare, e varia più lentamente a partire dal suo massimo centrale.

Introduciamo ora la **trasformata di Fourier**. Per un segnale  $x(t)$ , possiamo scriverla come:

$$\hat{x}(f) \equiv \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (188)$$

Essa permette di descrivere il segnale nel dominio delle frequenze  $f$ . L'**antitrasformata di Fourier** è invece la trasformazione inversa, che permette di tornare nel dominio dei tempi:

$$\hat{x}^{-1}(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{i2\pi ft} df \quad (189)$$

Possiamo ora riscrivere la potenza del segnale  $x(t)$  (formula 183) usando la definizione di autocorrelazione (formula 187). Siccome inoltre  $x(t) = \hat{x}^{-1}(t)$ , ovvero l'antitrasformata della trasformata del segnale coincide col segnale stesso, avremo:

$$\begin{aligned}
P = R_{xx}(0) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \hat{x}^{-1}(t+0) dt \right] = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) e^{i2\pi f(t+0)} df \right] dt \right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{x}(f) \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{i2\pi f t} dt \right] df = \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \hat{x}(f) \hat{x}^*(f) \right] df = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\hat{x}(f)|^2}{T} \right] df
\end{aligned} \tag{190}$$

Per analogia con la relazione 185, l'integranda è proprio la densità spettrale di potenza (PSD), ovvero:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\hat{x}(f)|^2}{T} \tag{191}$$

Si può definire quindi la PSD come il modulo quadro della trasformata di Fourier del segnale normalizzato al periodo di definizione  $T$ , con  $T$  che tende all'infinito.

Si può dimostrare che la densità spettrale di potenza è anche uguale alla trasformata di Fourier della funzione di autocorrelazione.

Riassumendo, per un segnale ergodico, possiamo scrivere la densità spettrale di potenza come:

$$S_x(f) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{|\hat{x}(f)|^2}{T} = \hat{R}_{xx}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_{xx}(\tau) e^{-i2\pi f \tau} d\tau \tag{192}$$

Ci poniamo ora il problema di trovare una maniera di esaltare il segnale rispetto al rumore, ovvero di sopprimere i contributi alla risposta del nostro dispositivo caratterizzati da certe frequenze. Questo equivale a **filtrare** il segnale per togliere la componente di rumore nel dominio delle frequenze. Per caratterizzare un **filtro lineare** nel dominio dei tempi, lo si fa agire su un segnale impulsivo, ovvero a delta di Dirac, poiché si tratta di quella funzione la cui trasformata di Fourier contiene tutte le frequenze. In tal modo otteniamo la **funzione di risposta all'impulso**  $h(t)$ .

Quando filtriamo un segnale  $x(t)$  in ingresso, otteniamo un altro segnale  $y(t)$  in uscita, che è dato dal prodotto di **convoluzione temporale** fra  $x(t)$  e la risposta impulsiva  $h(t)$  del filtro, esplicitamente:

$$y(t) = x(t) * h(t) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau) h(\tau) d\tau \tag{193}$$

Il **teorema di convoluzione** ci dice che la trasformata di Fourier del prodotto di convoluzione di due funzioni del tempo si fattorizza nel prodotto delle trasformate di Fourier delle due funzioni, ossia:

$$\mathcal{F}[x * h](f) = \hat{x}(f) \hat{h}(f) \tag{194}$$

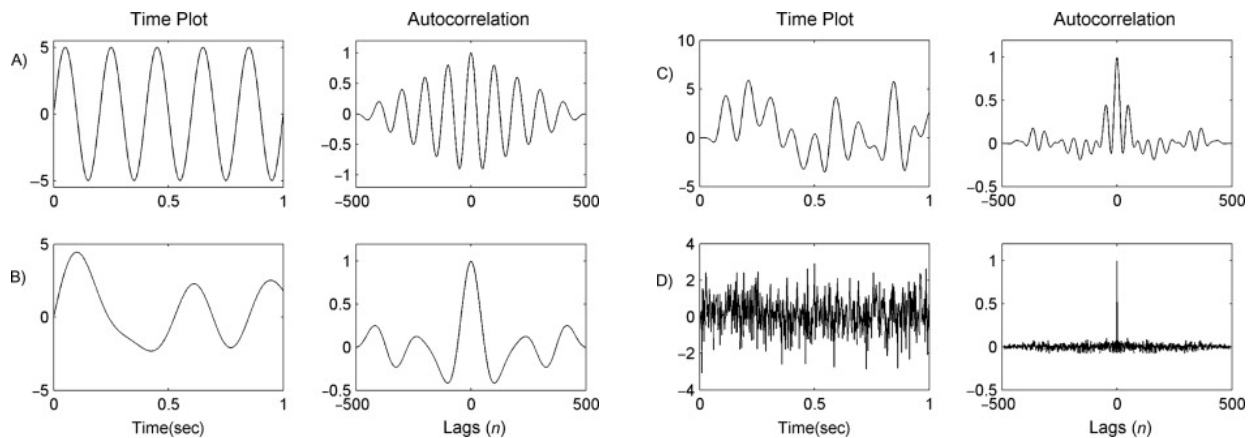


Figura 51: Esempi di funzioni di autocorrelazione per alcuni tipi di segnale. Per ogni esempio viene riportato sia il grafico del segnale in funzione del tempo, sia quello della funzione di autocorrelazione, con ritardo espresso in unità arbitrarie. Notare che i segnali sono definiti in un intervallo temporale limitato, quindi la funzione di autocorrelazione si annulla agli estremi (abbiamo sovrapposizione nulla per ritardi  $\tau$  superiori all'intervallo di definizione del segnale).

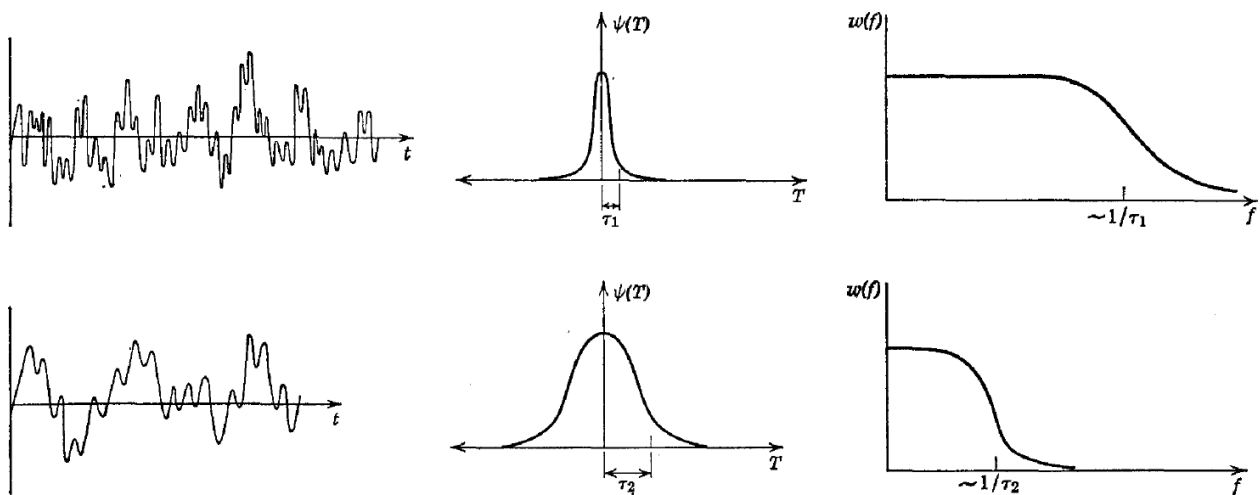


Figura 52: Confronto fra due segnali: uno più rumoroso (in alto) ed uno più pulito (in basso). Da sinistra a destra, vengono riportati rispettivamente il grafico del segnale in funzione del tempo, quello della funzione di autocorrelazione e quello della densità spettrale di potenza (PSD).

in cui indichiamo l'operazione di trasformazione di Fourier indifferentemente sia con il simbolo di cappuccio ( $\hat{\cdot}$ ), che con la lettera  $\mathcal{F}$ .

Diamone una giustificazione:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x * h](f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau \right] e^{-i2\pi ft} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t - \tau)e^{-i2\pi ft} dt \right] d\tau\end{aligned}\quad (195)$$

Chiamando ora  $t' = t - \tau$ , avremo che  $t = t' + \tau$ , ed anche  $dt' = dt$ , otteniamo la fattorizzazione cercata:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[x * h](f) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t')e^{-i2\pi f(t'+\tau)} dt' \right] d\tau = \\ &= \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-i2\pi f\tau} d\tau \right]}_{=\hat{x}(f)} \underbrace{\left[ \int_{-\infty}^{+\infty} h(t')e^{-i2\pi ft'} dt' \right]}_{=\hat{h}(f)}\end{aligned}\quad (196)$$

Vogliamo quindi scrivere la funzione di autocorrelazione  $R_{yy}(\tau)$  del segnale filtrato in uscita  $y(t)$ . Preliminarmente calcoliamo il valore di aspettazione di suddetto segnale, definito nella relazione 193, da cui:

$$\begin{aligned}E[y(t)] &= E \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} x(t - \tau)h(\tau)d\tau \right] = \int_{-\infty}^{+\infty} E[x(t - \tau)]h(\tau)d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_x h(\tau)d\tau = \mu_x \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)d\tau = \mu_y\end{aligned}\quad (197)$$

In cui abbiamo considerato che il segnale  $x(t)$  ha valore di aspettazione costante nel tempo. Rimane solo l'integrazione temporale della risposta impulsiva del filtro, anch'essa costante. In altre parole, il valor medio del segnale in uscita è proporzionale a quello del segnale in ingresso.

Calcoliamo la cross-correlazione tra il segnale in uscita e quello in ingresso:

$$\begin{aligned}R_{yx}(\tau) &= E[y(t + \tau)x(t)] = E \left[ \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')x(t + \tau - \tau')d\tau' \right\} x(t) \right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')E[x(t + \tau - \tau')x(t)]d\tau'\end{aligned}\quad (198)$$

Dal momento che il segnale  $x(t)$  è stazionario (i.e. ha proprietà medie che rimangono costanti nel tempo) avremo che  $E[x(t + \tau - \tau')x(t)] = R_{xx}(\tau - \tau')$ , quindi:

$$R_{yx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')R_{xx}(\tau - \tau')d\tau' = h(\tau) * R_{xx}(\tau)\quad (199)$$

Osserviamo anche che la funzione di cross-correlazione gode della seguente proprietà:

$$R_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y(t+\tau)dt = \int_{-\infty}^{+\infty} y(t')x(t'-\tau)dt' = R_{yx}(-\tau) \quad (200)$$

in cui abbiamo considerato il cambio di variabile:  $t' = t + \tau$ , da cui  $t = t' - \tau$ , con  $dt = dt'$ . Nel nostro caso, applicandola alla relazione 199, ricaviamo la cross-correlazione fra segnale in ingresso e quello in uscita:

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau) = h(-\tau) * R_{xx}(-\tau) = h(-\tau) * R_{xx}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(-\tau) \quad (201)$$

in cui nel penultimo passaggio abbiamo tenuto conto della proprietà di simmetria della funzione di autocorrelazione  $R_{xx}(-\tau) = R_{xx}(\tau)$ , mentre nell'ultimo abbiamo considerato che il prodotto di convoluzione è commutativo.

Possiamo quindi calcolare la funzione di autocorrelazione del segnale in uscita:

$$\begin{aligned} R_{yy}(\tau) &= E[y(t+\tau)y(t)] = E\left[\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')x(t+\tau-\tau')d\tau'\right\}y(t)\right] = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')E[x(t+\tau-\tau')y(t)]d\tau' = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau')R_{xy}(\tau-\tau')d\tau' = \\ &= h(\tau) * R_{xy}(\tau) \end{aligned} \quad (202)$$

Applicando la relazione 201, otteniamo infine:

$$R_{yy}(\tau) = R_{xx}(\tau) * h(\tau) * h(-\tau) \quad (203)$$

Consideriamone ora la trasformata di Fourier, passando dunque al dominio delle frequenze. Per quanto visto nella formula 192, otteniamo la densità spettrale di potenza (PSD) del segnale in uscita  $S_y(f)$ :

$$S_y(f) = \hat{R}_{yy}(f) = \hat{R}_{xx}(f) * \hat{h}(f) * \hat{h}^*(f) = \hat{R}_{xx}(f)|\hat{h}(f)|^2 = S_x(f)|\hat{h}(f)|^2 \quad (204)$$

in cui abbiamo considerato che, siccome  $h(\tau)$  è una funzione reale (i.e.  $h^*(\tau) = h(\tau)$ ), allora la trasformata di  $h(-\tau)$  è  $\mathcal{F}[h(-\tau)](f) = \{\mathcal{F}[h(\tau)](f)\}^* = \hat{h}^*(f)$ . Osserviamo che nello spazio delle frequenze, la presenza dei prodotti al posto delle convoluzioni, semplifica notevolmente la trattazione del problema.

La densità spettrale di potenza (PSD) del segnale in uscita  $S_y(f)$  è dunque uguale alla densità spettrale di potenza (PSD) del segnale originale  $S_x(f)$  moltiplicata per il modulo quadro della trasformata di Fourier della funzione di filtro.

Possiamo definire la **larghezza di banda equivalente al rumore** (ENBW, *Equivalent Noise BandWidth*) come:

$$\text{ENBW} \equiv \frac{1}{S_{MAX}} \int_{-\infty}^{+\infty} S(f)df \quad (205)$$

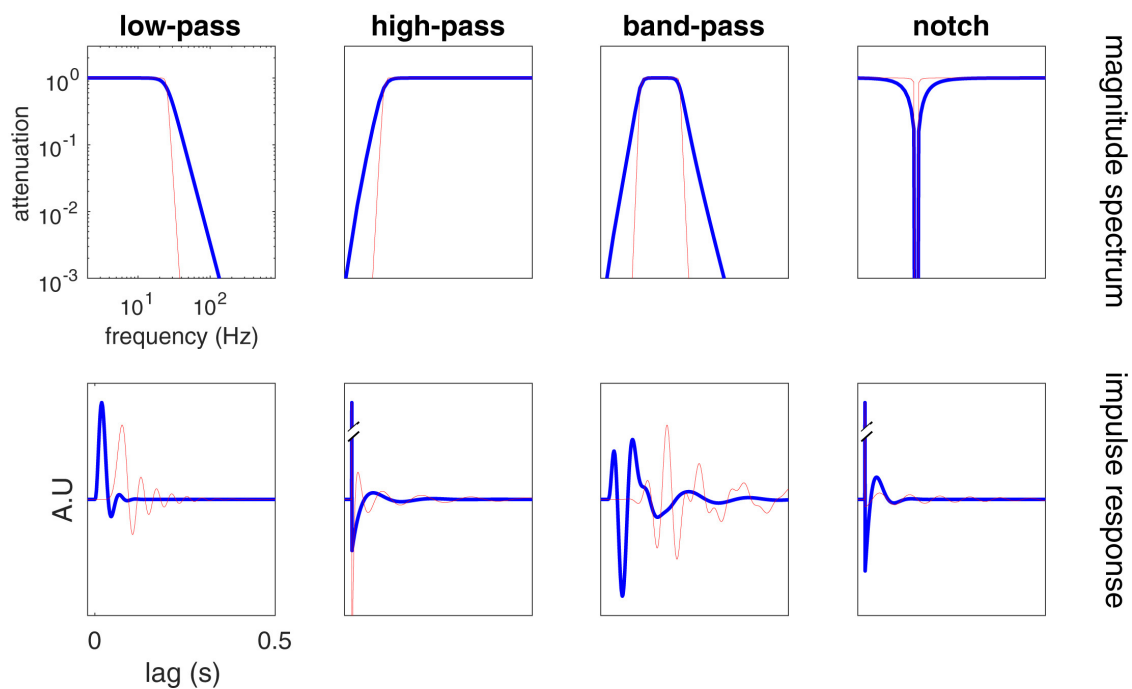


Figura 53: Esempi di filtri. Nei grafici in alto viene riportata l'attenuazione (i.e. la frazione dello spettro di potenza che viene fatta passare) in funzione della frequenza, mentre in quelli in basso viene riportata la funzione di risposta all'impulso, in funzione del ritardo. Notiamo che più il filtro è *smooth* nel dominio delle frequenze (grafici in linea blu, spessa), minore è durata della risposta impulsiva, viceversa (grafici in linea rossa, sottile) accade il contrario.

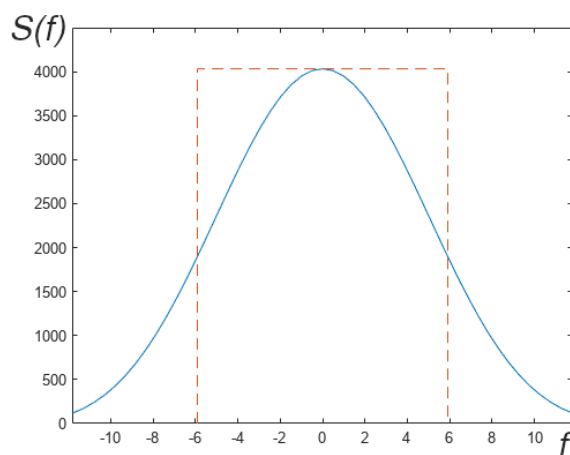


Figura 54: Larghezza di banda equivalente al rumore con spettro gaussiano. L'area rettangolare tratteggiata è equivalente a quella sottesa allo spettro del rumore (linea piena).



Ovvero l'intervallo di frequenze che si avrebbe se la densità spettrale di potenza (PSD) del rumore fosse costante, pari al valore massimo di suddetto spettro, a parità di potenza totale del rumore. Un esempio di ciò è riportato nel grafico di fig. 54.

Se abbiamo **due sorgenti di rumore**  $x_1(t)$  ed  $x_2(t)$ , definiamo il rumore totale come:

$$y(t) = x_1(t) + x_2(t) \quad (206)$$

la cui potenza (come definita in formula 183) è:

$$\begin{aligned} P = \overline{y^2} &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} [x_1(t) + x_2(t)]^2 dt = \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \left\{ \left[ \int_{-T/2}^{T/2} x_1^2(t) dt \right] + \left[ \int_{-T/2}^{T/2} x_2^2(t) dt \right] + \left[ \int_{-T/2}^{T/2} 2x_1(t)x_2(t) dt \right] \right\} = \\ &= \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2} + 2\overline{x_1x_2} \end{aligned} \quad (207)$$

dove il termine misto  $\overline{x_1x_2}$  tiene conto della **correlazione fra i due rumori**, ed è nullo quando essi sono fra loro scorrelati e massimo quando sono completamente correlati.

Ad esempio, come vediamo nello schema a sinistra di fig. 55, se consideriamo due resistenze in parallelo nel medesimo circuito, entrambe sorgenti di rumore termico ma non correlato, avremo che  $\overline{y^2} = \overline{x_1^2} + \overline{x_2^2}$ .

Consideriamo invece un circuito con una sola resistenza a valle della quale esso si suddivide in due rami, come nello schema a sinistra di fig. 55. In questo caso, la correlazione fra i due segnali in uscita  $x_1$  ed  $x_2$  è totale. Chiaramente questi due segnali sono identici, per cui  $x_1 = x_2 = x$ , e la potenza del segnale complessivo  $y = x_1 + x_2$  sarà:

$$\overline{y^2} = \overline{(x_1 + x_2)^2} = \overline{(2x)^2} = 4 \overline{x^2} \quad (208)$$

$(0,0)$  node[ocirc] -  $(2,0)$ ;  $(2,0) - (2, 1)$  to[R= $R_1$ ]  $(4, 1)$  node[ocirc, right, right]  $x_1(t)$ ;  $(2,0) - (2,-1)$  to[R= $R_2$ ]  $(4,-1)$  node[ocirc, right, right]  $x_2(t)$ ;  $(8,0)$  to[R= $R$ , o-]  $(10,0)$ ;  $(10,0) - (10, 1) - (12, 1)$  node[ocirc, right, right]  $x_1(t)$ ;  $(10,0) - (10,-1) - (12,-1)$  node[ocirc, right, right]  $x_2(t)$ ;

Figura 55: Esempi di circuiti con rumore termico prodotto da resistenze.

## 12 Contributi alla potenza di rumore

La trattazione che abbiamo visto la scorsa lezione riguardava la potenza del segnale, che però non coincide con la sua **potenza fisica** (come da confronto fra le relazioni 183 e 182). A seconda del tipo di segnale con cui stiamo operando, in tensione oppure in corrente, possiamo sostituire la densità spettrale di potenza (non fisica) del rumore (da cui il pedice  $n$ , per *noise*), con quella **in tensione** oppure **in corrente**, ovvero:

$$\frac{dP}{df} \quad \mapsto \quad \frac{1}{R} \frac{dv_n^2}{df} \quad \text{oppure} \quad R \frac{di_n^2}{df} \quad (209)$$

Abbiamo visto che esistono tre principali categorie di rumore elettronico: quello **termico** (bianco), quello **shot**, e quello **dipendente dalla frequenza** (rosa). Esistono anche altre sottocategorie di rumore che possono comunque essere ricondotte alle tre succitate. Ci preoccupiamo ora di ricavarne le rispettive densità spettrali in frequenza.

Vediamo il **rumore termico** generato da una resistenza in serie nel circuito. Possiamo schematizzarla con il circuito equivalente rappresentato nell'area tratteggiata in fig. 56. Consideriamo che essa emetta energia irradiando fotoni come un corpo nero. La densità spettrale di potenza irradiata si ottiene dalla statistica di Bose-Einstein:

$$\frac{dP}{df} = \frac{hf}{e^{hf/kT} - 1} \quad (210)$$

Per frequenze basse, avendo  $hf \ll kT$ , possiamo approssimare l'esponenziale con i primi due termini dello sviluppo in serie, da cui:

$$\frac{dP}{df} \simeq \frac{hf}{\left(1 + \frac{hf}{kT}\right) - 1} = kT \quad (211)$$

Vediamo dunque che in tale regime la densità spettrale non dipende dalla frequenza. Per cui, conoscendo la banda di frequenze  $\Delta f$  del rumore, ne ricaviamo la sua potenza (ovvero quella in uscita dal sistema del "blocco tratteggiato" nello schema in fig. 56), che possiamo esprimere come:

$$P = kT \Delta f \quad (212)$$

Questa viene dissipata nella resistenza di carico  $R_L$ , quindi:

$$\frac{v_{nL}^2}{R_L} = i_n^2 R_L = \frac{v_n^2 R_L}{(R + R_L)^2} \quad (213)$$

dove abbiamo considerato che la corrente  $i_n$  è la stessa in tutto il circuito, ed applicando la legge di Ohm l'abbiamo riscritta come  $i_n = v_n/(R + R_L)$ . Notiamo che il massimo della potenza dissipata si ha per  $R = R_L$ , per cui l'equazione precedente diventa:

$$v_{nL}^2 = v_n^2 \left( \frac{R_L}{R + R_L} \right)^2 = v_n^2 \left( \frac{1}{2} \right)^2 = \frac{v_n^2}{4} \quad (214)$$

Dividendo tale relazione per  $R$ , otteniamo la potenza dissipata sulla resistenza di carico ( $R_L$ ), che dev'essere uguale a quella trasportata dal rumore ( $P$ ). Otteniamo dunque:

$$\frac{v_{nL}^2}{R} = \frac{v_n^2}{4R} = kT\Delta f \quad (215)$$

Moltiplicando tale relazione per il fattore 4, ricaviamo la potenza del rumore termico generato dalla resistenza reale  $R$  (sempre scrivibile come  $P = v_n^2/R$ , ovvero quella in uscita dal sistema del "blocco tratteggiato" in fig. 56):

$$P = \frac{v_n^2}{R} = 4kT\Delta f \quad (216)$$

Gli spettri in frequenza, in termini di potenza, tensione e corrente, del rumore termico, sono rispettivamente:

$$\frac{dP}{df} = 4kT \quad , \quad \frac{dv_n^2}{df} = 4kTR \quad , \quad \frac{di_n^2}{df} = \frac{4kT}{R} \quad (217)$$

Notiamo che, secondo questa trattazione, la potenza cresce linearmente con l'ampiezza della banda di frequenza, per cui diverge se consideriamo tutte le frequenze. In realtà ciò non accade, ed il modello di corpo nero utilizzato per descrivere la resistenza dev'essere modificato, introducendo termini correttivi che mandano a zero la densità spettrale di potenza alle alte frequenze, garantendo la convergenza della potenza integrata. Nei circuiti reali, inoltre, lo spettro in frequenza del rumore è comunque limitato, per cui il risultato ricavato rimane ugualmente valido in prima approssimazione.

Vediamo ora il **rumore shot**. Esso è dovuto alla fluttuazione del numero di portatori di carica che compongono il segnale. Consideriamo un condensatore vuoto, alimentato con una tensione costante, tale da riuscire ad estrarre elettroni dal catodo. Questi poi derivano lungo il campo, verso l'anodo, dando luogo ad una corrente elettrica. Ogni ionizzazione avviene in modo casuale e scorrelato dalle altre, seguendo la statistica di Poisson, e produce un segnale impulsivo di una durata caratteristica  $t$ . Questo impulso può essere rappresentato come una delta di Dirac, se osservato su tempi  $T \gg t$ , ovvero, in termini di frequenza ( $f = 1/T$ ), per  $f \ll 1/t$ . Passando dal dominio dei tempi a quello delle frequenze, osserviamo che la trasformata di Fourier della delta è costante. Ciò significa che la delta possiede tutte le frequenze, distribuite in modo uniforme, ha cioè uno spettro "bianco".

Quindi un singolo elettrone, di carica  $q$ , produce un segnale impulsivo, a delta di Dirac ( $i_{n1}$ ), con densità spettrale:

$$\frac{di_{n1}}{df} = 2q \quad (218)$$

Considerando una banda infinitesimale di frequenze, ogni componente spettrale è una sinusoide pura. Dividendola per la radice del suo valore quadratico medio, che, per una sinusoide, è uguale a  $\sqrt{2}$ , ridefiniamo la densità spettrale in frequenza come:

$$j_{n1} \equiv \frac{di_{n1}}{df} = \frac{2q}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} q \quad (219)$$

Se  $N$  elettroni vengono emessi con lo stesso rateo temporale medio, ma ad istanti diversi, avranno la stessa distribuzione spettrale, ma con fasi diverse. Ad esempio, con due correnti

(intese come densità spettrali in frequenza)  $j_a$  e  $j_b$  che hanno una differenza relativa di fase  $\varphi$  fra loro, il valore quadratico medio della corrente risultante  $j$  è:

$$\overline{j^2} = (j_a + j_b e^{i\varphi})(j_a + j_b e^{-i\varphi}) = j_a^2 + j_b^2 + 2j_a j_b \cos(\varphi) \quad (220)$$

Se lo sfasamento  $\varphi$  è casuale, il valore medio di  $\cos(\varphi)$  è nullo, quindi le componenti spettrali si sommano semplicemente in quadratura:

$$\overline{j^2} = j_p^2 + j_q^2 \quad (221)$$

Ora consideriamo sempre  $N$  elettroni, ma stavolta emessi in modo casuale nell'unità di tempo. Le componenti spettrali dovute al contributo di ciascun elettrone, sono tutte uguali e date dalla relazione 219. Esse, come appena visto, si sommano in quadratura, per cui avremo:

$$j_n^2 = N j_{n1}^2 = N(\sqrt{2}q)^2 = 2Nq^2 \quad (222)$$

Ricordando che  $j_n^2 = di_n^2/df$ , ed identificando la corrente media  $I = Nq$ , abbiamo infine:

$$\frac{di_n^2}{df} = 2Iq \quad (223)$$

Osserviamo che il rumore *shot* diventa rilevante alle alte frequenze. In questo regime, infatti, il tempo di osservazione  $T$  diventa tanto piccolo da essere confrontabile con il tempo caratteristico  $t$  della singola ionizzazione, ovvero  $T \sim t$ . Equivalentemente, stiamo dicendo che la frequenza aumenta, ovvero  $f = T^{-1} \sim 1/t$ . In questo modo aumenta anche la risoluzione temporale sui singoli impulsi dovuti al passaggio di ciascun elettrone, e l'effetto di "granularità" aumenta.

Vediamo ora il **rumore alle basse frequenze**. Esso è causato dal fenomeno del *trapping* (descritto all'inizio della lezione 8), in presenza del quale, ricordiamo, la carica che si muove nel mezzo per deriva (i.e. a velocità costante), si riduce, dopo un tempo  $t$ , ad un fattore  $e^{-t/\tau}$ , ove  $\tau$  è il parametro di vita media del portatore.

Quando la vita media assume un unico valore, la densità spettrale del rumore è costante alle basse frequenze, per poi decadere come  $1/f^2$ . Nelle situazioni reali, però, la vita media assume molteplici valori. La densità spettrale complessiva si ottiene sommando le singole densità spettrali su tutti i diversi valori di vita media. Come visibile nel grafico in fig. 57, già con soli tre valori diversi di vita media, lo spettro del rumore complessivo assume un andamento che decade verosimilmente come  $1/f$ . Possiamo scrivere dunque:

$$S(f) = \frac{k}{f} \quad (224)$$

Chiaramente, anche la densità spettrale della tensione del rumore avrà lo stesso andamento:

$$\frac{dv_n^2}{df} = \frac{A}{f} \quad (225)$$

che, integrata sullo spettro delle frequenze ci da:

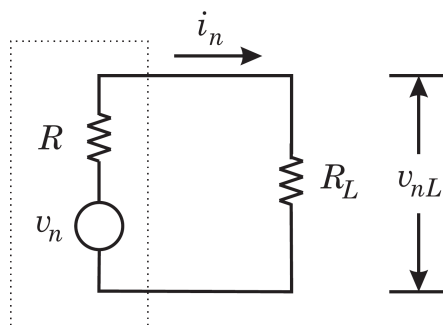


Figura 56: Circuito equivalente per valutare il rumore termico generato da una resistenza reale, rappresentata nel blocco tratteggiato. Essa è idealmente schematizzata in una resistenza  $R$  ideale, in serie con il generatore della tensione  $v_n$  di rumore. La corrente  $i_n$  circolante, viene dissipata sulla resistenza di carico  $R_L$ , ai capi della quale la caduta di potenziale è  $v_{nL}$ .

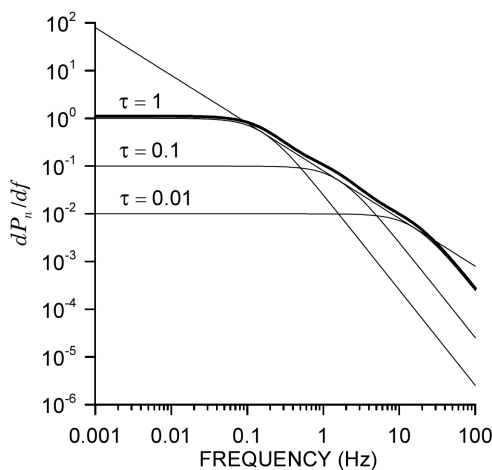


Figura 57: Intrappolamento con tre vite medie distinte, per ciascuna delle quali è riportata (linea sottile) la densità spettrale di rumore, che decade come  $1/f^2$ . Quella del rumore complessivo (linea grossa), è data dalla somma delle prime tre, e decade, in prima approssimazione, come  $1/f$ . Viene riportato, per confronto anche quest'ultimo andamento.

$$v_n^2 = \int_{f_1}^{f_2} \frac{A}{f} df = A \ln \left( \frac{f_2}{f_1} \right) \quad (226)$$

Notiamo che tale andamento è ideale: sperimentalmente osserviamo uno spettro che decade come  $1/f^\alpha$ , con  $\alpha$  compreso fra 0.5 e 2.

### 13 Amplificatori e filtri

Discutiamo ora nel dettaglio gli **amplificatori**. A seconda di come stiamo leggendo il segnale, in tensione oppure in corrente, possiamo scegliere il circuito più adatto per amplificare l'una o l'altra grandezza, come rappresentato negli schemi di fig. 58.

Vediamo come amplificare la **tensione**. Nel circuito a sinistra in fig. 58, il generatore di tensione reale è composto da uno ideale, che produce una tensione  $v_S$ , messo in serie con la resistenza interna  $R_S$ . Anche l'amplificatore presenta una sua resistenza interna  $R_i$ . Per prima cosa vogliamo ricavare la tensione  $v_i$  che arriva all'amplificatore, in funzione di  $v_S$ . Utilizziamo le leggi di Kirchhoff, considerando che la corrente  $i$  è uguale su tutto il circuito a monte dell'amplificatore, che non presenta nodi. Dalla legge di Ohm, la tensione in ingresso all'amplificatore può essere espressa come:

$$v_i = iR_i \quad (227)$$

La tensione in uscita dal generatore (ideale) è pari alla somma delle cadute di potenziale sulle altre resistenze, ovvero:

$$v_S = iR_i + iR_S = i(R_i + R_S) \quad (228)$$

Dividendo la prima equazione per la seconda, si elimina la corrente  $i$ , ottenendo la frazione di tensione del generatore che arriva in ingresso all'amplificatore:

$$\frac{v_i}{v_S} = \frac{R_i}{R_i + R_S} \quad (229)$$

Osserviamo che, per avere  $v_i = v_S$ , bisogna che sia  $R_i \gg R_S$ , ovvero un amplificatore di tensione ideale ha resistenza interna  $R_i \rightarrow \infty$ . Nei casi reali abbiamo però più amplificatori a cascata, in cui la resistenza interna di un amplificatore gioca il ruolo di resistenza interna della sorgente nello stadio successivo. Ciò richiederebbe dunque valori di resistenze interne degli amplificatori via via ancora più grandi, in pratica, non realizzabili.

Vediamo ora come amplificare la **corrente**. Un generatore reale di corrente può essere schematizzato con un generatore ideale che produce una corrente  $i_S$  messo in parallelo con una resistenza  $R_S$ . Ai suoi capi viene collegato l'amplificatore, a formare un circuito come quello a destra in fig. 58. Anche in questo caso, vogliamo ricavare la corrente  $i_i$  in ingresso all'amplificatore, in funzione di  $i_S$ . Chiamando  $i_R$  la corrente che passa nel ramo della resistenza interna del generatore ( $R_S$ ), la legge dei nodi di Kirchhoff, ci permette di scrivere:

$$i_S = i_R + i_i \quad (230)$$

Mentre per le cadute di tensione sulla maglia più a destra, abbiamo:

$$i_R R_S = i_i R_i \quad \Longrightarrow \quad i_R = i_i \frac{R_i}{R_S} \quad (231)$$

Sostituendo questo risultato nell'equazione precedente, otteniamo:

$$i_S = i_i \frac{R_i}{R_S} + i_i = i_i \left( \frac{R_i}{R_S} + 1 \right) = i_i \left( \frac{R_i + R_S}{R_S} \right) \quad (232)$$

Quindi la frazione di corrente del generatore che arriva in ingresso all'amplificatore è:

$$\frac{i_i}{i_S} = \frac{R_S}{R_i + R_S} \quad (233)$$

Contrariamente al caso precedente, per ottenere  $i_i = i_S$ , dovremo avere  $R_S \gg R_i$ , ovvero un amplificatore di corrente ideale richiede un generatore con resistenza interna  $R_S \rightarrow \infty$ .

Quindi un amplificatore, per poter essere usato in modalità di tensione richiederà una resistenza interna grande, viceversa per essere usato nella modalità di corrente, richiederà una resistenza piccola (dove grande e piccolo è sempre inteso in senso relativo, rispetto alla resistenza interna della sorgente).

I sensori di nostro interesse si comportano come **sorgenti capacitiv**e. Il circuito in cui vengono inseriti è rappresentato in fig. 59. Un sensore viene idealmente schematizzato come un generatore di corrente  $i_s$  di segnale, in parallelo con una capacità  $C_d$ . Il rilascio di una carica  $Q_s$  nel sensore produce una corrente impulsiva  $i_s$  che dura per tutto il tempo di raccolta della carica  $t_c$ :

$$Q_s = \int_0^{t_c} i_s(t) dt = i_s t_c \quad (234)$$

Se  $v_i$  è la tensione in ingresso all'amplificatore, possiamo scrivere la tensione in uscita come  $v_o = A_v v_i$ , dove  $A_v$  è il **fattore di guadagno in tensione**. Confrontando il tempo di raccolta  $t_c$  con il tempo caratteristico  $R_i C_d$  del circuito a monte dell'amplificatore, questo opererà in modalità di corrente oppure di tensione. Nello specifico:

- per  $R_i C_d \ll t_c$ , la capacità del sensore si scarica rapidamente (rispetto al tempo di raccolta). In questo caso, la corrente in ingresso all'amplificatore sarà quasi uguale a quella che esce dal sensore, ossia  $i_i \simeq i_s$ . In uscita dall'amplificatore otterremo un segnale in tensione che segue, istante per istante, l'andamento della corrente in ingresso:  $v_o(t) \propto i_s(t)$ . In tale regime, il sistema complessivo sensore-amplificatore, opera in **modalità di corrente**;
- per  $R_i C_d \gg t_c$ , la capacità del sensore si scarica molto lentamente (rispetto al tempo di raccolta). La carica viene prima immagazzinata nella capacità, che raggiunge una tensione massima  $V_i = Q_s / C_d \propto \int_0^{t_c} i_s(t) dt$ , dopo il tempo di raccolta  $t_c$ . Successivamente, il condensatore si scarica sulla resistenza: la tensione ai capi di quest'ultima (i.e. in ingresso all'amplificatore) è  $v_i(t) = V_i \exp(-t/R_i C_d)$ . In uscita dall'amplificatore otteniamo una tensione  $v_o(t) \propto v_i(t)$ . In questo regime, si perde informazione sulla corrente in uscita dal sensore, ed il sistema complessivo sensore-amplificatore opera in **modalità di tensione**.



In entrambi i casi, l'amplificatore apporta un fattore di **guadagno sempre in tensione**. La differenza fra i due regimi sta nel fatto che in ingresso all'amplificatore può arrivare un impulso in tensione che, o segue istantaneamente l'andamento della corrente (modalità di corrente), o segue il decadimento della carica totale, ottenuta per integrazione della corrente nel tempo di raccolta (modalità di tensione).

Inserendo una capacità  $C_f$  di *feedback* in parallelo con l'amplificatore, come nel circuito a sinistra in fig. 60, possiamo ottenere un **amplificatore di carica** (o *charge-sensitive amplifier*). L'amplificatore in questione ha resistenza interna  $R_i$  molto alta, idealmente infinita, ed è utilizzato come invertitore, ovvero con guadagno negativo:

$$\frac{dv_o}{dv_i} = -A \quad \Longrightarrow \quad v_o = -Av_i \quad (235)$$

La tensione ai capi della capacità di *feedback* sarà  $v_f = v_i(A + 1)$ , con una carica immagazzinata di  $Q_f = C_f v_f = C_f v_i(A + 1)$ . Dal momento che la resistenza  $R_i$  è grande, non vi è alcuna corrente che passa attraverso l'amplificatore, e tutta la carica iniziale  $Q_i$  viene immagazzinata nel condensatore, ovvero  $Q_f = Q_i$ . Da tali considerazioni, possiamo quindi scrivere:

$$\frac{Q_i}{v_i} = C_f(A + 1) \equiv C_i \quad (236)$$

dove  $C_i$  viene chiamata **capacità dinamica in ingresso**. Ci interessa calcolare il **fattore di amplificazione di carica**, ovvero quel valore della tensione in uscita che otteniamo per una carica unitaria in ingresso:

$$A_Q \equiv \frac{v_o}{Q_i} = \frac{Av_i}{C_i v_i} = \frac{A}{C_i} = \frac{A}{A + 1} \frac{1}{C_f} \quad (237)$$

Questo parametro ci da una misura di quanto ampio è il segnale in tensione che esce dall'amplificatore, a fronte di una determinata carica in ingresso. Osserviamo che esso dipende unicamente dal guadagno dell'amplificatore e dalla capacità di *feedback*. Inoltre, nel limite per  $A \gg 1$ , abbiamo che  $A_Q \sim 1/C_f$ , ovvero la dipendenza si limita alla sola capacità di *feedback*.

Valutiamo ora il rapporto fra la carica che viene effettivamente misurata ( $Q_i$ , che arriva in ingresso all'amplificatore) e quella di segnale ( $Q_s$ , rilasciata nel sensore):

$$\frac{Q_i}{Q_s} = \frac{Q_i}{Q_i + Q_d} = \frac{C_i}{C_i + C_d} = \frac{1}{1 + \frac{C_d}{C_i}} \quad (238)$$

Per avere  $Q_i \simeq Q_s$ , bisogna scegliere  $C_i \gg C_d$ , ovvero una capacità dinamica in ingresso all'amplificatore che sovrasti quella del sensore: ciò fa sì che la carica non rimanga nel sensore, ma migri verso l'amplificatore.

Per calibrare l'amplificatore (i.e. per conoscere il suo fattore di guadagno) si ricorre ad un circuito come quello riportato a destra in fig. 60, che implementa una **capacità di test**  $C_T$ . Si tratta di una componente normalmente già integrata nei sensori più recenti. Applicando una tensione costante  $\Delta V$  ai capi di  $C_T$ , stiamo introducendo nel circuito una quantità nota di carica, pari a  $C_T \Delta V$ . Questa non arriva tutta all'amplificatore: parte fluisce anche in

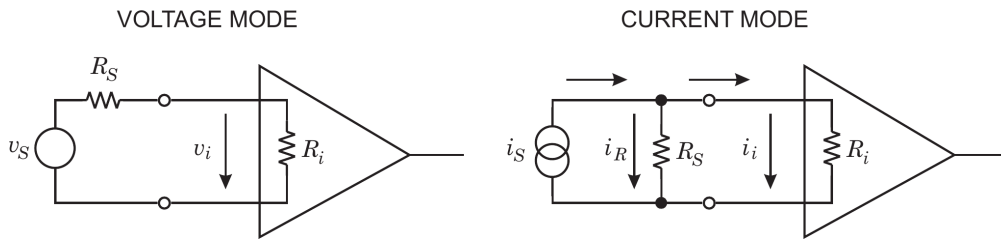


Figura 58: A seconda del circuito in cui è inserito, l'amplificatore può operare in tensione (a sinistra), oppure in corrente (a destra).

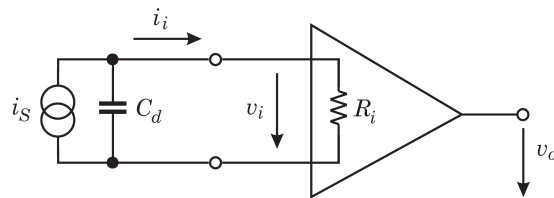


Figura 59: Circuito di amplificazione con una sorgente capacitiva, come un sensore.

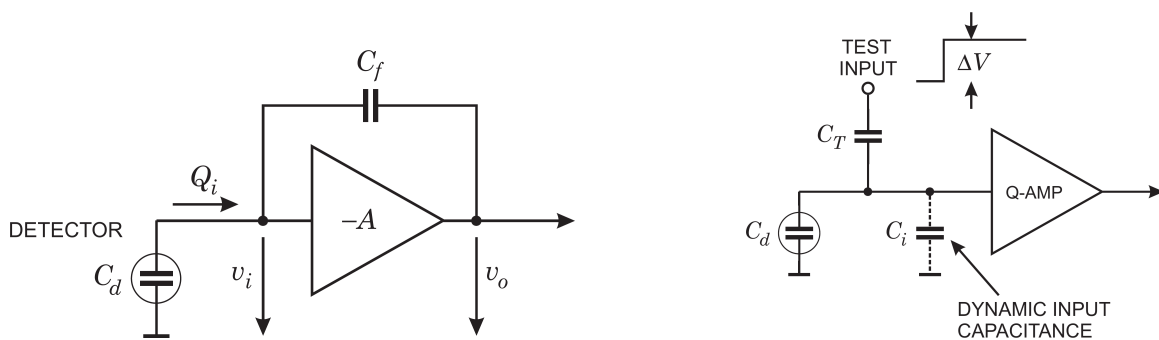


Figura 60: A sinistra: circuito di amplificazione con sorgente capacitiva (sensore) e capacità di *feedback*. A destra: circuito per effettuare la calibrazione dell'amplificatore. La capacità di test viene utilizzata per introdurre una quantità di carica nota nel circuito.

quella del sensore ( $C_d$ ). Calcoliamo dunque la capacità equivalente  $C_{eq}$  del circuito. Dallo schema, vediamo che  $C_T$  è in serie sia con  $C_d$ , che con  $C_i$ , le quali sono collegate in parallelo fra loro, quindi:

$$C_{eq} = \left[ \frac{1}{C_T} + \frac{1}{C_i + C_d} \right]^{-1} = \left[ \frac{1}{C_T} \left( 1 + \frac{C_T}{C_i + C_d} \right) \right]^{-1} = \frac{C_T}{1 + \frac{C_T}{C_i + C_d}} \quad (239)$$

Per massimizzare la frazione di carica introdotta che arriva all'amplificatore, bisogna scegliere una capacità di test con  $C_i \gg C_T$  (analogamente a quanto visto per la capacità del sensore, per la quale  $C_i \gg C_d$ ). In tal modo, il termine  $C_T/(C_i + C_d)$  è piccolo, e ricordando che  $1/(1+x) \sim (1-x)$  per  $x \rightarrow 0$ , possiamo approssimare il risultato precedente come:

$$C_{eq} \simeq C_T \left( 1 - \frac{C_T}{C_i + C_d} \right) \quad (240)$$

Quindi la carica di test  $Q_T$  che arriva all'amplificatore sarà:

$$Q_T = C_{eq} \Delta V = \frac{C_T}{1 + \frac{C_T}{C_i + C_d}} \Delta V \simeq C_T \left( 1 - \frac{C_T}{C_i + C_d} \right) \Delta V \quad (241)$$

Vogliamo quindi calcolare la tensione  $v_o$  in uscita dall'amplificatore, a fronte di una carica  $Q_i$  in ingresso. Come vediamo nel circuito in fig. 61, essa viene introdotta nel nodo fra le tre capacità. In questo caso,  $C_i$  rappresenta la capacità interna dell'amplificatore, e non quella dinamica in ingresso (i.e. non tiene conto della capacità di *feedback* e del fattore di guadagno negativo dell'amplificatore), mentre le altre due hanno sono le stesse di prima. La capacità equivalente vista dalla carica in ingresso è data dal parallelo delle tre, ovvero:  $C_{eq} = C_d + C_i + (A+1)C_f$ . Considerando il fattore di guadagno negativo  $-A$  dell'amplificatore, abbiamo:

$$v_o = -A \frac{Q_i}{C_{eq}} = \frac{-AQ_i}{C_d + C_i + (A+1)C_f} = -\frac{Q_i}{C_f + \frac{C_d + C_i + C_f}{A}} \quad (242)$$

Notiamo che, nel limite per  $A \gg 1$ , il secondo termine a denominatore si annulla, per cui:

$$v_o \simeq -\frac{Q_i}{C_f} \quad (243)$$

ovvero tutta la carica iniziale viene trasferita alla capacità di *feedback*, che dunque, in tale regime, controlla tutto il sistema.

Vogliamo ora analizzare le proprietà del **rumore all'amplificatore**. Per brevità, parleremo semplicemente di *rumore*, riferendoci alla sua densità spettrale. Useremo inoltre le seguenti notazioni per la densità spettrale in tensione e quella in corrente del rumore:

$$e_n^2 \equiv \frac{dv_n^2}{df} \quad \text{e} \quad i_n^2 \equiv \frac{di_n^2}{df} \quad (244)$$

Come visibile nel circuito a sinistra in fig. 62, abbiamo una sorgente di rumore in tensione  $e_n$  ed una in corrente  $i_n$  (quindi indicate attraverso le radici delle rispettive densità di potenza). Come unità di misura, nelle applicazioni di nostro interesse, avremo tipicamente:

$$[e_n] = \frac{\text{nV}}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad \text{e} \quad [i_n] = \frac{\text{fA}}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad \text{oppure} \quad \frac{\text{pA}}{\sqrt{\text{Hz}}} \quad (245)$$

Nel circuito a destra in fig. 62 abbiamo anche inserito una sorgente reale di segnale in tensione, scomposta in un generatore di tensione ideale, con la resistenza  $R_S$  inserita in serie, che è fonte di rumore termico, con spettro di potenza in tensione pari a  $4kTR_S$  (come calcolato nelle relazioni 217). Teniamo conto anche della resistenza interna dell'amplificatore  $R_i$ , il cui valore sarà molto grande, sebbene non infinito, come nel caso ideale. L'amplificazione viene effettuata in tensione, con un fattore di guadagno  $A_v$ . Con  $e_{no}$  chiamiamo il rumore in tensione all'uscita dell'amplificatore, che è proporzionale a tutto il rumore che esso riceve in ingresso. Partiamo dal circuito ancora privo della sorgente di segnale, ovvero come quello a sinistra in fig. 62. Se ipotizziamo di avere **resistenza interna infinita**,  $R_i = \infty$ , non avremo alcun rumore dovuto alla corrente, poiché stiamo inibendo il suo passaggio nell'amplificatore. Possiamo scrivere il rumore in uscita come:

$$e_{no} = e_n A_v \quad (246)$$

Inseriamo ora la sorgente, per ottenere la configurazione completa, come a destra in fig. 62. Vediamo che la sorgente di rumore in corrente,  $i_n$ , è collegata alla resistenza  $R_S$  interna alla sorgente, grazie alla quale produce un rumore in tensione, quantificabile come  $i_n R_S$ . Le diverse sorgenti di rumore non sono correlate fra loro, dunque il rumore totale è dato dalla loro somma in quadratura, ovvero:

$$e_{ni}^2 = 4kTR_S + e_n^2 + (i_n R_S)^2 \quad (247)$$

Applicando la relazione 246, il rumore in uscita dall'amplificatore sarà:

$$e_{no}^2 = A_v^2 e_{ni}^2 = A_v^2 [4kTR_S + e_n^2 + (i_n R_S)^2] \quad (248)$$

Introducendo ora il segnale  $v_S$  prodotto dalla sorgente, avremo in uscita dall'amplificatore un segnale in tensione  $S = A_v v_S$ , affetto da un rumore  $N = e_{no}$ . Quindi il rapporto segnale-rumore sarà:

$$\left(\frac{S}{N}\right)^2 = \frac{A_v^2 v_S^2}{A_v^2 [4kTR_S + e_n^2 + (i_n R_S)^2]} = \frac{v_S^2}{4kTR_S + e_n^2 + i_n^2 R_S^2} \quad (249)$$

In questo caso, sia il segnale che il rumore vengono amplificati per lo stesso fattore di guadagno, ciò fa sì che il rapporto segnale-rumore sia indipendente da tale fattore.

Nel caso reale, avremo una **resistenza interna finita**,  $R_i < \infty$ : vogliamo vedere se e come cambia il rapporto segnale-rumore. Per prima cosa calcoliamo il segnale in tensione  $v_{Si}$  in ingresso all'amplificatore (i.e. ai capi della sua resistenza interna), distinguendolo da  $v_S$ , ovvero il potenziale prodotto dal generatore ideale. Chiamando  $i_S$  la corrente che fluisce sulla maglia più esterna (i.e. togliendo il ramo con la sorgente  $i_n$  di rumore in corrente), avremo che  $v_{Si} = R_i i_S$ , ovvero  $i_S = v_{Si}/R_i$ . Bilanciamo dunque le cadute di potenziale sulla maglia, per ottenere  $v_{Si}$ :

$$0 = v_S - R_S i_S - v_{Si} = v_S - R_S \frac{v_{Si}}{R_i} - v_{Si} = v_S - v_{Si} \left(1 + \frac{R_S}{R_i}\right) = v_S - v_{Si} \frac{R_i + R_S}{R_i}$$

$$v_{Si} = v_S \frac{R_i}{R_i + R_S} \quad (250)$$

Rispetto al caso precedente, stiamo introducendo il fattore correttivo  $R_i/(R_i + R_S)$  che rimodula la tensione in ingresso all'amplificatore. Naturalmente, nel limite per  $R_i \rightarrow \infty$ , riotteniamo il caso di prima, con  $v_{Si} = v_S$ . Anche le due fonti di rumore in tensione subiscono tale trasformazione.

La sorgente di rumore in corrente,  $i_n$ , produce ora un passaggio di corrente sia nella resistenza interna della sorgente,  $R_S$ , ma anche in quella interna dell'amplificatore  $R_i$ . In tale configurazione, la resistenza equivalente, come vista dalla sorgente di rumore in corrente, è data dal parallelo delle due. Il rumore in tensione dovuto a tale sorgente si può scrivere come:

$$i_n \left( \frac{1}{R_i} + \frac{1}{R_S} \right)^{-1} = i_n \frac{R_i R_S}{R_i + R_S} \quad (251)$$

Per quanto detto, il rumore totale in ingresso all'amplificatore viene ad essere:

$$e_{ni}^2 = (4kTR_S + e_n^2) \left( \frac{R_i}{R_i + R_S} \right)^2 + i_n^2 \left( \frac{R_i R_S}{R_i + R_S} \right)^2 \quad (252)$$

Possiamo quindi ricalcolare il rapporto segnale-rumore in uscita dall'amplificatore:

$$\left( \frac{S}{N} \right)^2 = \frac{A_v^2 v_{Si}^2}{A_v^2 e_{ni}^2} = \frac{v_S^2 \left( \frac{R_i}{R_i + R_S} \right)^2}{(4kTR_S + e_n^2) \left( \frac{R_i}{R_i + R_S} \right)^2 + i_n^2 \left( \frac{R_i R_S}{R_i + R_S} \right)^2} = \frac{v_S^2}{(4kTR_S + e_n^2) + i_n^2 R_S^2} \quad (253)$$

Osserviamo subito che questo valore è identico a quello che avevamo calcolato per  $R_i = \infty$  (in formula 249). Quindi il rapporto segnale-rumore in uscita dall'amplificatore non dipende dalla sua resistenza interna, e la trattazione del rumore fatta nel caso ideale, resta valida anche in quello reale. Questo ragionamento si può estendere al caso più generico, che tiene conto dell'impedenza interna dell'amplificatore.

Nel caso in cui le sorgenti di rumore  $e_n$  ed  $i_n$  siano fra loro **correlate**, il rumore totale in tensione che entra nell'amplificatore (formula 247) viene riscritto come:

$$e_{ni}^2 = 4kTR_S + e_n^2 + (i_n R_S)^2 + 2C e_n i_n R_S \quad (254)$$

dove  $C$  è il coefficiente di correlazione tra le due fonti di rumore.

Ricordiamo che  $e_n^2 = e_n^2(f)$  è una densità spettrale in frequenza della potenza (non fisica) del rumore in tensione, come definita in formula 244. Pertanto se vogliamo calcolare la potenza totale del rumore in uscita dall'amplificatore, dobbiamo integrare  $e_{no}^2(f)$  sulle frequenze:

$$v_{no}^2 = \int_0^{+\infty} e_{no}^2(f) df = \int_0^{+\infty} e_{ni}^2(f) |A_v|^2 df \quad (255)$$

Il fattore di guadagno  $A_v$  dell'amplificatore ha un modulo ed una fase, in generale, dipendenti dalla frequenza, si tratta dunque di una quantità complessa, ed è dunque corretto considerarla con il suo modulo quadro  $|A_v|^2 = A_v^* A_v$ .

Gli amplificatori comunemente hanno uno spettro di rumore che decade come  $1/f$  (i.e. rosa) alle frequenze basse, mentre è costante (i.e. bianco) alle alte frequenze. Ricordiamo che:

- i rumori bianchi hanno densità spettrale di tensione che è costante in frequenza (come nel caso del rumore termico, in formula 217). Quindi la potenza totale, in tensione, è  $v_n^2 \propto f$ , ovvero  $v_n \propto \sqrt{f}$ ;
- i rumori rosa hanno densità spettrale di tensione che decade come  $1/f$ . Hanno una potenza totale, in tensione, che è quella calcolata in formula 226, ovvero  $v_n^2 = A_f \ln(f_{max}/f_{min})$ , che dunque dipende dal rapporto tra la frequenza massima  $f_{max}$  e quella minima  $f_{min}$  del loro spettro.

Lo spettro complessivo del rumore dovuto all'amplificatore è riportato in fig. 63. Il valore di frequenza  $f_c$  in cui le due componenti spettrali si equivalgono, è detto **frequenza di corner**. Per frequenze  $f > f_c$  domina il rumore bianco, mentre per  $f < f_c$  domina quello rosa.

Vediamo ora il **formatore** (o *shaper*). Nello schema di fig. 64, vediamo che dal sensore esce un segnale di durata molto breve. Esso arriva al preamplificatore, che produce un segnale in uscita a gradino, che decade in un tempi lunghi, a seconda della capacità di *feedback* utilizzata. Per tale ragione, il preamplificatore agisce da **integratore** della corrente in ingresso (idealmente, la funzione a gradino è l'integrale della delta di Dirac).

Vediamo preliminarmente i **filtri passa-alto** e **passa-basso**. Essi sono rappresentati nei circuiti in fig. 65. Dato un segnale in ingresso  $V_{in}$ , vogliamo vedere come cambia la quantità  $A_v(\omega) = V_{out}/V_{in}$ , detta funzione di trasferimento, al variare della frequenza  $\omega$  del segnale in ingresso.

In entrambi i circuiti, l'impedenza totale  $Z$  ai capi degli elettrodi del segnale in ingresso  $V_{in}$ , è data dal collegamento in serie della resistenza e del condensatore:

$$Z = R + \frac{1}{i\omega C} = R - \frac{i}{\omega C} = \frac{\omega RC - i}{\omega C} \quad (256)$$

Se preleviamo la tensione d'uscita  $V_{out}$  ai capi dell'elemento resistivo, come a sinistra fig. 65, otteniamo un filtro passa-alto. Avendo una tensione d'uscita pari a  $V_{out} = RI$ , la funzione di trasferimento viene ad essere:

$$A_v(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{R}{Z} = \frac{\omega RC}{\omega RC - i} = \frac{\omega\tau}{\omega\tau - i} \frac{\omega\tau + i}{\omega\tau + i} = \frac{(\omega\tau)^2}{(\omega\tau)^2 + 1} + i \frac{\omega\tau}{(\omega\tau)^2 + 1} \quad (257)$$

dove  $\tau = RC$  è il tempo caratteristico del circuito. Il suo modulo è:

$$|A_v(\omega)| = \sqrt{A_v^*(\omega)A_v(\omega)} = \sqrt{\frac{(\omega\tau)^4 + (\omega\tau)^2}{[(\omega\tau)^2 + 1]^2}} = \sqrt{\frac{(\omega\tau)^2[(\omega\tau)^2 + 1]}{[(\omega\tau)^2 + 1]^2}} = \frac{\omega\tau}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \quad (258)$$

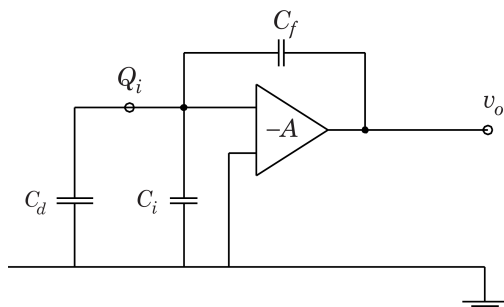


Figura 61: Circuito di amplificazione della carica.

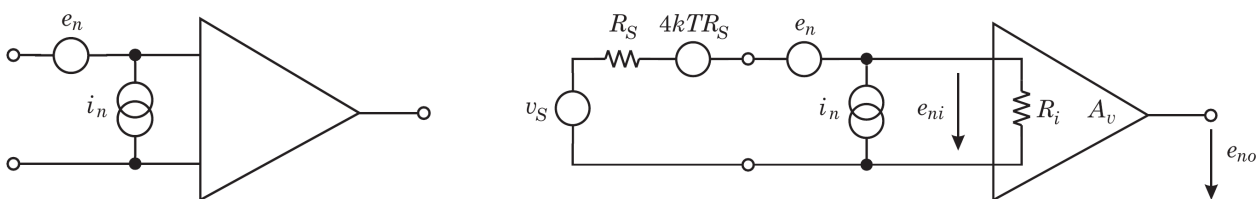


Figura 62: A sinistra: il rumore in ingresso all'amplificatore è determinato dai contributi in tensione ed in corrente, schematizzati dai due generatori, rispettivamente  $e_n$  ed  $i_n$ . A destra: allo stesso circuito viene aggiunta una sorgente di segnale  $v_S$ , con carico resistivo  $R_S$ , che, a sua volta, è fonte di rumore termico.

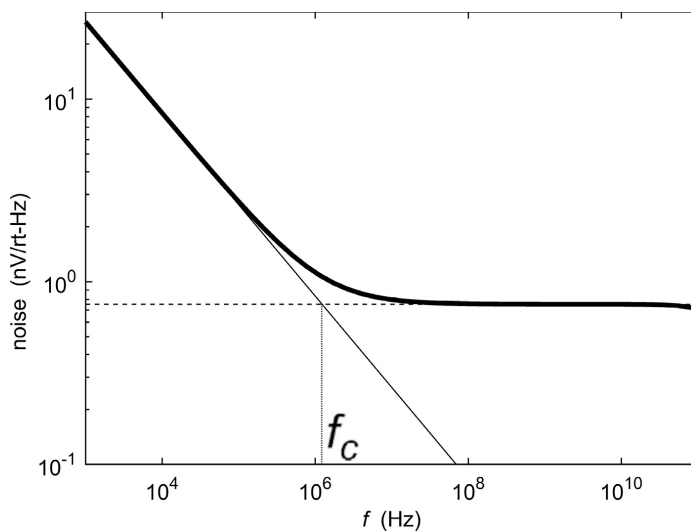


Figura 63: Spettro in frequenza del rumore in uscita dall'amplificatore, in scala doppiologaritmica. Sono riportate le due componenti, rosa e bianca, ed il rumore complessivo, nonché la frequenza  $f_c$  di *corner*.

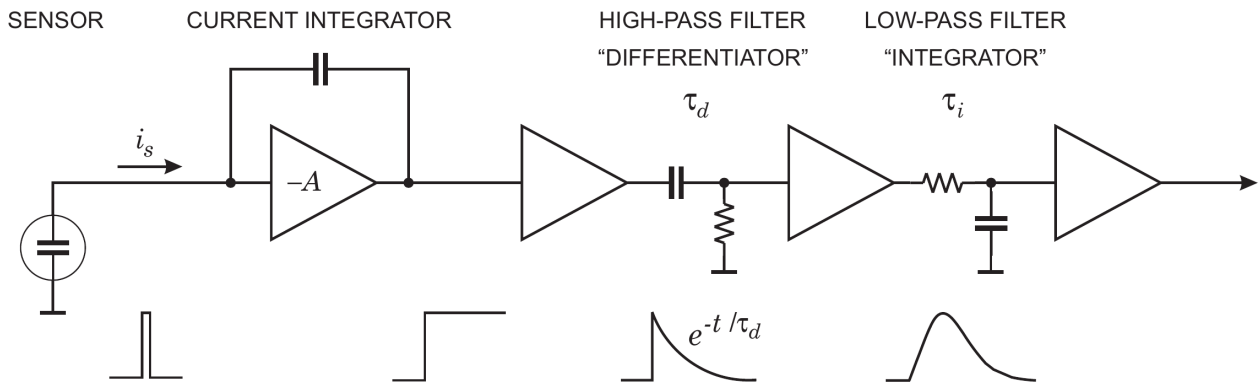


Figura 64: Circuito completo con sensore, preamplificatore e formatore. Vengono riportate le forme dei segnali in uscita da ciascuna componente.

[i-] (0,-0.15) – (0,-1.85); at (-0.5,-1)  $V_{in}$ ; (0,0) node[ocirc] to[C=C] (2,0); (2,0) to[R=R] (2,-2); (0,-2) node[ocirc] – (4,-2) node[ocirc]; (2,0) – (4,0) node[ocirc]; [i-] (4,-0.15) – (4,-1.85); at (4.5,-1)  $V_{out}$ ; [i-] (8,-0.15) – (8,-1.85); at (7.5,-1)  $V_{in}$ ; (8,0) node[ocirc] to[R=R] (10,0); (10,0) to[C=C] (10,-2); (8,-2) node[ocirc] – (12,-2) node[ocirc]; (10,0) – (12,0) node[ocirc]; [i-] (12,-0.15) – (12,-1.85); at (12.5,-1)  $V_{out}$ ;

Figura 65: Filtri passivi: passa-alto (sinistra) e passa-basso (destra).

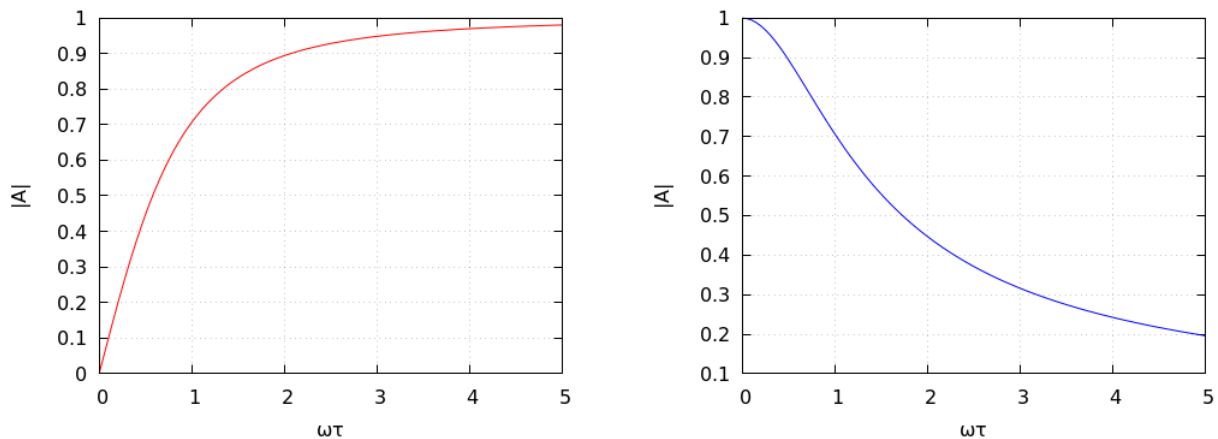


Figura 66: Modulo della funzione di trasferimento per un filtro passa-alto (sinistra) e passa-basso (destra).



Nel grafico a sinistra in fig. 66 vediamo l'andamento della funzione di trasferimento al variare di  $\omega\tau$ . Per  $\omega\tau \ll 1$ , ovvero per frequenze  $\omega \ll 1/\tau$ , la funzione di trasferimento si annulla, viceversa, per  $\omega\tau \gg 1$ , ovvero per frequenze  $\omega \gg 1/\tau$ , essa tende ad 1. Ciò significa che i segnali alle basse frequenze verranno *tagliati*: abbiamo realizzato un filtro passa-alto.

Nel caso di un filtro passa-basso, il circuito è lo stesso, ma preleviamo la tensione d'uscita  $V_{out}$  ai capi del condensatore. L'impedenza complessiva  $Z$  è la stessa di prima (formula 256), mentre la tensione d'uscita è  $V_{out} = I/(i\omega C)$ , dunque la funzione di trasferimento è:

$$A_v(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{Z} = \frac{1}{i\omega C} \frac{\omega C}{\omega RC - i} = \frac{1}{1 + i\omega\tau} \frac{1 - i\omega\tau}{1 - i\omega\tau} = \frac{1}{(\omega\tau)^2 + 1} - i \frac{\omega\tau}{(\omega\tau)^2 + 1} \quad (259)$$

avente modulo pari a:

$$|A_v(\omega)| = \sqrt{A_v^*(\omega)A_v(\omega)} = \sqrt{\frac{1 + (\omega\tau)^2}{[(\omega\tau)^2 + 1]^2}} = \frac{1}{\sqrt{(\omega\tau)^2 + 1}} \quad (260)$$

Nel grafico a destra in fig. 66 vediamo l'andamento della funzione di trasferimento al variare di  $\omega\tau$ . Per  $\omega\tau \ll 1$ , ovvero per frequenze  $\omega \ll 1/\tau$ , la funzione di trasferimento tende ad 1, viceversa, per  $\omega\tau \gg 1$ , ovvero per frequenze  $\omega \gg 1/\tau$ , essa tende a 0. Ciò significa che i segnali alle alte frequenze verranno *tagliati*: abbiamo realizzato un filtro passa-basso.

Ritornando al circuito in fig. 64, all'uscita del preamplificatore abbiamo un segnale a gradino che decade in tempi molto lunghi. Inseriamo dunque, nell'ordine:

- un **filtro passa-alto**, che fa decadere il segnale in tempi più rapidi, come  $e^{-t/\tau_d}$ . Un taglio alle basse frequenze corrisponde infatti ad un taglio sui tempi più lunghi. Tale filtro è detto anche **differenziatore**, poiché, per un segnale in ingresso di breve durata (i.e. con spettro di frequenza molto esteso), ne restituisce la derivata;
- un **filtro passa-basso**, che produce un fronte di salita meno ripido, con andamento  $(1 - e^{-t/\tau_i})$ . Un taglio alle alte frequenze corrisponde infatti ad un taglio sui tempi più brevi. Tale filtro è detto anche **integratore**, poiché, per un segnale in ingresso di breve durata (i.e. con spettro di frequenza molto esteso), ne restituisce l'integrale.

Siccome il filtro passa-alto è costituito da un circuito  $CR$ , mentre quello passa-basso è costituito da un circuito  $RC$ , questo tipo di formatore è detto  $CR - RC$ . Ne esistono di più sofisticati, aventi però le medesime caratteristiche di base: un limite per le basse frequenze ed uno per le alte.

La risposta in frequenza del formatore è data dal prodotto  $G(f) = G_{int}(f) \cdot G_{dif}(f)$ , ovvero fra quella dell'integratore e del differenziatore. L'antitrasformata di Fourier di tale prodotto corrisponde al prodotto di convoluzione, per cui il segnale in uscita si scrive come:

$$V_o(t) = V_i(t) * g_{int}(t) * g_{dif}(t) \quad (261)$$

Nel caso particolare di un segnale in ingresso a gradino:

$$V_i(t) = \begin{cases} 1 & \text{per } t > 0 \\ 0 & \text{per } t \leq 0 \end{cases} \quad (262)$$

il segnale in uscita sarà:

$$V_o(t) = \frac{\tau_d}{\tau_d - \tau_i} [e^{-t/\tau_d} - e^{-t/\tau_i}] \quad (263)$$

Qualora  $\tau_d = \tau_i = \tau$ , abbiamo:

$$V_o(t) = \frac{t}{\tau} e^{-t/\tau} \quad (264)$$

il cui massimo si ha per  $t = \tau$ .

Sperimentalmente, i formatori reali introducono un rumore che è solo del  $\sim 36\%$  maggiore rispetto a quello del modello ideale, qui descritto: data la sua semplicità, può essere dunque utilizzato per produrre stime realistiche.

Vediamo alcuni grafici esplicativi delle caratteristiche del formatore. In quello a sinistra in fig. 67 stiamo aumentando la costante di tempo d'integrazione  $\tau_{int}$  del filtro passa-basso, tenendo fissata quella di differenziazione  $\tau_{diff}$ . Sapendo che il limite superiore della banda passante di frequenze è dato da  $1/\tau_{int}$ , esso si riduce all'aumentare di  $\tau_{int}$ . Per cui stiamo tagliando una parte via via maggiore dello spettro alle alte frequenze, con conseguente riduzione del rumore. Vediamo che il segnale decade più lentamente e diminuisce anche l'altezza del picco. Ciò può avere effetti a seconda di come opera l'ADC a valle del formatore: esso infatti può integrare tutto il segnale in un intervallo temporale prefissato, oppure può misurarne solo l'ampiezza del picco.

Nel grafico a destra in fig. 67 viene viceversa tenuta costante  $\tau_{int}$ , variando  $\tau_{diff}$ . Trattandosi di un filtro passa-alto, esso determina un limite inferiore per la banda passante di frequenze, che è dato da  $1/\tau_{diff}$ . Partendo da  $\tau_{diff} = \infty$ , tale limite inferiore è posto a 0: le basse frequenze non vengono tagliate, e dunque il segnale in uscita preserva, sui tempi lunghi, le caratteristiche di quello in ingresso. In particolare osserviamo che viene raggiunto il picco massimo, e il tempo di decadimento risulta molto lungo. Diminuendo  $\tau_{diff}$ , il limite inferiore della banda di frequenze aumenta: tagliando una parte via via maggiore dello spettro alle basse frequenze, diminuisce il tempo di decadimento del segnale, ma anche il valore del picco massimo.

Consideriamo due diversi valori del rapporto segnale-rumore  $(SNR)_1$  ed  $(SNR)_2$ , a cui corrispondono due valori di carica equivalente di rumore  $(ENC)_1$  ed  $(ENC)_2$ , rispettivamente. Stando alla definizione in formula 178 della carica equivalente di rumore, a parità di carica di segnale, si conserva il prodotto  $(SNR) \cdot (ENC)$ . Quindi, nel nostro caso, avremo:

$$(SNR)_1 \cdot (ENC)_1 = (SNR)_2 \cdot (ENC)_2 \quad \Rightarrow \quad (ENC)_2 = \frac{(SNR)_1}{(SNR)_2} \cdot (ENC)_1 \quad (265)$$

A sinistra in fig. 68, a parità di costante di tempo di differenziazione, stiamo aumentando quella di integrazione (i.e. riduciamo il limite superiore dello spettro delle frequenze, tagliandone una parte via via maggiore, con conseguente riduzione del rumore). Passando da  $\tau_{int} = 10$  ns a  $\tau_{int} = 100$  ns, vediamo che il picco del segnale (grafico centrale) si dimezza, mentre il rumore (grafico in alto) diventa circa  $1/4$ , per cui il rapporto segnale-rumore raddoppia. Quindi l'ENC (grafico in basso), secondo la relazione in formula 265, si dimezza.

A destra in fig. 68, a parità di costante di tempo di integrazione, stiamo aumentando quella di differenziazione (i.e. diminuiamo il limite inferiore della banda passante di frequenze, che, allargandosi, lascia entrare più rumore). Passando da  $\tau_{diff} = 10$  ns a  $\tau_{diff} = 100$  ns vediamo che il picco del segnale (grafico centrale) raddoppia, mentre il rumore (grafico in alto) aumenta del  $\sim 0.3 = 30\%$ . Il rapporto segnale-rumore scala di un fattore  $2/(1+0.3) \simeq 1.54$ , cui corrisponde un aumento del  $(1.54 - 1) = 0.54 = 54\%$ . L'ENC invece scala di un fattore  $(1 + 0.3)/2 = 0.65$ , cui corrisponde una diminuzione del  $(1 - 0.65) = 0.35 = 35\%$ .

Per ridurre il tempo di discesa del segnale dopo il picco massimo, si può ricorrere all'aggiunta di più integratori a valle del differenziatore. Tale configurazione viene chiamata  $CR - nRC$ , dove  $n$  indica il numero di integratori a valle del differenziatore. Consideriamo che differenziatore ed integratori abbiano tutti la stessa costante di tempo  $\tau_{diff} = \tau_{int} = \tau$ . Mandando in ingresso un segnale a gradino, quello in uscita si ottiene generalizzando la relazione 264, come:

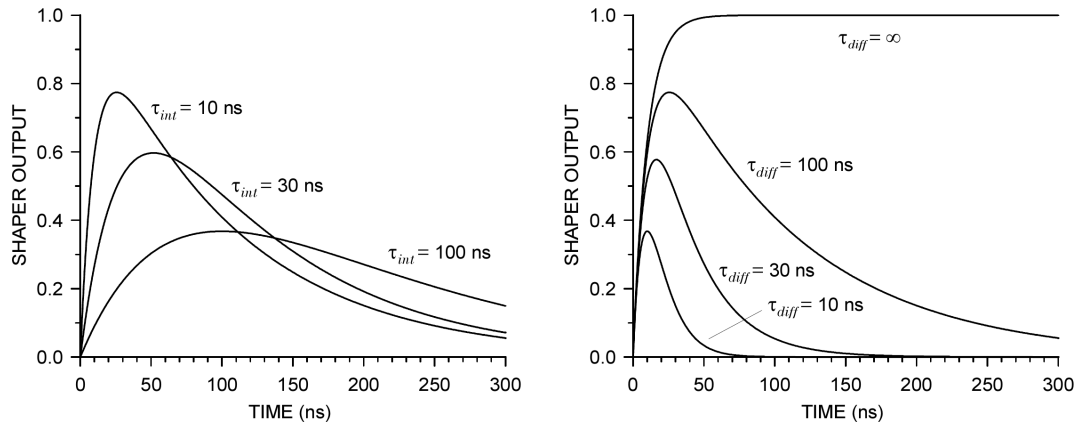


Figura 67: Ampiezza del segnale in uscita dal formatore in funzione del tempo: a sinistra, per diversi valori di  $\tau_{int}$  (costante di tempo d'integrazione), con fissata  $\tau_{diff} = 100$  ns (costante di tempo di differenziazione); a destra, viceversa, per diversi valori di  $\tau_{diff}$ , con fissata  $\tau_{int} = 10$  ns.

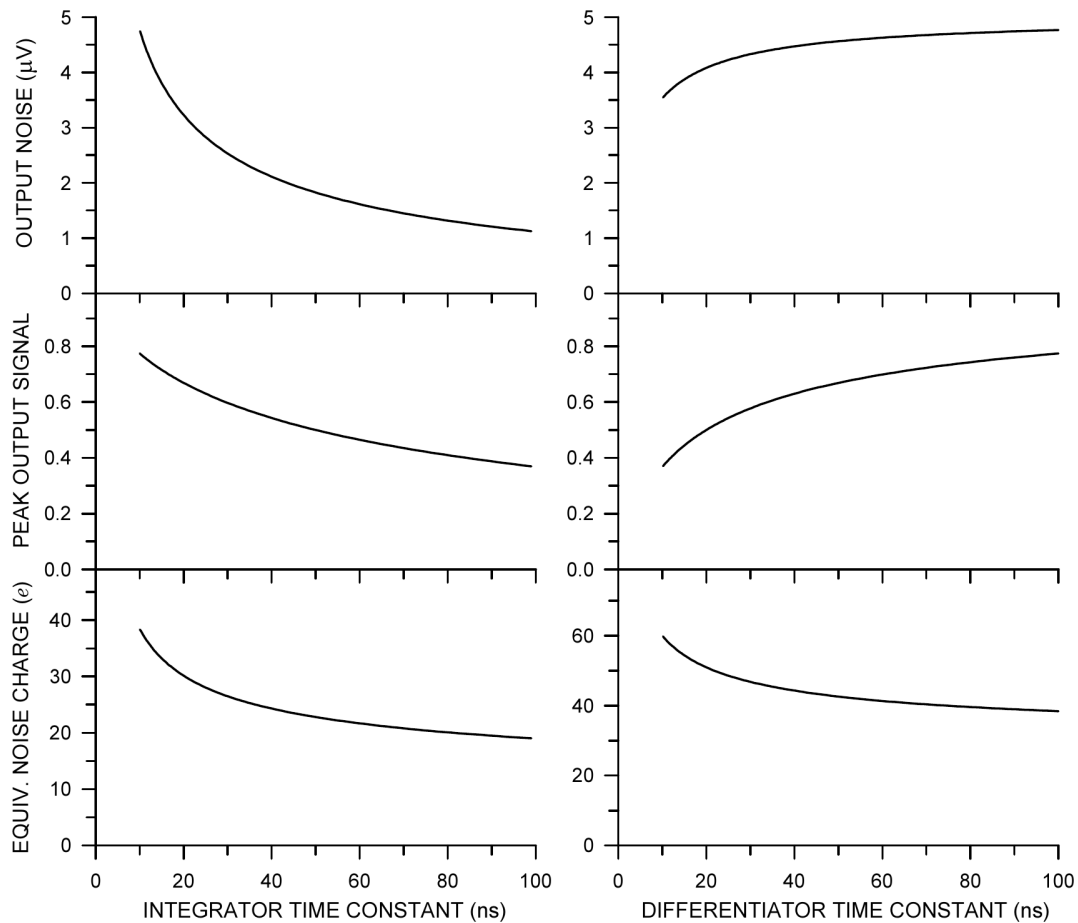


Figura 68: Rumore (in alto), picco del segnale (al centro) e rumore equivalente in elettroni (in basso): a sinistra, in funzione della costante di tempo d'integrazione  $\tau_{int}$ , tenendo fissata quella di differenziazione ( $\tau_{diff} = 100$  ns); a destra, viceversa, in funzione della costante di tempo di differenziazione  $\tau_{diff}$ , tenendo fissata quella d'integrazione ( $\tau_{int} = 10$  ns).

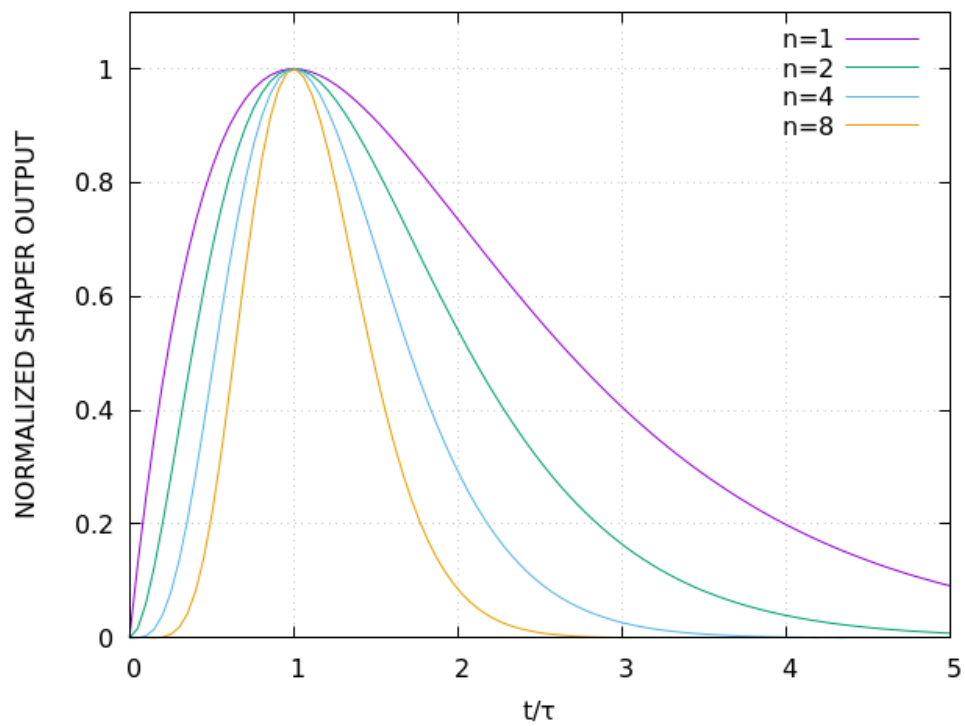


Figura 69: Forma del segnale in uscita dal formatore, quando esso è costituito da un differenziatore ed  $n$  integratori (circuito  $CR - nRC$ ), tutti con stessa costante di tempo  $\tau_{diff} = \tau_{int} = \tau$ .

$$V_o(t) = \left(\frac{t}{\tau}\right)^n e^{-t/\tau} \quad (266)$$

Il picco si trova ad un tempo  $t_{peak} = n\tau$ , ed ha un valore  $V_{peak} = n^n e^{-n}$ , che diverge rapidamente all'aumentare di  $n$ . Scegliendo opportuni valori di capacità e resistenza, possiamo riscaldare la costante di tempo in funzione del numero  $n$  di integratori, come  $\tau/n$ . In tal modo fissiamo la posizione del picco in  $t_{peak} = \tau$ , mentre la sua altezza rimane quella di prima. Se ora normalizziamo ad 1 anche quest'ultima, otteniamo proprio il grafico in fig. 69. Osserviamo che, all'aumentare di  $n$ , il segnale in uscita dal formatore decade in tempi via via più brevi, assumendo una forma più simmetrica e pronunciata in prossimità del picco. Ciò si riflette sulla risoluzione temporale, ed è utile per evitare fenomeni di *pile-up* nel caso in cui il rateo di eventi sia elevato.

Nelle applicazioni sperimentali, i sensori hanno dei circuiti integrati che permettono di variare la costante di tempo di *shaping*  $\tau$  in un determinato intervallo. Si effettuano sia delle misure di segnale, irradiando il sensore con una sorgente, sia di rumore, ovvero in assenza della sorgente, determinando dunque il rapporto segnale-rumore. Effettuando tali misure per diversi valori di  $\tau$ , possiamo stabilirne il valore più opportuno, ossia quello che minimizza il rapporto segnale-rumore.

## 14 Risoluzione spaziale dei rivelatori

Vediamo ora il problema del **tracciamento**. Per determinare la posizione di una particella passante, possiamo utilizzare una **segmentazione naturale**, ovvero una configurazione con più rivelatori di cui conosciamo la posizione, ad esempio disponendoli su una griglia, e vedere quale di essi produce segnale. Questo modo di operare tuttavia è **poco efficiente** poiché si moltiplicano, oltre ai sensori, anche i volumi morti (sostegni, circuiti di alimentazione e di raccolta dei dati, sistemi di raffreddamento, etc...). Risulta invece più efficiente **segmentare internamente** un singolo rivelatore, come nel caso dei rivelatori a **microstrisce** oppure a **pixel**, qualitativamente introdotti nella lezione ??.

Vediamo quindi la **risoluzione spaziale** dei rivelatori internamente segmentati in **sotto-unità**, su una sola dimensione. La prima caratteristica rilevante è la larghezza  $p$  della segmentazione, che è detta **passo** (o *pitch*), e può essere costante, come nelle microstrisce, o variabile.

Altra caratteristica importante è la **modalità di lettura del segnale**, che può essere:

- **digitale**, quando in uscita da ogni sotto-unità abbiamo solo un segnale a due stati, 1 o 0, a seconda che la particella l'abbia attraversata o meno;
- **analogica**, se invece viene misurata l'ampiezza del segnale, in tutta la sua durata temporale.

La lettura digitale si ottiene utilizzando un **discriminatore**, che produce in uscita un segnale digitale qualora quello analogico in ingresso superi in ampiezza una soglia prefissata.

Gioca un ruolo importante anche la **condivisione di carica**. Se un rilascio di carica avviene a ridosso di più sotto-unità, questa verrà raccolta parzialmente sugli elettrodi di

ciascuna di esse. Possiamo determinare la **larghezza del gruppo**, ovvero il numero di sotto-unità che vengono attivate. In lettura **analogica**, la valutazione del **baricentro del rilascio di carica** permette di determinare la posizione in cui è passata la particella. Ad esempio, se vengono attivate due sotto-unità, che danno segnali di eguale ampiezza, ne deduciamo che la particella è passata a metà fra di esse. Altrimenti, se il segnale su una sotto-unità è più grande, mentre quello sull'altra è più piccolo, allora la particella sarà passata più vicina alla prima. In tal senso, ricordiamo inoltre che anche il moto di diffusione contribuisce a sparpagliare la carica durante la sua raccolta. Notiamo che le particelle che arrivano con traiettorie più angolate possono produrre segnale anche su molte sotto-unità: conoscere quanta carica è stata rilasciata su ciascuna di esse è cruciale per ricostruire in modo accurato la traiettoria.

Consideriamo ora il caso di un sensore a strisce, segmentato su una sola dimensione, con le seguenti caratteristiche:

1. il *pitch*  $p$  delle strisce è costante;
2. non c'è condivisione di carica (i.e. le singole strisce sono perfettamente isolate fra loro);
3. la lettura viene effettuata in modalità digitale.

Supponendo che la traiettoria della particella sia sufficientemente perpendicolare da passare attraverso una sola striscia, e non avendo nemmeno condivisione di carica, il segnale viene raccolto soltanto sulla striscia in corrispondenza della quale è transitata la particella. In assenza di ulteriori informazioni, possiamo solo supporre che la posizione misurata sia uniformemente distribuita lungo la larghezza  $p$  della striscia interessata. Se essa è centrata in  $x = 0$ , possiamo dunque quantificare l'incertezza mediante la varianza:

$$\sigma_x^2 = \langle \Delta x^2 \rangle = \int_{-p/2}^{p/2} \frac{x^2}{p} dx = \frac{1}{p} \left[ \frac{x^3}{3} \right]_{-p/2}^{p/2} = \frac{1}{3p} \left[ \frac{p^3}{8} - \left( -\frac{p^3}{8} \right) \right] = \frac{1}{3p} \frac{2p^3}{8} = \frac{p^2}{12} \quad (267)$$

Segue un errore, in termini di deviazione standard sulla misura, di  $\sigma_x = p/(2\sqrt{3})$ . Questo valore segna il limite massimo per la risoluzione spaziale di un rivelatore uniformemente segmentato.

Per migliorare la risoluzione possiamo ridurre dunque la lunghezza  $p$  del passo. Esistono però limitazioni di carattere pratico. Ad esempio, non possiamo realizzare un sensore che sia più piccolo degli stessi contatti necessari a portarne fuori il segnale, poiché questi occupano comunque un certo spazio, e devono essere posti ad una certa distanza per poter operare. Oltre a ciò, esistono anche limitazioni di carattere fisico. Introducendo la condivisione di carica, dobbiamo tenere conto del moto di diffusione dei portatori. In questo caso non è vantaggioso scegliere un valore  $p$  del *pitch* inferiore alla larghezza della nube di carica che giunge all'elettrodo, cosa che, di fatto, produrrebbe segnale su due (o più) strisce senza un miglioramento della risoluzione.

Vediamo di descrivere meglio la **diffusione**. In riferimento alla fig. 70, il moto di deriva avviene lungo la coordinata  $y$  della giunzione (i.e. perpendicolare al piano degli elettrodi), mentre  $x$  è la coordinata trasversa (i.e. parallela al piano degli elettrodi). Lungo questa

coordinata, per diffusione, si produce un allargamento gaussiano della nube di carica, la cui deviazione standard viene quantificata come:

$$\sigma_x = \sqrt{2Dt_c} = \sqrt{2\frac{\mu kT}{q}t_c} \quad (268)$$

dove  $t_c$  è il tempo di raccolta della carica, mentre  $D$  è il coefficiente di diffusione, che è stato riscritto nell'ultimo passaggio in funzione della mobilità  $\mu$ , utilizzando la nota relazione di Einstein.

Se  $d$  è lo spessore del rivelatore, la tensione di svuotamento completo in può essere scritta, utilizzando le relazioni 74, come:

$$V = \frac{qN_D d^2}{2\epsilon} \quad (269)$$

Il campo elettrico può dunque essere approssimato come:

$$E \simeq \frac{V}{d} = \frac{qN_D d}{2\epsilon} \quad (270)$$

Ipotizzando che la carica venga rilasciata a **metà spessore del rivelatore**, essa viene raccolta in un tempo pari a:

$$t_c = \frac{d/2}{v_{drift}} = \frac{d}{2\mu E} = \frac{d}{2} \frac{2\epsilon}{\mu q N_D d} = \frac{\epsilon}{\mu q N_D} \quad (271)$$

Utilizzando questo risultato nell'equazione 268, otteniamo:

$$\sigma_x = \sqrt{2\frac{\mu kT}{q}t_c} = \sqrt{\frac{2\mu kT}{q} \frac{\epsilon}{\mu q N_D}} = \sqrt{\frac{2kT\epsilon}{q^2 N_D}} \quad (272)$$

che non dipende dal particolare tipo di portatore di carica. La scelta del *pitch*  $p$  sarà condizionata dallo sparpagliamento delle cariche, per cui richiediamo  $\sigma_{x,p} \sim \sigma_{x,d}$ .

**Esempio.** Consideriamo un sensore costituito da una giunzione unilaterale  $p^+n$  mantenuta a temperatura ambiente. Esso ha uno spessore  $d = 300 \mu\text{m}$ , ed una concentrazione di donori dell'ordine di  $N_D \sim 10^{12} \text{ cm}^{-3}$ . La tensione da applicare per ottenere lo svuotamento completo è:

$$\begin{aligned} V &= \frac{qN_D d^2}{2\epsilon} = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3} \cdot (3.00 \cdot 10^{-2} \text{ cm})^2}{2 \cdot 1.054 \cdot 10^{-12} \text{ F cm}^{-1}} = \\ &= \frac{1.6 \cdot 9.00}{2 \cdot 1.054} \cdot 10^{-19+12-4+12} \text{ V} = 6.83 \cdot 10^{-1} \text{ V} = 68.3 \text{ V} \end{aligned}$$

Il tempo di raccolta delle buche, prodotte a metà dello spessore della giunzione, è:

$$\begin{aligned} t_{c,h} &= \frac{\epsilon}{\mu_h q N_D} = \frac{1.054 \cdot 10^{-12} \text{ F cm}^{-1}}{450 \text{ cm}^2 (\text{V s})^{-1} \cdot 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}} = \\ &= \frac{1.054}{4.50 \cdot 1.60} \cdot 10^{-2-12+19-12} \text{ s} = 0.146 \cdot 10^{-7} \text{ s} = 14.6 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 14.6 \text{ ns} \end{aligned}$$



Tenendo conto che  $kT = 0.026$  eV, il coefficiente di diffusione delle buche è pari a:

$$D_{x,h} = \mu_h \frac{kT}{q} = 450 \frac{\text{cm}^2}{\text{V s}} \cdot 0.026 \text{ V} = 11.7 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}}$$

Segue la deviazione standard per la diffusione:

$$\sigma_x = \sqrt{2D_{x,h}t_{c,h}} = \sqrt{2 \cdot 11.7 \frac{\text{cm}^2}{\text{s}} \cdot 1.46 \cdot 10^{-8} \text{ s}} = \sqrt{2 \cdot 11.7 \cdot 1.46 \cdot 10^{-4}} \text{ cm} = 5.84 \mu\text{m}$$

Usando la relazione 267, vediamo che il *pitch* ottimale sarà dell'ordine di:

$$p \simeq 2\sqrt{3} \sigma_{x,d} = 2\sqrt{3} 5.84 \mu\text{m} \simeq 20 \mu\text{m}$$

Nel caso di un rivelatore a microstrisce avente lunghezza complessiva  $l = 10$  cm, il numero di canali richiesti sarà dell'ordine di:

$$N_{ch} \sim \frac{l}{p} = \frac{10 \text{ cm}}{20 \mu\text{m}} = \frac{10^5 \mu\text{m}}{20 \mu\text{m}} \sim 10^{4.5}$$

Ciascun canale viene letto ed alimentato separatamente, quindi un'elevata segmentazione comporta notevoli problematiche di gestione, sia per quanto riguarda l'elettronica esterna, sia per la dissipazione del calore. Vogliamo dunque trovare un metodo che ci permetta di ottenere la medesima informazione, ma senza dover leggere tutti i canali.

A tale scopo, si può utilizzare la **divisione resistiva della carica**, descritta in fig. 71. Vediamo che i due elettrodi di raccolta sono posti ad una distanza  $d$  l'uno dall'altro. Lo strato superficiale che li separa costituisce un mezzo resistivo, di resistenza  $R$ . La carica viene rilasciata ad una distanza  $x$  dal primo, ovvero ad una distanza  $d - x$  dal secondo. La quantità di carica raccolta da ciascuno dei due elettrodi sarà proporzionale al reciproco della resistenza che essa incontra sul suo cammino, per cui avremo:

$$S_1 : \frac{1}{R_1} = S_2 : \frac{1}{R_2} \quad \text{i.e.} \quad S_1 R_1 = S_2 R_2 \quad (273)$$

I due valori di resistenza possono essere scritti in funzione di  $R$ , come:

$$R_1 = \frac{x}{d} R \quad \text{ed} \quad R_2 = \frac{d-x}{d} R \quad (274)$$

che ci permette di riscrivere la relazione di prima come:

$$S_1 x = S_2 (d - x) \quad (275)$$

La posizione  $x$  del rilascio di carica può quindi essere ricavata da quest'ultima, in funzione dell'ampiezza dei segnali  $S_1$  ed  $S_2$  misurati, e della distanza nota  $d$  fra gli elettrodi, come:

$$x = \frac{d S_2}{S_1 + S_2} \quad (276)$$

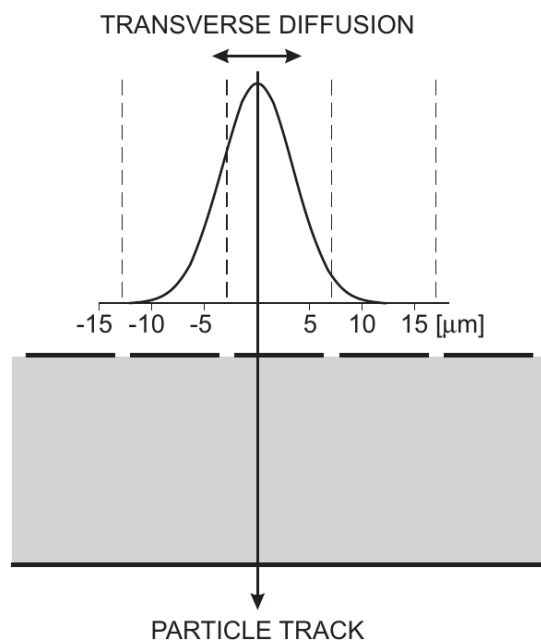


Figura 70: Diffusione trasversa (in direzione  $x$ ) della carica sugli elettrodi di raccolta di un sensore a strisce con *pitch* di  $20\ \mu\text{m}$ . I limiti degli elettrodi su cui viene raccolta la carica sono evidenziati da linee tratteggiate.

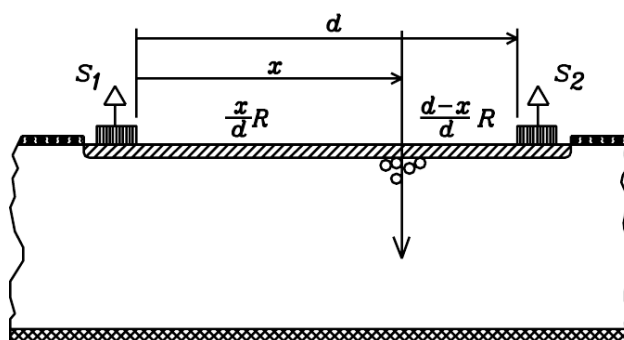


Figura 71: Misura della posizione, con l'utilizzo della divisione resistiva della carica.

L'errore sulla posizione può essere calcolato propagando quelli sulle ampiezze dei due segnali:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta x \rangle &= \frac{\partial x}{\partial S_1} \Delta S_1 + \frac{\partial x}{\partial S_2} \Delta S_2 = \\
&= -\frac{d S_2}{(S_1 + S_2)^2} \Delta S_1 + \frac{d (S_1 + S_2) - d S_2}{(S_1 + S_2)^2} \Delta S_2 = \\
&= \left( \frac{d}{S_1 + S_2} - \frac{d S_2}{(S_1 + S_2)^2} \right) \Delta S_2 - \frac{d S_2}{(S_1 + S_2)^2} \Delta S_1 = \\
&= \left( \frac{d}{S_1 + S_2} - \frac{x}{S_1 + S_2} \right) \Delta S_2 - \frac{x}{S_1 + S_2} \Delta S_1 = \\
&= (d - x) \frac{\Delta S_2}{S_1 + S_2} - x \frac{\Delta S_1}{S_1 + S_2}
\end{aligned} \tag{277}$$

da cui segue lo scarto quadratico medio:

$$\langle \Delta x^2 \rangle = \frac{1}{(S_1 + S_2)^2} \left[ (d - x)^2 \langle \Delta S_2^2 \rangle - 2x(d - x) \langle \Delta S_1 \Delta S_2 \rangle + x^2 \langle \Delta S_1^2 \rangle \right] \tag{278}$$

Gli errori  $\Delta S_1$  e  $\Delta S_2$  sono dovuti al rumore, le cui sorgenti principali sono:

1. le **resistenze**,  $R_1$  ed  $R_2$ , che sono totalmente correlate, poiché la carica che non passa per la prima, passa attraverso la seconda, e viceversa. Nota la carica rilasciata, i rumori dovuti alle due resistenze si compensano, per cui  $\Delta S_{R1} = -\Delta S_{R2} \equiv \Delta S_R$ , ed il termine di correlazione è  $\langle \Delta S_{R1} \Delta S_{R2} \rangle = -\langle \Delta S_R^2 \rangle$ ;
2. gli **amplificatori**,  $a_1$  ed  $a_2$ , che sono sostanzialmente scorrelati, per cui  $\langle \Delta S_{a1} \Delta S_{a2} \rangle = 0$ . Assumendo che entrambi producano rumore con le medesime proprietà, possiamo scrivere  $\Delta S_{a1} = \Delta S_{a2} \equiv \Delta S_a$ .

Tenendo conto di queste sorgenti di rumore nella formula 278, abbiamo:

$$\begin{aligned}
\langle \Delta x^2 \rangle &= \frac{1}{(S_1 + S_2)^2} \left[ (d - x)^2 \langle \Delta S_{R2}^2 \rangle - 2x(d - x) \langle \Delta S_{R1} \Delta S_{R2} \rangle + x^2 \langle \Delta S_{R1}^2 \rangle + \right. \\
&\quad \left. + (d - x)^2 \langle \Delta S_{a2}^2 \rangle - 2x(d - x) \langle \Delta S_{a1} \Delta S_{a2} \rangle + x^2 \langle \Delta S_{a1}^2 \rangle \right] = \\
&= \frac{1}{(S_1 + S_2)^2} \left[ \langle \Delta S_R^2 \rangle [(d - x)^2 - 2x(d - x) + x^2] + \langle \Delta S_a^2 \rangle [(d - x)^2 + x^2] \right] = \tag{279} \\
&= \frac{1}{(S_1 + S_2)^2} \left[ \langle \Delta S_R^2 \rangle d^2 + \langle \Delta S_a^2 \rangle [d^2 - 2xd + 2x^2] \right] = \\
&= \frac{d^2}{(S_1 + S_2)^2} \left[ \langle \Delta S_a^2 \rangle \left( 1 - 2\frac{x}{d} + 2\frac{x^2}{d^2} \right) + \langle \Delta S_R^2 \rangle \right]
\end{aligned}$$

Osserviamo che l'errore dipende dalla particolare coordinata  $x$  del punto di passaggio della particella. In particolare, risulta massimo in corrispondenza degli elettrodi (in  $x = 0$  ed  $x = d$ ) e minimo a metà fra essi (in  $x = d/2$ ).

Per ovviare a questo problema, si può leggere il segnale in regime di **divisione capacitiva della carica**. Come visibile in fig 72, data la geometria del sensore, al suo interno si instaurano automaticamente delle capacità. Ogni striscia presenta infatti una **capacità con il backplane**  $C_b$  fra l'elettrodo superiore e quello inferiore, inoltre fra strisce adiacenti si formano **capacità interstrip**  $C_{ss}$ . Queste sono solo le più importanti: per una trattazione più accurata, potremmo considerare anche le capacità che si instaurano fra strisce non adiacenti, poste a maggior distanza l'una dall'altra.

Chiamiamo con  $C_1$  e  $C_2$  le capacità equivalenti che la carica di segnale vede a sinistra e a destra del suo punto di origine, sino agli elettrodi, sui quali vengono rispettivamente letti i segnali  $S_1$  ed  $S_2$ . Avremo che:

$$S_1 : C_1 = S_2 : C_2 \quad \text{i.e.} \quad S_1 C_2 = S_2 C_1 \quad (280)$$

Osserviamo che per trasportare la carica agli amplificatori, bisogna fare in modo che non venga raccolta sul *backplane*: per tale ragione si richiede che sia almeno  $C_{ss} \sim 10C_b$ .

La presenza di **elementi resistivi** è dovuta allo strato di ossido di silicio che usualmente ricopre il sensore. Esso è necessario sia per esigenze di contenimento, sia come isolante elettrico. L'alimentazione delle strisce non può dunque avvenire sfruttando unicamente i contatti degli elettrodi di raccolta, infatti, come dallo schema in figura, si otterrebbe un partitore di tensione: in tal caso le strisce verrebbero alimentate a tensioni diverse, e la carica sarebbe raccolta soltanto su quella a potenziale maggiore. Per tale motivo è necessario alimentare singolarmente ogni striscia, cosa che comporta la presenza di molti contatti di alimentazione.

**Esempio.** Vediamo il caso pratico dei rivelatori Alice-SSD (*Silicon-Strip Detector*). Si tratta di rivelatori a microstrisce con *pitch*  $p \simeq 95 \mu\text{m}$  ed una lunghezza  $l = 7 \text{ cm}$  del lato segmentato, per cui vi sono all'incirca 768 canali. Si tratta di un numero relativamente piccolo, per cui è materialmente possibile leggere ciascuno di questi canali, in accoppiamento resistivo della carica.

Se il primo elettrodo è posizionato in  $x_1$  mentre il secondo è posizionato in  $x_2$ , allora la posizione  $x$  di passaggio della particella può essere calcolata dal **baricentro del rilascio di carica**, utilizzando il risultato in formula 275, come:

$$x = \frac{S_1 x_1 + S_2 x_2}{S_1 + S_2}$$

Tale sistema, in gergo, costituisce un *cluster* di dimensione 2.

Il limite inferiore per la risoluzione spaziale sarà dato dal rapporto fra il *pitch* ed il rapporto segnale-rumore. Siccome per i sensori Alice-SSD è  $S/R = 30$ , otteniamo:

$$\Delta x \geq \frac{p}{S/R} = \frac{95 \mu\text{m}}{30} \simeq 3 \mu\text{m}$$

Come ultima considerazione, notiamo che, rispetto all'accoppiamento resistivo, quello capacitivo richiede una **misura molto precisa delle capacità** in gioco, al fine di avere un basso errore sulla posizione. In tal caso, la componente più rilevante dell'errore è dovuta al **rumore elettronico** introdotto dall'amplificatore.

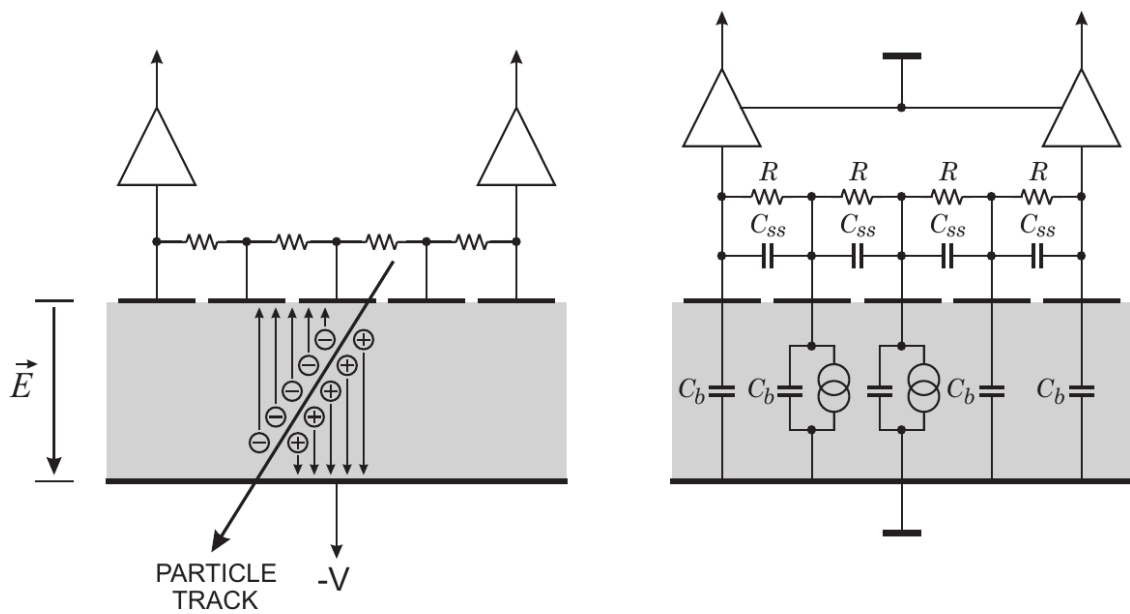


Figura 72: Lettura del segnale con divisione capacitiva della carica. A sinistra: schema reale del sensore, in cui è visibile la traccia della particella ionizzante, che rilascia la carica sul secondo e terzo elettrodo. A destra: schema circuitale del sensore: i generatori di corrente rappresentano il rilascio di carica,  $C_b$  è la capacità fra l'elettrodo (superiore) ed il *backplane* (inferiore), mentre  $C_{ss}$  è la capacità interstrip, ossia *strip-to-strip*, fra due strisce adiacenti.