Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2023-2024, terzo esame invernale

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1.

- si calcoli $\lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x-\sin x}}{\sqrt{x}\log(1+\sin x)}$

$$= \frac{\sqrt{\cancel{x} - \cancel{x} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)}}{\sqrt{x}\quad x} \qquad \frac{x}{\sin x} \to 1 \qquad \frac{\sin x}{\log(1+\sin x)} \to 1$$

$$= \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{3/2}}{x^{3/2}}\, 6^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

- si calcoli $\lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} e^{\frac{1}{t}}\,dt$;

$$\int_x^{2x} e^{\frac{1}{t}}\,dt > \int_x^{2x} dt = x \xrightarrow{x\to+\infty} +\infty$$

Corol.

$$\Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \int_x^{2x} e^{\frac{1}{t}}\,dt = +\infty$$

- si calcoli $f'(x)$ per $f(x) := \sin\left(\log\left(x+x^2\right)\right)$;

$$f'(x) = \cos\left(\lg(x+x^2)\right)\left(\lg(x+x^2)\right)'$$

$$= \cos\left(\lg(x+x^2)\right) \frac{1}{x+x^2} (2x+1) .$$

ESERCIZIO N. 2. Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{1}{x} + \arctan(x)$$

- si trovi il dominio di f e si calcolino i limiti sulle estremita del dominio; $\mathrm{Dom}\, f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

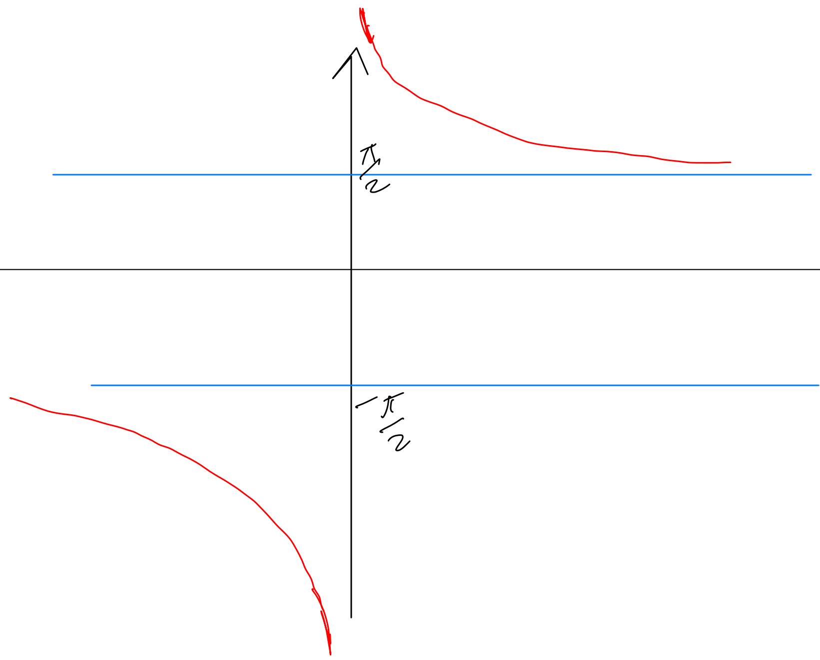
$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm \frac{\pi}{2}$ $\quad \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$

- si calcoli $f'(x)$ e si trovi il numero dei punti di massimo e di minimo locali e assoluti;

$f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{1+x^2} = \frac{-1}{x^2(1+x^2)} < 0 \ \forall x$

- si stabilisca se vi sono rette asintotiche; ovviamente $y = \frac{\pi}{2}$ è la retta asintotica a $+\infty$ e $y = -\frac{\pi}{2}$ è la retta asintotica a $-\infty$.

- si tracci il grafico .



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** ____________

ESERCIZIO N. 3. $x^3+1=(x+1)(x^2-x+1)$

- si calcoli $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3+1}dx$ $\quad \frac{1}{x^3+1}=\frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2-x+1} \quad A=\frac{1}{x^2-x+1}\Big|_{x=-1}=\frac{1}{3}$ $\quad A+B=0$

da $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x^3+1}=A+B=0 \Rightarrow B=-\frac{1}{3}$ $\quad \frac{\frac{1}{3}(x^2-x+1)-\frac{1}{3}x(x+1)+C(x+1)}{x^3+1}=\frac{1}{x^3+1} \Rightarrow \frac{1}{3}+C=1 \Rightarrow C=\frac{2}{3}$

$\int_1^y\left[\frac{\frac{1}{3}}{x+1}-\frac{1}{6}\frac{2x-1}{x^2-x+1}+\frac{\frac{1}{2}}{x^2-2\frac{x}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}\right]dx=\frac{1}{3}\lg\frac{y+1}{\sqrt{y^2-y+1}}-\frac{1}{3}\lg 2+\int_1^y\frac{\frac{1}{2}}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \quad u=\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{1}{2})$ $\quad du=\frac{\sqrt{3}}{2}dx$

$=\frac{1}{3}\lg\frac{y+1}{\sqrt{y^2-y+1}}-\frac{1}{3}\lg 2+\int_{\frac{\sqrt{3}}{4}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}(x-\frac{1}{2})}\frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{4}}\frac{1}{u^2+1} \xrightarrow{y\to+\infty} -\frac{\lg 2}{3}+\frac{2}{3}\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$

- si calcoli le primitive $\int \sin^2(2x)\cos^2(2x)dx$; $\quad y=2x \quad =\frac{1}{2}\int \sin^2(y)\cos^2(y)\,dy=$

$=\frac{1}{8}\int(1-\cos(2y))(1+\cos(2y))dy=\frac{y}{8}-\frac{1}{8}\int\cos^2(2y)\,dy=\frac{y}{8}-\frac{1}{16}\int(1+\cos(4y))dy$

$=\frac{y}{16}-\frac{\sin(4y)}{26}+C=\frac{x}{8}-\frac{\sin(2x)}{26}+C$

- si stabilisca se $e^{-\frac{1}{x}}$ e' integrabile in $(0,1]$; $0<e^{-\frac{1}{x}}\leq 1$ per $0<x\leq 1$

Allora siccome 1 è ovviamente integrabile in $(0,1]$,
per il confronto anche $e^{-\frac{1}{x}}$ lo è.

- si stabilisca se $\frac{\sin(2x)}{\log(1+x)}$ e' integrabile in $[2,+\infty)$.

$\int_2^y\frac{\sin(2x)}{\lg(1+x)}dx=-\frac{1}{2}\int_2^y\frac{(\cos(2x))'}{\lg(1+x)}=\frac{1}{2}\frac{\cos(4)}{\lg(3)}-\frac{1}{2}\frac{\cos(2y)}{\lg(1+y)}$

$-\frac{1}{2}\int_2^y\frac{\cos(2x)}{\lg^2(1+x)\,(1+x)}dx$ Siccome

$\left|\frac{\cos(2x)}{\lg^2(1+x)\,(1+x)}\right|\leq\frac{1}{\lg^2 x\;\,x}$ lì è assolutamente integrabile e quindi

integrabile. Segue che $\frac{\sin(2x)}{\lg(1+x)}$ è integrabile in $[2,+\infty)$

ESERCIZIO N. 4. Calcolare il polinomio di McLaurin di ordine 6 di $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^3}$.

$$\frac{1}{1+y} = \sum_{j=0}^{6} (-1)^j y^j + o(y^6)$$

$$\frac{1}{1+x+x^3} = 1 - (x+x^3) + (x+x^3)^2 - (x+x^3)^3 + (x+x^3)^4 - x^5 + x^6 + \underbrace{o\left((x+x^3)^6\right)}_{=o(x^6)}$$

$$= 1 - x - x^3 + x^2 + 2x^4 + x^6 - \left(x^3 + 3x^5 + o(x^6)\right) + \left(x^4 + 4x^6 + o(x^6)\right) - x^5 + x^6 + o(x^6)$$

$$= 1 - x - x^3 + x^2 + 2x^4 + x^6 - x^3 - 3x^5 + x^4 + 4x^6 - x^5 + x^6 + o(x^6)$$

$$= \underbrace{1 - x + x^2 - 2x^3 + 3x^4 - 4x^5 + 6x^6}_{\text{il polinomio cercato}} + o(x^6)$$

ESERCIZIO N. 5. Calcolare la soluzione generale dell'equazione differenziale $y'' + 3y = e^x$.

Equazione caratteristica $\underbrace{r^2+3}_{p(r)} = 0 \Rightarrow r = \pm i\sqrt{3}$ le soluzioni

$$\Rightarrow \quad y_h = A\cos(\sqrt{3}\,x) + B\sin(\sqrt{3}\,x)$$

Cerco $y_p = \alpha e^x$

$$L[y_p] = \alpha\, L[e^x] = \alpha\, p(1)\, e^x = \alpha \cdot 4\, e^x = e^x$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad y_p = \frac{1}{4} e^x$$

$$\Rightarrow \quad y_g = y_h + y_p .$$