Appunti del corso di FINANZA MATEMATICA

Anna Rita BACINELLO

Dipartimento di Scienze Economiche, Aziendali, Matematiche e Statistiche "Bruno de Finetti", Università degli Studi di Trieste

STRUMENTI FINANZIARI DERIVATI

(derivati, "derivatives", "contingent-claims")

Si tratta di strumenti finanziari che generano dei flussi di cassa (pagamenti o "payoff" o “cash-flow”) dipendenti dal valore assunto da altre attività finanziarie o, più in generale, da una o più variabili osservabili ("variabili sottostanti")

$\Rightarrow$ anche il loro valore dipenderà da quello assunto dalle variabili sottostanti.

<u>Possibili attività sottostanti</u>: azioni, indici di Borsa, obbligazioni, titoli di stato, tassi d'interesse, merci, valute, derivati, ...

<u>Principali derivati</u>: contratti a termine ("forward"), contratti "futures", swaps, opzioni standard ("covered warrant"), opzioni "esotiche", ...,

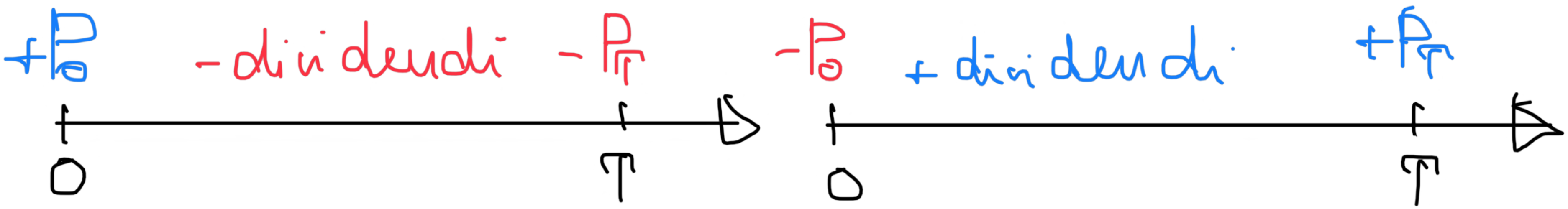
contratto di assicurazione, "cat. bonds", ...

IPOTESI DI LAVORO

- agenti razionali e non saziati (⇒ massimizzatori di profitto)
- agenti "price-takers" (⇒ i singoli agenti “non contano nulla” e con il loro comportamento individuale non sono in grado di influenzare i prezzi di mercato)
- gli agenti hanno probabilità equivalenti, ovvero concordano su tutti gli eventi di probabilità >0 e quelli di probabilità $=0$ (⇒ e quindi anche su quelli di probabilità $=1$). Ciò significa che ogni agente può attribuire la propria probabilità “soggettiva” agli eventi d’interesse, con il vincolo che se un evento ha probabilità $=0$ (o $=1$) per un agente avrà la stessa probabilità anche per tutti gli altri, mentre se la probabilità dell’evento è >0 sarà tale per tutti gli agenti ma non necessariamente coincidente
- perfetta divisibilità dei beni oggetto di scambio
- assenza di tasse e di costi di transazione
- è implicito che tutte le transazioni avvengono nell’ambito dell’insieme delle date di apertura dei mercati, che può essere un insieme continuo (intervallo, eventualmente illimitato superiormente) oppure discreto. Salvo diversamente specificato, supponiamo che esse avvengano in tempo continuo

- sono ammesse le vendite allo scoperto (*"shortselling"*), cioè le vendite di beni di cui non si ha la proprietà, senza alcun tipo di vincolo, per tutti i beni oggetto di scambio:
  - Per vendere un bene (o un titolo) allo scoperto bisogna rivolgersi ad un intermediario che lo possiede oppure lo ha in deposito per conto di un altro cliente, ordinandogli di venderlo sul mercato a pronti, al prezzo corrente di mercato. Mentre dal punto di vista teorico si incassa immediatamente l'intero ricavato della vendita, dal punto di vista pratico può essere che ne venga trattenuta una piccola parte a puro titolo di garanzia, parte che verrà comunque pagata una volta assolti gli obblighi contrattuali per cui non conta e ragioneremo come se non ci fosse.
  - Nel contratto di vendita allo scoperto ci si impegna a restituire il bene entro/ad una certa data, per cui, per poterlo fare, bisognerà ricomprarlo sul mercato a pronti, sempre al prezzo corrente di mercato.
  - Inoltre, se il bene/titolo paga dei dividendi/cedole mentre l'operazione è ancora aperta, chi vende allo scoperto ha l'obbligo di pagare tali redditi all'intermediario.

⇒ I flussi generati da un'operazione di vendita allo scoperto sono esattamente gli opposti di quelli di un'operazione di investimento:



vendita allo scoperto investimento

⇒ Questa operazione (di finanziamento) <u>generalizza la classica operazione di indebitamento a tasso certo</u>, che si ha quando il prezzo finale del bene è certo, così come lo sono gli eventuali dividendi/interessi. Questo caso particolare andrà quindi inteso come <u>vendita allo scoperto di un titolo certo</u>.

- assenza di opportunità di arbitraggio (AOA, ipotesi "chiave"), cioè (intuitivamente) impossibilità di realizzare profitti senza rischio mediante operazioni di compravendita di beni sul mercato ($\Rightarrow$ ai prezzi di mercato)

Def.: I prezzi di mercato consentono di realizzare opportunità di arbitraggio se è possibile intraprendere delle operazioni di compravendita di beni che comportano dei flussi monetari, in generale aleatori, tutti ≥ 0 con probabilità =1 (q.c., *quasi certamente*), ed uno almeno di essi > 0 con probabilità > 0.

Formalmente, un'operazione di compravendita ("transazione") che inizia all'epoca $t_0 = 0$ e produce la sequenza di flussi in entrata $\{x_i\}_{i=0}^n$ alle epoche $\{t_i\}_{i=0}^n$ (con $t_0 < t_1 < ... < t_n$) è un'opportunità di arbitraggio se

$$\begin{cases} \mathrm{P}\left(x_i \geq 0\right) = 1 \quad \forall i \in \{0,1,...,n\} \\ \exists i \in \{0,1,...,n\} : \mathrm{P}\left(x_i > 0\right) > 0 \end{cases}.$$

Poiché il flusso all'epoca iniziale t_0 è noto, si è in grado di dire se esso è = 0 o > 0. In base a ciò si usa allora distinguere tra

1. <u>Opportunità di arbitraggio del I tipo</u>: $$\begin{cases} x_0 = 0 \\ \mathrm{P}(x_i \geq 0) = 1 \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \\ \exists i \in \{1,\ldots,n\} : \mathrm{P}(x_i > 0) > 0 \end{cases}$$

2. <u>Opportunità di arbitraggio del II tipo</u>: $$\begin{cases} x_0 > 0 \\ \mathrm{P}(x_i \geq 0) = 1 \quad \forall i \in \{1,\ldots,n\} \end{cases}.$$

Nella maggior parte dei casi considereremo operazioni finanziarie che coinvolgono solo due date. In particolare, con riferimento ad una transazione che prevede un flusso iniziale all'epoca t_0 e un unico flusso futuro all'epoca t_1 (cioè $n = 1$), indicando con $c_0 = -x_0$ il costo iniziale dell'operazione, si ha:

1. <u>Opportunità di arbitraggio del I tipo</u>: $$\begin{cases} c_0 = 0 \\ \mathrm{P}(x_1 \geq 0) = 1 \\ \mathrm{P}(x_1 > 0) > 0 \end{cases}$$

2. <u>Opportunità di arbitraggio del II tipo</u>: $$\begin{cases} c_0 < 0 \\ \mathrm{P}(x_1 \geq 0) = 1 \end{cases}.$$

<u>Osservazioni</u>:

- Quindi un'opportunità di arbitraggio implica la possibilità di incassare qualcosa (certamente se del II tipo, con probabilità >0 se del primo), senza mai dover sborsare nulla con pratica certezza (cioè con probabilità $=1$).
- La presenza o meno di opportunità di arbitraggio è una caratteristica del mercato e non una percezione dei singoli agenti, in quanto le loro probabilità, anche se soggettive, sono tutte fra loro equivalenti ($\Rightarrow$ gli eventi con probabilità $=1$ o, rispettivamente, >0, sono gli stessi per tutti gli agenti).
- L'assenza di opportunità di arbitraggio è una <u>condizione necessaria per l'equilibrio</u> del mercato. Infatti, se fossero presenti opportunità di arbitraggio in quanto, ad es., qualche bene risulta sotto prezzato e qualche altro sovra prezzato rispetto ad un ipotetico prezzo di equilibrio, tutti gli agenti, in blocco, cercherebbero di sfruttarle offrendo in vendita i beni sovra prezzati e domandando quelli sotto prezzati
  $\Rightarrow$ Per il gioco della domanda e dell'offerta (non del singolo agente, ma di tutti insieme) il prezzo dei beni sotto prezzati tenderebbe ad aumentare e, viceversa, quello dei beni sovra prezzati a diminuire, facendo così scomparire l'opportunità di arbitraggio. Infatti questo è proprio quello che si presenta nella pratica, in cui le "finestre di arbitraggio" sono di solito di breve durata.

- Si ha un'opportunità di arbitraggio anche quando

$$\begin{cases} \mathrm{P}\left(x_i \le 0\right)=1 \quad \forall i \in \{0,1,\ldots,n\} \\ \exists i \in \{0,1,\ldots,n\} : \mathrm{P}\left(x_i < 0\right) > 0 \end{cases}.$$

  Infatti, essendo possibile la vendita allo scoperto di tutti i beni, se uno può fare un'operazione può anche fare la sua opposta, generando i flussi $\{-x_i\}_{i=0}^n$ alle epoche $\{t_i\}_{i=0}^n$.

- L'assenza di opportunità di arbitraggio è l'<u>ipotesi chiave</u>, che guida nella fissazione dei prezzi dei nuovi beni immessi sul mercato. Infatti si ipotizza di partire da un mercato dove sono presenti determinati beni, privo di opportunità di arbitraggio, e di introdurre nello stesso dei nuovi beni, ad es. dei derivati. Si vuole allora che anche il <u>mercato allargato</u> preservi la caratteristica di essere privo di opportunità di arbitraggio, e questo comporterà dei vincoli sui prezzi da richiedere per i nuovi beni immessi sul mercato.

- nel mercato viene scambiata (almeno) un'attività rischiosa (il cui prezzo sarà appunto la variabile sottostante dei derivati considerati nel seguito), insieme ad attività prive di rischio. Più precisamente, assumiamo che siano scambiati titoli a cedola nulla ("zero-coupon bonds") non rischiosi con qualunque scadenza, così come un conto di deposito non rischioso ("money-market account" o "bank account", o "deposit account")

$\Rightarrow$ La possibilità di vendere allo scoperto attività prive di rischio, cioè di indebitarsi al tasso "*risk-free*", implica coincidenza tra tasso creditore e tasso debitore.

TITOLI A CEDOLA NULLA

Indichiamo con $b(t,T)$ il prezzo di mercato al tempo $t \geq 0$ di un titolo a cedola nulla unitario con scadenza $T \geq t$, che paga un importo certo, pari ad 1€, a scadenza.

OSSERVAZIONE: AOA $\Rightarrow$ $\begin{cases} b(t,T) > 0 \ \ \forall t,T: \ t < T \\ b(T,T) = 1 \ \ \forall T \end{cases}$.

$b(t,T)$ funge da fattore di attualizzazione per gli importi certi. Infatti un flusso certo C esigibile in T può essere replicato tramite l'acquisto di C titoli a cedola nulla unitari di scadenza T. AOA $\Rightarrow$ il valore in $t \leq T$ di questo flusso è pari a $Cb(t,T)$.

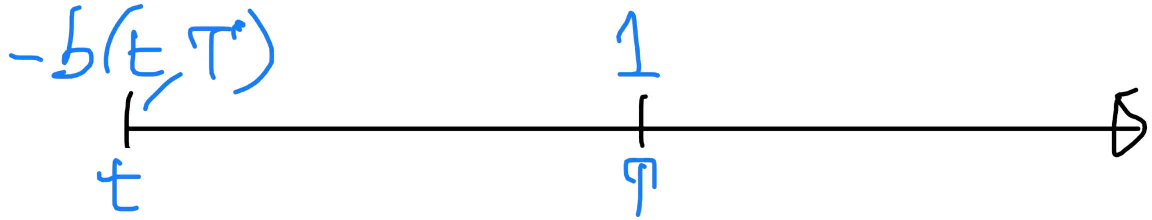
La funzione che ad ogni $T(\geq t)$ associa $b(t,T)$ costituisce la struttura per scadenza dei prezzi a pronti dei titoli a cedola nulla all'epoca t (fissata).

TASSI IMPLICATI DALLA STRUTTURA PER SCADENZA DEI PREZZI DEI TITOLI A CEDOLA NULLA $\Rightarrow$ Struttura per scadenza dei tassi a pronti

Intensità risk-free $r(t,T)$, $t<T$:

$$b(t,T)=\mathrm{e}^{-r(t,T)\,(T-t)} \quad \Rightarrow \quad r(t,T)=-\frac{1}{T-t}\ln b(t,T).$$

$\Rightarrow$ Se sul mercato si osservano direttamente i tassi $r(t,T)$, la relazione precedente traduce il fatto che $b(t,T)$ è il valore attuale in t dell'importo certo unitario esigibile in T (calcolato nel regime esponenziale, in base all'intensità $r(t,T)$). Se invece si osservano i prezzi $b(t,T)$, essa traduce il fatto che $r(t,T)$ è il TIR dell'operazione di acquisto (o, equivalentemente, di vendita allo scoperto) di un titolo a cedola nulla tenuto fino alla scadenza: $-b(t,T)+1\cdot\mathrm{e}^{-r(t,T)\,(T-t)}=0$.



Tasso annuo risk-free $i(t,T)$, $t<T$:

$$b(t,T)=\big(1+i(t,T)\big)^{-(T-t)} \quad \Rightarrow \quad i(t,T)=b(t,T)^{-\frac{1}{T-t}}-1=\mathrm{e}^{r(t,T)}-1.$$

Tasso semplice (o Lineare) risk-free $L(t,T)$, $t<T$ (spesso usato nella pratica quando $T-t$ è inferiore all'anno):

$$b(t,T)=\frac{1}{1+L(t,T)(T-t)} \quad \Rightarrow \quad L(t,T)=\frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{b(t,T)}-1\right).$$

Assumiamo che i tassi d'interesse correnti e futuri siano non negativi quasi certamente (ipotesi non implicata da AOA), cioè che $b(t,T)\le 1$ con probabilità 1 $\forall t,T:\ t<T$. Ciò comporta che, ad ogni fissato istante t, $b(t,T)$ è decrescente rispetto alla scadenza T, cioè $b(t,t_1)\ge b(t,t_2)\ \ \forall t,t_1,t_2 : t\le t_1<t_2$.

Dimostrazione: Supponiamo di trovarci in un generico istante t di apertura dei mercati. Fissiamo arbitrariamente due altre date di apertura $t_1,t_2:\ t\le t_1<t_2$ e supponiamo per assurdo che $b(t,t_1)<b(t,t_2)$. Allora:

- in t vendiamo allo scoperto un titolo a cedola nulla di scadenza t_2 e ne acquistiamo uno di scadenza t_1, con un introito pari a $b(t,t_2)-b(t,t_1)>0$;
- in t_1 incassiamo l'importo unitario del bond in scadenza e lo reinvestiamo nell'acquisto di $1/b(t_1,t_2)$ (≥ 1 q.c.) titoli di scadenza t_2, con un saldo $=0$;
- in t_2 incassiamo il valore nominale dei bond in scadenza e rimborsiamo quello venduto allo scoperto, con un saldo pari a $1/b(t_1,t_2)-1\ge 0$ q.c.

$\Rightarrow$ ciò è assurdo, in quanto si tratterebbe di un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Se poi, in particolare, i tassi sono strettamente positivi q.c. (cioè $b(t,T)<1$ con probabilità 1 $\forall t,T:\ t<T$), allora $b(t,T)$ risulta strettamente decrescente rispetto alla scadenza T, ovvero $b(t,t_1)>b(t,t_2)\ \ \forall t,t_1,t_2 : t\le t_1<t_2$.

<u>**Dimostrazione**</u>: Supponiamo di trovarci in un generico istante t di apertura dei mercati. Fissiamo arbitrariamente due altre date di apertura $t_1,t_2:\ t\le t_1<t_2$ e supponiamo per assurdo che $b(t,t_1)\le b(t,t_2)$. Allora:

- in t vendiamo allo scoperto un titolo a cedola nulla di scadenza t_2 e ne acquistiamo uno di scadenza t_1, con un introito pari a $b(t,t_2)-b(t,t_1)\ge 0$;
- in t_1 incassiamo l'importo unitario del bond in scadenza e lo reinvestiamo nell'acquisto di $1/b(t_1,t_2)$ (>1 q.c.) titoli di scadenza t_2, con un saldo $=0$;
- in t_2 incassiamo il valore nominale dei bond in scadenza e rimborsiamo quello venduto allo scoperto, con un saldo pari a $1/b(t_1,t_2)-1>0$ q.c.

$\Rightarrow$ ciò è assurdo in quanto si tratterebbe di un'opportunità di arbitraggio (del I tipo se $b(t,t_1)=b(t,t_2)$, del secondo se $b(t,t_1)<b(t,t_2)$).

Si osservi, tuttavia, che per una fissata scadenza T, $\{b(t,T),\ 0\le t\le T\}$ costituisce un *processo stocastico*, cosicché nessun tipo di monotonia rispetto a t può essere garantita; quindi un repentino aumento dei tassi d'interesse tra t ed s potrebbe far sì che $b(s,T)<b(t,T)$ se $t<s\,(<T)$ pur essendo i tassi positivi.

MONEY-MARKET ACCOUNT

Come appena osservato, se i tassi sono positivi, un investimento in titoli a cedola nulla garantisce un guadagno se i titoli sono tenuti fino alla scadenza; se invece sono venduti prima il ricavo della vendita potrebbe anche risultare inferiore al prezzo di acquisto, con conseguente perdita. Per questo motivo, quando non è noto l'orizzonte temporale dell'investimento, anziché utilizzare titoli a cedola nulla conviene usare un altro strumento, che in realtà non è nuovo in quanto si costruisce a partire da questi ultimi, con una strategia di "<u>roll-over</u>". Si tratta del <u>money-market account</u>, che prevede di partire da un <u>investimento iniziale unitario</u> all'epoca 0 in titoli a cedola nulla con scadenza la <u>data "immediatamente successiva" di apertura dei mercati</u>, per poi reinvestire il valore nominale dei bond giunti a scadenza in altri che scadono ancora alla data successiva di apertura dei mercati, e così via.

Indichiamo con $B(t)$ il valore del <u>money-market account</u> al tempo $t \geq 0$ (data in cui i mercati sono aperti) e distinguiamo due situazioni:

- Il mercato è aperto nel discreto, alle epoche $t_0, t_1, t_2, ...$ (con $0 = t_0 < t_1 < t_2 < ...$)

$\Rightarrow$ $B(t_0) = 1$,

$$B(t_1) = \frac{B(t_0)}{b(t_0, t_1)} = e^{r(t_0, t_1)(t_1 - t_0)},$$

$$B(t_2) = \frac{B(t_1)}{b(t_1, t_2)} = B(t_1) e^{r(t_1, t_2)(t_2 - t_1)} = e^{r(t_0, t_1)(t_1 - t_0) + r(t_1, t_2)(t_2 - t_1)},$$

$\ldots$

$$B(t_n) = \frac{B(t_{n-1})}{b(t_{n-1}, t_n)} = e^{r(t_0, t_1)(t_1 - t_0) + r(t_1, t_2)(t_2 - t_1) + ... + r(t_{n-1}, t_n)(t_n - t_{n-1})}$$

$\Rightarrow$ L'investimento è quindi remunerato sulla base dei tassi uniperiodali $r(t_j, t_{j+1})$;

$\Rightarrow$ Se si investe l'importo C in t_h, il suo montante in $t_k > t_h$ sarà pari a $\frac{C}{B(t_h)} B(t_k) = C e^{\sum_{j=h}^{k-1} r(t_j, t_{j+1})(t_{j+1} - t_j)} \geq C$ q.c. se i tassi sono non negativi. Investendo invece lo stesso importo in titoli a cedola nulla di scadenza $t_n > t_k$, il montante in t_k, pari a $\frac{C}{b(t_h, t_n)} b(t_k, t_n)$, potrebbe risultare $< C$ qualora $b(t_k, t_n) < b(t_h, t_n)$.

- Il mercato è aperto nel continuo, alle epoche $t \geq 0$

$\Rightarrow$ Il "corrispondente" del tasso uniperiodale è dato dal tasso (intensità) istantaneo risk-free al tempo $t \geq 0$, che viene applicato ad un investimento (o indebitamento) che inizia in t e termina "un istante dopo":

$$r(t) = \lim_{T \to t^+} r(t,T) = -\left[\frac{\partial}{\partial T} \ln b(t,T)\right]_{T=t} \quad \text{(se il limite esiste finito)}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathrm{d}B(t) = r(t)B(t)\mathrm{d}t \\ B(0) = 1 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad B(t) = \mathrm{e}^{\int_0^t r(u)\mathrm{d}u}.$$

Spesso si assume per semplicità che i tassi d'interesse siano deterministici e costanti nel tempo, cioè che $r(t,T) \equiv r \ \forall t,T:\ 0 \leq t < T$ e quindi $r(t) \equiv r \ \forall t \geq 0$. In tal caso è praticamente irrilevante distinguere tra titoli a cedola nulla e money-market account, in quanto $b(t,T) = \mathrm{e}^{-r(T-t)}$ è il fattore di attualizzazione per il periodo $[t,T]$ e $B(t) = \mathrm{e}^{rt}$ è il fattore di capitalizzazione per il periodo $[0,t]$ nel regime esponenziale con intensità r.

Nel seguito useremo quasi sempre titoli a cedola nulla per costruire delle strategie e solo poche volte, in particolare verso la fine, il money-market account.

CONTRATTI FORWARD

Un contratto forward è un accordo in base al quale due contraenti pattuiscono di scambiarsi una certa quantità di un bene prefissato (*attività sottostante*) ad una data futura prefissata (*data di consegna* o *"delivery date"*), ad un prezzo prefissato al momento della stipula (*prezzo di consegna* o *"delivery price"*). Al momento dell'accordo non si paga nulla (salvo eventualmente un margine di garanzia), al momento della consegna entrambi i contraenti devono adempiere agli impegni presi. In particolare la parte venditrice (che è in *posizione "corta"*) deve consegnare il bene sottostante, mentre la parte acquirente (*posizione "lunga"*) deve pagare il prezzo di consegna.

I forward sono accordi privati, trattati nei mercati non regolamentati ("Over The Counter", OTC), il bene sottostante deve avere un prezzo ufficialmente riconosciuto.

<u>Notazione</u>:

0	data di stipulazione del contratto
T	data di consegna
K	prezzo di consegna
$\{S(t); t \geq 0\}$	processo stocastico del prezzo del bene sottostante
$\{V^L(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del valore del contratto forward per il compratore ("long forward")
$\{V^S(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del valore del contratto forward per il venditore ("short forward")

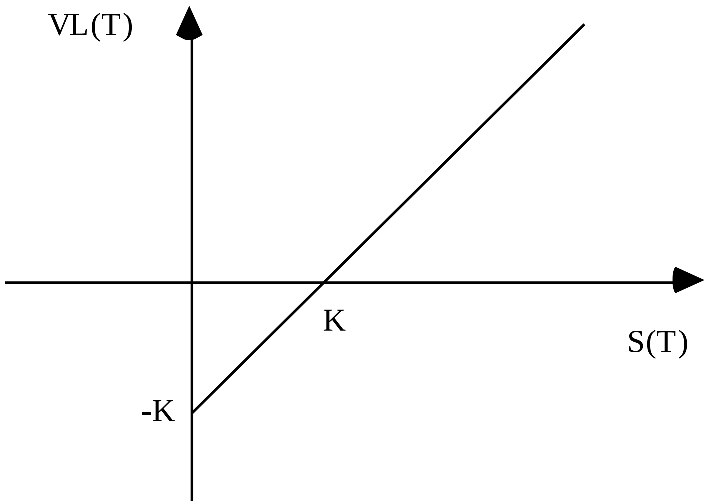
PAYOFF (VALORE FINALE) DI UN CONTRATTO FORWARD

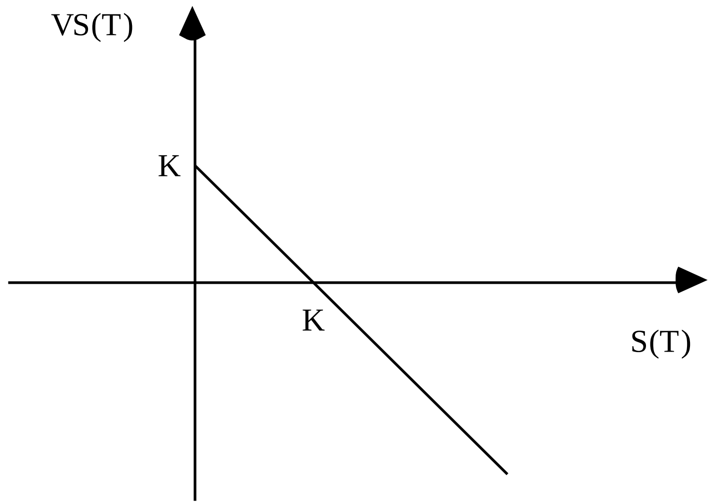
L'assenza di tasse e di costi di transazione, e l'assenza di opportunità di arbitraggio, implicano:

$$V^L(T) = S(T) - K, \quad V^S(T) = K - S(T)$$

$$V^L(0) = V^S(0) = 0$$

$$V^L(t) + V^S(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]$$





(Margini)

FINALITA' CHE POSSONO INDURRE A STIPULARE CONTRATTI FORWARD

- copertura da un rischio (*"hedging"*)
- "speculazione"

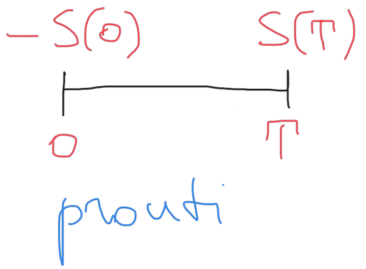
(Esempi di copertura)

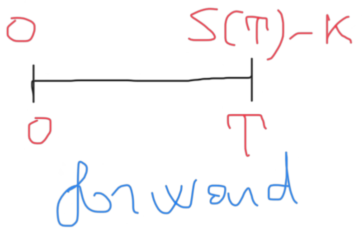
⇒ Aspettative/timori dei contraenti, ininfluenza del fatto che vi sia o meno effettiva consegna

$$\underbrace{(S(T)-K)}_{\text{long forw.}}\ \underbrace{-\,S(T)}_{\text{acquisto a pronti}} = -K \qquad \underbrace{(K-S(T))}_{\text{short forw.}} + \underbrace{S(T)}_{\text{vendita a pronti}} = K$$

(Esempi di speculazione)

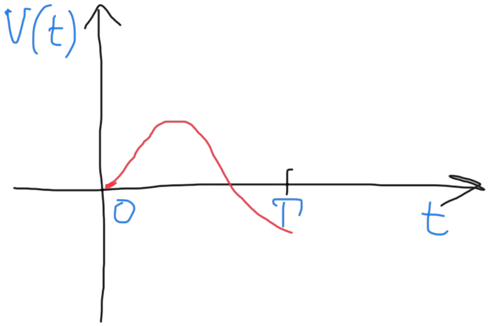
⇒ "Effetto leva" nel caso in cui si assumono posizioni su contratti forward/futures anziché operare direttamente sui mercati a pronti





DEFINIZIONE DI PREZZO FORWARD

Si definisce prezzo forward in t $(0 \leq t \leq T)$ quel particolare prezzo di consegna che renderebbe nullo, in t, il valore del contratto (long o short).



Notazione:

$\{F(t,T); 0 \leq t \leq T\}$ processo stocastico dei prezzi forward

$\Rightarrow \quad F(T,T) = S(T)$ (in quanto $V^L(T) = S(T) - K = 0 \iff K = S(T)$)

$\Rightarrow \quad K = F(0,T)$ (in 0 il contratto deve avere valore nullo per l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio)

Osservazione: Il prezzo forward $F(t,T)$ potrebbe anche essere definito come il prezzo di consegna (da pagare in T) per un contratto forward stipulato in t (anziché in 0).

CONTRATTO FORWARD SU UN BENE CHE NON PRODUCE REDDITI NE' RICHIEDE COSTI (ALMENO) FINO ALLA DATA DI CONSEGNA

$$V^L(t) = S(t) - Kb(t,T), \qquad 0 \le t \le T \qquad \text{(a1)}$$

$$V^S(t) = -V^L(t), \qquad 0 \le t \le T$$

$$F(t,T) = \frac{S(t)}{b(t,T)} = S(t)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T \qquad \text{(a2)}$$

In particolare:

$$K = F(0,T) = \frac{S(0)}{b(0,T)} = S(0)\mathrm{e}^{rT}, \quad \text{con } r \doteq r(0,T)$$

<u>Osservazione</u>: La (a2) scende immediatamente dalla (a1) e dalla definizione di prezzo forward. Infatti

$$V^L(t) = S(t) - Kb(t,T) = 0 \iff K = \frac{S(t)}{b(t,T)} .$$

Essa, tuttavia, potrebbe anche essere ricavata direttamente, ragionando per assurdo e sfruttando, in particolare, l'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio.

<u>Dim. della (a1)</u>.

Si considerino, in $t < T$, i seguenti due portafogli.

<u>Portafoglio A</u>:

- un contratto forward in posizione lunga ("long forward"), stipulato in 0, con data di consegna T e prezzo di consegna K.

<u>Portafoglio B</u>:

- il bene sottostante il contratto forward;
- una posizione corta (debito) su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T.

A e B hanno lo stesso valore finale (in T):

$$V_A(T) = V^L(T) = S(T) - K = V_B(T),$$

e non producono alcun flusso di cassa prima di T.

$\Rightarrow$ AOA implica che A e B devono avere lo stesso valore in ogni istante precedente T:

$$V_A(t) = V_B(t) \ \ \forall t \in [0,T], \quad \text{cioè} \quad V^L(t) = S(t) - Kb(t,T) \ \ \forall t \in [0,T].$$

<u>N.B.</u>: Un contratto forward è un'attività *ridondante*, in quanto può essere replicato tramite un portafoglio costituito dalle attività di base (attività sottostante e titoli risk-free)

CASI PARTICOLARI

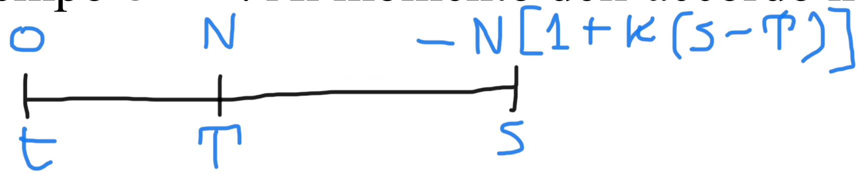
- L'attività sottostante è un titolo a cedola nulla unitario con scadenza $s > T$:

$$\Rightarrow \quad S(t) = \begin{cases} b(t,s) & \text{se } t \le s \\ 0 & \text{se } t > s \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = b(t,s) - Kb(t,T), \quad 0 \le t \le T$$

$$\Rightarrow \quad F(t,T) = \frac{b(t,s)}{b(t,T)} \doteq b(t,T,s), \qquad 0 \le t \le T$$ (prezzo forward del titolo a cedola nulla).

- Forward Rate Agreement (FRA): Viene definito come un accordo tra due parti per un prestito differito. Una parte (in posizione long) riceverà un importo monetario, indicato con N, in una data futura T, e restituirà lo stesso importo, maggiorato degli interessi al tasso prefissato k e calcolati in regime di interesse semplice, al tempo $s > T$. Al momento dell'accordo non si paga nulla.



Per $t \le T$ il valore di questo contratto è quindi pari a:

$$\Rightarrow \qquad FRA^L(t) = Nb(t,T) - N\big(1+k(s-T)\big)b(t,s)$$

da cui si ottiene il tasso k che rende $FRA^L(t) = 0$, chiamato tasso forward in t:

$$\Rightarrow \qquad k \doteq L(t,T,s) = \frac{1}{s-T}\left(\frac{b(t,T)}{b(t,s)} - 1\right) = \frac{1}{s-T}\left(\frac{1}{b(t,T,s)} - 1\right).$$

N.B.: $L(t,T,s)$ è il tasso forward implicato dalla struttura per scadenza dei prezzi forward dei titoli a cedola nulla (in regime di interesse semplice):

$$b(t,T,s) = \frac{1}{1 + L(t,T,s)(s-T)}.$$

Analogamente, si possono ricavare gli altri tassi forward:

- $r(t,T,s) = -\dfrac{1}{s-T}\ln b(t,T,s)$ (<u>intensità annua forward</u>)

  dalla $\quad b(t,T,s) = \mathrm{e}^{-r(t,T,s)\,(s-T)}$

- $i(t,T,s) = b(t,T,s)^{-\frac{1}{s-T}} - 1 = \mathrm{e}^{r(t,T,s)} - 1$ (<u>tasso annuo forward composto</u>)

  dalla $\quad b(t,T,s) = \left(1 + i(t,T,s)\right)^{-(s-T)}$

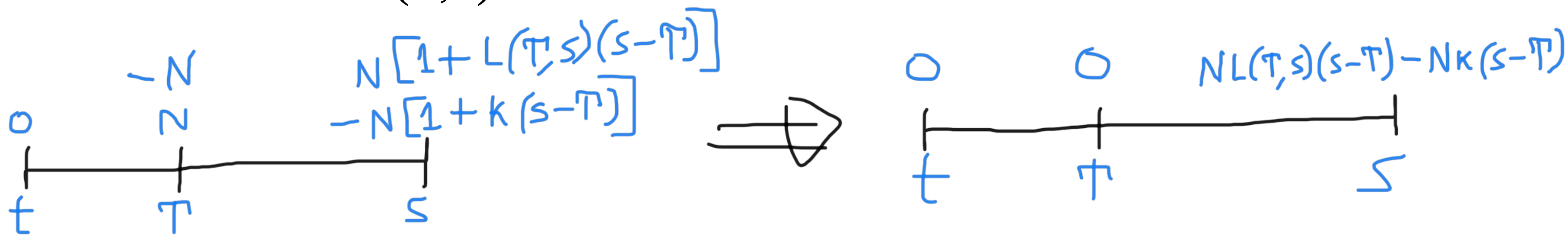
- $r^f(t,T) = \lim\limits_{s \to T^+} r(t,T,s) = -\dfrac{\partial}{\partial T}\ln b(t,T)$ (<u>intensità forward istantanea</u>)

  se i mercati sono aperti nel continuo (e il limite esiste finito)

- $r^f(t_h,t_j) = r(t_h,t_j,t_{j+1}),\ \ 0 \le h < j,$ (<u>intensità forward uniperiodale</u>)

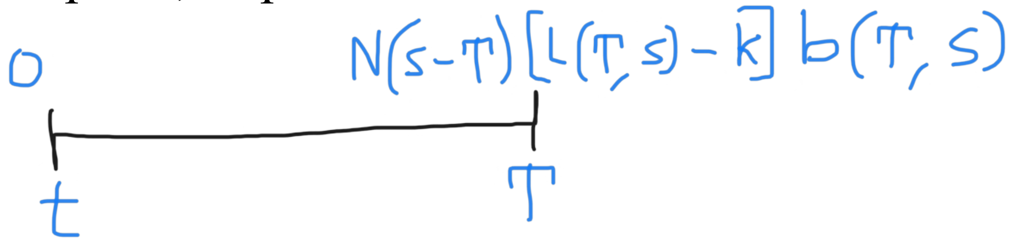
  se i mercati sono aperti nel discreto alle epoche $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots$.

Poiché l'importo N può essere immediatamente investito al tempo T per il periodo $[T,s]$ in base alle condizioni prevalenti di mercato, ovvero al tasso a pronti $L(T,s)$, spesso nella pratica non c'è scambio di capitale fra le parti ma soltanto scambio di interessi sul capitale nominale di riferimento N e per il periodo $[T,s]$: la parte in posizione long paga gli interessi al tasso fisso k, l'altra al tasso "variabile" $L(T,s)$.



⇒ La variabile sottostante è il tasso $L(T,s)$ (tasso Libor, o Euribor)

⇒ Anche se la "data di consegna" è s, poiché $L(T,s)$ è desunto dal prezzo del titolo a cedola nulla $b(T,s)$ (in regime di interesse semplice), il payoff finale è noto già al tempo T, e spesso il suo valore "scontato" viene proprio anticipato in T.



- Payoff finale di un "long FRA" in s:

$\Rightarrow$ $FRA^L(s) = N(s-T)\left(L(T,s)-k\right)$

- Valore del FRA in T (= payoff finale in T, qualora anticipato):

$\Rightarrow$ $FRA^L(T) = FRA^L(s)b(T,s) = N(s-T)\left(L(T,s)-k\right)b(T,s)$

Ricordando che $L(T,s) = \frac{1}{s-T}\left(\frac{1}{b(T,s)}-1\right)$ e sostituendo si ottiene infine:

$$\Rightarrow \qquad FRA^L(T) = N\left(1+k(s-T)\right)\left[\frac{1}{1+k(s-T)} - b(T,s)\right],$$

che corrisponde al payoff finale di $N\left(1+k(s-T)\right)$ posizioni corte in contratti forward, tutti con data di consegna T, prezzo di consegna $K = \frac{1}{1+k(s-T)}$ e variabile sottostante un titolo a cedola nulla unitario di scadenza s.

In conclusione, per $t \leq T$ abbiamo quindi:

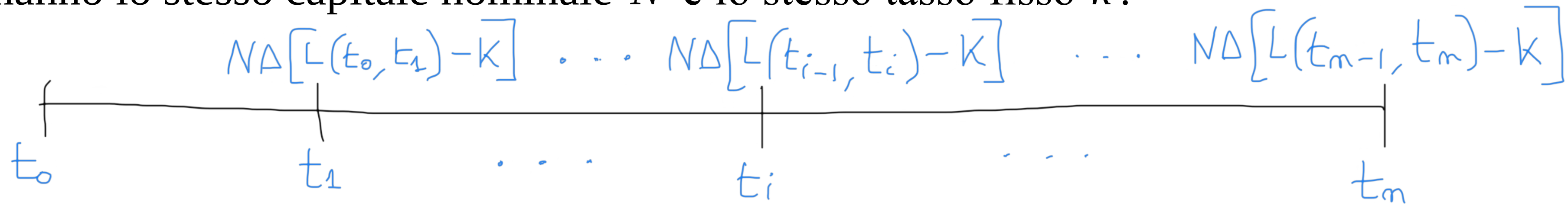
$$\Rightarrow \qquad FRA^{L}(t) = N\left(1+k(s-T)\right)V^{S}(t) = N\left(1+k(s-T)\right)\left[Kb(t,T)-b(t,s)\right]$$

$$= N\left(1+k(s-T)\right)\left[\frac{1}{1+k(s-T)}b(t,T)-b(t,s)\right]$$

$$= Nb(t,T) - N\left(1+k(s-T)\right)b(t,s),$$

come già visto precedentemente.

- <u>Swap su tassi d'interesse</u> (IRS): E' un <u>portafoglio di forward rate agreements</u> (se long $\Rightarrow$ *payer swap*, se short $\Rightarrow$ *receiver swap*) con *settlement dates* (cioè date di pagamento interessi) $\{t_i\}_{i=1}^n$ e *reset dates* (cioè date in cui il tasso variabile diventa noto) $\{t_{i-1}\}_{i=1}^n$, dove $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_n$ e $t_i - t_{i-1} = \Delta$ per $i = 1, 2, \ldots, n$. Tutti i FRA hanno lo stesso capitale nominale N e lo stesso tasso fisso k.



Valore al tempo $t_0 = 0$ di un payer swap:

$$\Rightarrow \quad SWAP^P(t_0) = \sum_{i=1}^n FRA^L(t_0, t_{i-1}, t_i) = N\sum_{i=1}^n \left[b(t_0, t_{i-1}) - (1 + k\Delta)b(t_0, t_i)\right]$$

$t \quad T \quad S$

$$= N\left[\sum_{i=1}^n [b(t_0, t_{i-1}) - b(t_0, t_i)] - k\Delta \sum_{i=1}^n b(t_0, t_i)\right] = N\left[1 - b(t_0, t_n) - k\Delta \sum_{i=1}^n b(t_0, t_i)\right]$$

(con un'ovvia modifica nella notazione dei valori dei singoli FRA).

<u>N.B.</u>: Il tasso fisso k è lo stesso per tutti i FRA, quindi non può coincidere con tutti i tassi forward $L(t_0,t_{i-1},t_i)$ al variare di i. Di conseguenza ciascun FRA può avere valore diverso da 0 (sia positivo che negativo), ma lo swap è di solito strutturato in modo tale da avere un valore iniziale (complessivo) nullo.

In particolare, il tasso fisso k che rende $SWAP^P(t_0)=0$ si chiama <u>tasso swap</u> (in t_0). Si ha pertanto:

$$\Rightarrow \quad k \doteq L^{SWAP}(t_0)=\frac{1}{\Delta}\cdot\frac{1-b(t_0,t_n)}{\sum_{i=1}^{n} b(t_0,t_i)}\ .$$

Con alcuni semplici passaggi algebrici si ottiene

$$\Rightarrow \quad L^{SWAP}(t_0)=\sum_{i=1}^{n} w_i L(t_0,t_{i-1},t_i),$$

cioè il tasso swap è una media aritmetica ponderata dei tassi forward $L(t_0,t_{i-1},t_i)$, con pesi $w_i=\dfrac{b(t_0,t_i)}{\sum_{j=1}^{n} b(t_0,t_j)}$, $i=1,2,\dots,n$.

CONTRATTO FORWARD SU UN BENE CHE PRODUCE UN DIVIDENDO CERTO

Si supponga che il bene sottostante paghi un dividendo certo, di ammontare pari a d, all'epoca τ (nota) : $0 < \tau < T$.

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = \begin{cases} \big(S(t) - db(t,\tau)\big) - Kb(t,T) & \text{se} \quad 0 \le t < \tau \\ S(t) - Kb(t,T) & \text{se} \quad \tau \le t \le T \end{cases}, \tag{b1}$$

$$\Rightarrow \quad F(t,T) = \begin{cases} \dfrac{S(t) - db(t,\tau)}{b(t,T)} = \big(S(t) - db(t,\tau)\big)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)} & \text{se} \quad 0 \le t < \tau \\ \dfrac{S(t)}{b(t,T)} = S(t)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)} & \text{se} \quad \tau \le t \le T \end{cases}. \tag{b2}$$

In particolare: $\quad K = F(0,T) = \dfrac{S(0) - db(0,\tau)}{b(0,T)} = \big(S(0) - db(0,\tau)\big)\mathrm{e}^{rT}$, con $r \doteq r(0,T)$.

<u>Dim. della (b1)</u>: esattamente come nel caso base, se $\tau \le t < T$, perché anche in questo caso il bene sottostante non paga dividendi (né richiede costi) tra t e T. Si noti che per convenzione, se $t = \tau$, abbiamo assunto che il dividendo sia già stato pagato.

Se invece $0 \le t < \tau$ basta considerare, al posto del Portafoglio B, il seguente

<u>Portafoglio C</u>:

- il bene sottostante il contratto forward;
- una posizione corta su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T;
- una posizione corta su d titoli a cedola nulla unitari con scadenza τ;

A e C non producono alcun <u>flusso netto</u> di cassa prima di T. Infatti in τ il possessore di C incasserà il dividendo d e lo utilizzerà immediatamente per rimborsare i d titoli a cedola nulla unitari giunti a scadenza. Inoltre A e C hanno lo stesso valore finale, pari a $S(T) - K$, in quanto in T i titoli a cedola nulla di scadenza τ non ci sono più.

La **<u>(b2)</u>** si ottiene poi risolvendo, rispetto a K, l'equazione $V^L(t) = 0$.

GENERALIZZAZIONI

Si supponga ora che gli eventuali redditi ("dividendi") generati dal possesso dell'attività sottostante tra 0 e T siano noti in anticipo, sia come importi che come date di pagamento.

<u>Notazione</u>:

$D(t,T)$ valore al tempo t di tutti i dividendi pagati dall'attività sottostante tra t e T

- Ad esempio, se non ci sono dividendi tra 0 e T, allora $D(t,T)=0$ per ogni $t \leq T$.
- Se invece c'è un unico dividendo certo di importo d esigibile in $\tau < T$, allora

$$D(t,T) = \begin{cases} db(t,\tau) & \text{se} \quad 0 \leq t < \tau \\ 0 & \text{se} \quad \tau \leq t \leq T \end{cases}.$$

- Più in generale, se i dividendi $\{d_i\}_{i=1}^{n}$ sono pagati ai tempi $\{t_i\}_{i=1}^{n}$, $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < T$, si ha

$$D(t,T) = \begin{cases} \sum_{t_i > t} d_i b(t,t_i) & \text{se } t < t_n \\ 0 & \text{se } t \geq t_n \end{cases}.$$

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = \big(S(t) - D(t,T)\big) - Kb(t,T), \qquad 0 \le t \le T \qquad \text{(c1)}$$

$$\Rightarrow \quad F(t,T) = \frac{S(t) - D(t,T)}{b(t,T)} = \big(S(t) - D(t,T)\big)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T \qquad \text{(c2)}$$

In particolare: $$K = F(0,T) = \frac{S(0) - D(0,T)}{b(0,T)} = \big(S(0) - D(0,T)\big)\mathrm{e}^{rT}, \text{ con } r \doteq r(0,T).$$

<u>Dim. della (c1)</u>: esattamente come nel caso base se $t \ge t_n$, altrimenti basta considerare, come secondo portafoglio, il seguente:

<u>Portafoglio D</u>:

- il bene sottostante il contratto forward;
- una posizione corta su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T;
- tante posizioni corte (debiti) su titoli a cedola nulla quante sono le date di pagamento dei dividendi successive a t (e prima di T), ciascuna con scadenza e valore nominale coincidenti con data di distribuzione del dividendo e relativo importo.

Anche in questo caso A e D non producono alcun <u>flusso netto</u> di cassa prima di T. Infatti il possessore di D utilizzerà i dividendi via via percepiti per rimborsare i titoli a cedola nulla corrispondenti. Inoltre hanno lo stesso valore finale, pari a $S(T) - K$.

CONTRATTO FORWARD SU UN BENE CHE PRODUCE DIVIDENDI NEL CONTINUO

Supponiamo ora che

(i) il bene sottostante produca dividendi nel continuo;

(ii) tali dividendi vengano via via utilizzati per acquistare quantità addizionali del bene stesso;

(iii) i dividendi pagati dal bene sottostante in ogni fissato intervallo di tempo siano proporzionali al valore del bene e all'ampiezza dell'intervallo, a meno di un termine d'errore "trascurabile".

Notazione:

$d(v, v+\Delta v)$ dividendi prodotti da una quantità unitaria di bene sottostante nell'intervallo di tempo $(v, v+\Delta v)$

$q \ (>0)$ intensità di dividendo

$n(v)$ quantità di bene sottostante disponibile al tempo v

Formalizzando la (iii) si ha:

$$d(v,v+\Delta v)=qS(v)\Delta v+o_1(\Delta v), \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta v\to 0}\frac{o_1(\Delta v)}{\Delta v}=0.$$

Tenendo conto delle ipotesi (i)-(iii) si ha inoltre:

$$n(v+\Delta v)-n(v)=\frac{n(v)d(v,v+\Delta v)}{S(v)}+o_2(\Delta v), \text{ con } \quad \lim_{\Delta v\to 0}\frac{o_2(\Delta v)}{\Delta v}=0.$$

Sostituendo $d(v,v+\Delta v)$ nell'espressione precedente e dividendo entrambi i membri per Δv si ha infine:

$$\frac{n(v+\Delta v)-n(v)}{\Delta v}=qn(v)+\frac{o_3(\Delta v)}{\Delta v}, \quad \text{con} \quad \lim_{\Delta v\to 0}\frac{o_3(\Delta v)}{\Delta v}=\lim_{\Delta v\to 0}\left(\frac{n(v)}{S(v)}\cdot\frac{o_1(\Delta v)}{\Delta v}+\frac{o_2(\Delta v)}{\Delta v}\right)=0.$$

Osservando che il secondo membro ammette limite finito quando $\Delta v\to 0$, si può concludere che la funzione n è derivabile, con derivata logaritmica pari alla costante q:

$$n'(v)=qn(v).$$

Si ha quindi $n(v)=\mathrm{e}^{qv+C_1}=C_2\mathrm{e}^{qv}$, con $C_2=\mathrm{e}^{C_1}$.

La costante moltiplicativa C_2 può essere determinata se si conosce la quantità $n(u)$ disponibile in un'epoca $u < v$: $C_2 e^{qu} = n(u) \Rightarrow C_2 = n(u)e^{-qu}$.

Infine, sostituendo C_2, si ottiene $n(v) = n(u)e^{q(v-u)}$.

$\Rightarrow$ La quantità di bene disponibile evolve come il montante nel regime esponenziale con intensità q.

$\Rightarrow$ In particolare, tornando ai contratti forward, se si parte in $t < T$ con una quantità di bene pari a $n(t)$, la quantità disponibile alla data di consegna T sarà aumentata a $n(T) = n(t)e^{q(T-t)}$.

$\Rightarrow$ Se l'obiettivo è quello di avere <u>il</u> bene sottostante in T (cioè in <u>quantità unitaria</u>), basta partire da una quantità inferiore, pari a $e^{-q(T-t)}$, in t.

Si consideri allora il seguente

Portafoglio E:

- $n(t) = \mathrm{e}^{-q(T-t)}$ unità di bene sottostante;
- una posizione corta su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T.

E non produce alcun flusso netto di cassa prima di T, in quanto i dividendi vengono utilizzati per comprare bene sottostante. In T la disponibilità di bene è pari a $n(T) = 1$, di valore $S(T)$.

$\Rightarrow$ Anche in questo caso A ed E hanno lo stesso valore finale, non producono flussi di cassa intermedi, e quindi devono avere lo stesso prezzo in ogni istante

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} - Kb(t,T), \quad F(t,T) = \frac{S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}}{b(t,T)} = S(t)\mathrm{e}^{(r(t,T)-q)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T.$$

In particolare: $$K = F(0,T) = \frac{S(0)\mathrm{e}^{-qT}}{b(0,T)} = S(0)\mathrm{e}^{(r-q)T}, \qquad \text{con } r \doteq r(0,T)$$

Casi particolari

- contratti forward su valuta estera (q = intensità d'interesse nel paese estero);
- contratti forward su indici azionari o su fondi comuni d'investimento.

CONTRATTO FORWARD SU UNA MERCE CHE RICHIEDE COSTI DI MAGAZZINO CERTI (sia come importi, che come date di pagamento)

Notazione:

$A(t,T)$ valore in t di tutti i costi derivanti dal possesso del bene sottostante fra t e T

$$\Rightarrow \quad V^L(t) = \big(S(t) + A(t,T)\big) - Kb(t,T), \qquad 0 \le t \le T \qquad \text{(d1)}$$

$$\Rightarrow \quad F(t,T) = \frac{S(t) + A(t,T)}{b(t,T)} = \big(S(t) + A(t,T)\big)\mathrm{e}^{r(t,T)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T \qquad \text{(d2)}$$

In particolare: $$K = F(0,T) = \frac{S(0) + A(0,T)}{b(0,T)} = \big(S(0) + A(0,T)\big)\mathrm{e}^{rT}, \text{ con } r \doteq r(0,T).$$

Dim. della (d1): come nei casi precedenti, salvo considerare come secondo il

Portafoglio F:

- il bene sottostante il contratto forward;
- una posizione corta su K titoli a cedola nulla unitari con scadenza T;
- tanti titoli a cedola nulla (in posizione lunga) quante sono le date di pagamento dei costi di magazzino, ciascuno con scadenza e valore nominale "corrispondenti".

Anche in questo caso A e F hanno lo stesso valore finale, pari a $S(T) - K$, e non producono alcun flusso netto di cassa prima di T. Infatti il possessore di F utilizzerà i rimborsi dei titoli in scadenza per pagare via via i costi di magazzino.

CONTRATTO FORWARD SU UN BENE CHE RICHIEDE COSTI NEL CONTINUO

Supponiamo che

(i) il possesso del bene sottostante richieda costi da sostenere nel continuo, con intensità $a\ (>0)$;

(ii) tali costi siano pagati "in natura", cedendo via via quantità di bene.

In tal caso $\qquad n(T) = n(t)\mathrm{e}^{-a(T-t)}$

⇒ La quantità di bene disponibile evolve come il valore attuale nel regime esponenziale con intensità a.

⇒ Il secondo portafoglio sarà costituito da $n(t) = \mathrm{e}^{a(T-t)} (>1)$ unità di bene sottostante (oltre alle posizioni corte su K titoli a cedola nulla con scadenza T).

⇒ $V^L(t) = S(t)\mathrm{e}^{a(T-t)} - Kb(t,T), \qquad F(t,T) = \dfrac{S(t)\mathrm{e}^{a(T-t)}}{b(t,T)} = S(t)\mathrm{e}^{\left(r(t,T)+a\right)(T-t)}, \quad 0 \le t \le T$

In particolare: $\qquad K = F(0,T) = \dfrac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)} = S(0)\mathrm{e}^{(r+a)T}, \qquad$ con $r \doteq r(0,T)$

MERCI DI CONSUMO E MERCI SPECULATIVE

Nel caso delle merci si usa spesso distinguere tra "merci di consumo", anche dette *commodities* (tipo prodotti agricoli, zootecnici, materie prime utilizzate nei processi produttivi, …) e "merci speculative", che invece vengono detenute come una forma d'investimento (ad es. oro e argento).

La distinzione nasce dal fatto che, mentre le merci speculative si possono effettivamente trovare depositate presso qualche intermediario finanziario e quindi sono disponibili per la vendita allo scoperto (al pari dei titoli azionari ed obbligazionari), può non essere così per le merci di consumo, che non rimangono inutilizzate in quanto servono nei processi produttivi oppure devono venire consumate perché deteriorabili.

Le relazioni precedenti relative alla valutazione dei contratti forward e, in particolare, alla determinazione del prezzo forward, rimangono valide nel caso delle merci speculative mentre non è detto che lo siano per le merci di consumo.

Tanto per fissare le idee, concentriamoci sul prezzo forward in 0 (cioè K) nel caso appena visto di un bene che richiede costi nel continuo, con intensità a, pagati tramite cessione del bene, e supponiamo che la relazione teorica che abbiamo ricavato sia violata in tal senso:

$$K > \frac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)} \; .$$

Allora in 0 si potrebbero fare le seguenti operazioni:

a) vendere a termine il bene (costo nullo);

b) procurarsi l'importo $S(0)\mathrm{e}^{aT}$ tramite la vendita allo scoperto di $\dfrac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)}$ titoli a cedola nulla di scadenza T;

c) acquistare a pronti la quantità e^{aT} di bene sottostante (pagando $S(0)\mathrm{e}^{aT}$).

$\Rightarrow$ Il saldo in 0 generato da queste transazioni è nullo;
$\Rightarrow$ non ci sono flussi di cassa prima di T in quanto per pagare i costi si cede via via bene sottostante;
$\Rightarrow$ in T la quantità di bene disponibile è unitaria, e viene consegnata incassando il prezzo di consegna K. Si rimborsano inoltre i bond in scadenza pagando $\dfrac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)}$.

Ciò che abbiamo appena costruito sarebbe un'opportunità di arbitraggio del I tipo, in quanto:

⇒ a costo nullo

⇒ permette di ottenere un payoff finale certo pari a $K - \dfrac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)} > 0$

(in realtà basterebbe molto meno, ovvero che il payoff finale fosse ≥ 0 con probabilità 1 e > 0 con probabilità > 0),

e si può creare sia nel caso di merci speculative che in quello di merci di consumo.

⇒ Siccome per ipotesi non ci sono opportunità di arbitraggio, la relazione teorica non può essere violata nel senso ipotizzato,

⇒ $K \leq \dfrac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)}$.

Se invece fosse $K < \dfrac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)}$ si potrebbe creare un'opportunità di arbitraggio del I tipo facendo le operazioni opposte a prima se la merce è speculativa. Precisamente in 0 bisognerebbe:

a) acquistare a termine il bene sottostante (costo nullo);

b) vendere allo scoperto la quantità e^{aT} di bene, incassando $S(0)\mathrm{e}^{aT}$;

c) investire il ricavato nell'acquisto di $\dfrac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)}$ titoli a cedola nulla di scadenza T.

$\Rightarrow$ Anche queste operazioni comportano un saldo nullo e non generano pagamenti prima di T. In particolare, avendo venduto allo scoperto il bene, il "debito" espresso in quantità di bene diminuisce via via nel tempo per effetto dei costi (effetto opposto a quello dei dividendi), e quindi la quantità da restituire in T è unitaria.

$\Rightarrow$ Giunti in T incassiamo il valore nominale dei bond, pari a $\dfrac{S(0)\mathrm{e}^{aT}}{b(0,T)}$, paghiamo K e riceviamo il bene, che restituiamo per chiudere l'operazione di vendita allo scoperto.

⇒ Tutto ciò comporterebbe dunque un'opportunità di arbitraggio del I tipo essendo il payoff finale $\frac{S(0)e^{aT}}{b(0,T)} - K > 0$ (con probabilità 1 in quanto certo).

⇒ Se la merce è speculativa non può essere $K < \frac{S(0)e^{aT}}{b(0,T)}$, e dunque $K = \frac{S(0)e^{aT}}{b(0,T)}$.

Se invece la merce è di consumo, non è detto che sia disponibile per la vendita allo scoperto, per cui le operazioni precedenti potrebbero non essere realizzabili e dunque potrebbe sussistere la relazione $K < \frac{S(0)e^{aT}}{b(0,T)}$ senza che ciò comporti la presenza di opportunità di arbitraggio.

⇒ In tal caso si usa chiamare *convenience yield* ("tasso di convenienza") l'intensità $y > 0$ che rende $K = \frac{S(0)e^{(a-y)T}}{b(0,T)} = S(0)e^{(r+a-y)T}$ (con $r \doteq r(0,T)$).

⇒ y agisce come l'intensità di dividendo q, solo che non è fissata a priori bensì è ricavata a posteriori osservando il prezzo di consegna K che si forma sul mercato;

⇒ la quantità $r + a - y$ viene anche chiamata *cost of carry*.

INTRODUZIONE DI FRIZIONI SUL MERCATO

Come si è visto, le ipotesi di lavoro precedentemente introdotte sono molto potenti, e ci consentono di determinare in maniera univoca il prezzo forward e il valore di un contratto forward semplicemente “osservando” il prezzo corrente di mercato del bene sottostante, senza bisogno di fare alcun tipo di ipotesi probabilistiche sull'evoluzione futura di quest'ultimo, cioè senza bisogno di un “modello”. Per questo motivo le relazioni fin qui ottenute si dicono anche *model-free*, o *distribution-free*. Purtroppo non sarà invece così per altri tipi di derivati, come ad esempio le opzioni.

Non solo l’assenza di opportunità di arbitraggio, ma tutte le ipotesi introdotte concorrono all'ottenimento di questi risultati. Se si rimuove anche una sola di esse, il valore del contratto e il prezzo forward non potranno più essere individuati in maniera precisa. Per illustrare ciò, a titolo di esempio proviamo a rimuovere qualcuna di esse, cioè ad introdurre *frizioni* sul mercato. A questo scopo concentriamoci direttamente sul prezzo forward in 0, nel caso base di un bene che non produce redditi né richiede costi fino alla data di consegna T .

<u>Tasso debitore diverso dal tasso creditore</u>

Supponiamo che sia ancora ammessa la vendita allo scoperto dei titoli a cedola nulla, cioè l'<u>indebitamento a tasso certo</u>, ma ad un prezzo diverso da quello che si deve pagare quando questi titoli vengono acquistati. Rimane valida invece la possibilità di vendere allo scoperto l'attività rischiosa allo stesso prezzo che si deve pagare per l'acquisto.

Indichiamo con $b^{\mathrm{d}}(0,T)$ il prezzo che si ricava dalla vendita allo scoperto, in 0, di un titolo a cedola nulla di scadenza T, e rispettivamente con $b^{\mathrm{c}}(0,T)$ quello che si deve pagare per acquistare tale titolo.

$\Rightarrow$ "d" sta per <u>debito</u> (posizione *short* nel titolo), "c" per <u>credito</u> (posizione *long*)

Supponiamo che $b^{\mathrm{d}}(0,T) < b^{\mathrm{c}}(0,T)$, cosicché i tassi corrispondenti

$$r^{\mathrm{d}} \doteq -\frac{1}{T}\ln b^{\mathrm{d}}(0,T), \qquad r^{\mathrm{c}} \doteq -\frac{1}{T}\ln b^{\mathrm{c}}(0,T)$$

sono legati dalla relazione $r^{\mathrm{d}} > r^{\mathrm{c}} \Rightarrow$ tasso "debitore" > "tasso "creditore", come di solito succede nella pratica.

⇒ Sotto tale ipotesi (assieme a tutte le altre) dimostriamo che il prezzo di consegna $K = F(0,T)$ deve soddisfare la seguente relazione:

$$\frac{S(0)}{b^{\mathrm{c}}(0,T)} \le K \le \frac{S(0)}{b^{\mathrm{d}}(0,T)}, \quad \text{ovvero} \quad S(0)\mathrm{e}^{r^{\mathrm{c}}T} \le K \le S(0)\mathrm{e}^{r^{\mathrm{d}}T}$$

⇒ c'è un intervallo di valori, non degenere, in cui deve cadere il prezzo forward onde evitare opportunità di arbitraggio

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che la relazione (tesi) sia violata.

- Se $K < \dfrac{S(0)}{b^{\mathrm{c}}(0,T)}$ in 0 facciamo le seguenti operazioni a saldo nullo, che non generano flussi di cassa prima di T:

  (a) compriamo a termine il bene sottostante (costo 0);
  (b) vendiamo allo scoperto il bene sottostante, incassando $S(0)$;
  (c) investiamo il ricavato nell'acquisto di $\dfrac{S(0)}{b^{\mathrm{c}}(0,T)}$ titoli a cedola nulla scadenti in T.

  In T incassiamo il valore nominale dei bond, paghiamo il prezzo di consegna K e riceviamo il bene, che restituiamo per chiudere l'operazione di vendita allo scoperto.

$\Rightarrow$ In questo modo otteniamo un payoff certo, pari a $\dfrac{S(0)}{b^{\mathrm{c}}(0,T)} - K > 0$.

$\Rightarrow$ Quanto descritto costituirebbe dunque un'opportunità di arbitraggio del I tipo!

- Se invece $K > \dfrac{S(0)}{b^{\mathrm{d}}(0,T)}$ in 0 facciamo le operazioni opposte, sempre a saldo nullo:

(a) vendiamo a termine il bene sottostante (costo 0);

(b) ci procuriamo l'importo $S(0)$ vendendo allo scoperto $\dfrac{S(0)}{b^{\mathrm{d}}(0,T)}$ titoli a cedola nulla di scadenza T;

(c) compriamo a pronti il bene sottostante (costo $S(0)$).

In T consegniamo il bene incassando il prezzo di consegna K e rimborsiamo il valore nominale dei bond venduti allo scoperto.

$\Rightarrow$ In questo modo otteniamo un payoff certo, pari a $K - \dfrac{S(0)}{b^{\mathrm{d}}(0,T)} > 0$.

$\Rightarrow$ Si tratterebbe dunque di un'opportunità di arbitraggio del I tipo!

Costi di transazione

Supponiamo ora che sia violata l'ipotesi di assenza di costi di transazione (ma non quella di assenza di tasse) per quanto riguarda le transazioni che hanno per oggetto l'attività rischiosa, mentre continuiamo a supporre che non ci siano costi se operiamo su titoli a cedola nulla; torniamo inoltre al caso in cui tasso debitore e tasso creditore coincidono.

Indichiamo con:

c^{LF} la commissione da pagare per comprare a termine il bene sottostante,

c^{SF} la commissione da pagare per vendere a termine il bene sottostante,

c^{LS} la commissione da pagare per comprare a pronti il bene sottostante,

c^{SS} la commissione da pagare per vendere a pronti (allo scoperto) il bene sottostante.

$\Rightarrow$ "*LF*" e "*SF*" stanno per *Long Forward* e, rispettivamente, *Short Forward*;

"*LS*" e "*SS*" stanno per *Long Spot* e, rispettivamente, *Short Spot* (o *Short Selling*)

Dimostriamo che il prezzo di consegna $K = F(0,T)$ deve soddisfare la seguente relazione:

$$\frac{S(0) - c^{LF} - c^{SS}}{b(0,T)} \leq K \leq \frac{S(0) + c^{SF} + c^{LS}}{b(0,T)}$$

<u>Dimostrazione</u>:

Supponiamo per assurdo che la relazione (tesi) sia violata.

- Se $K < \dfrac{S(0) - c^{LF} - c^{SS}}{b(0,T)}$ in 0 facciamo le seguenti operazioni a saldo nullo, che non generano flussi di cassa prima di T:

  (a) vendiamo allo scoperto il bene sottostante, incassando $S(0) - c^{SS}$;

  (b) compriamo a termine il bene sottostante, pagando la commissione c^{LF};

  (c) investiamo quello che ci rimane nell'acquisto di $\dfrac{S(0) - c^{LF} - c^{SS}}{b(0,T)}$ titoli a cedola nulla di scadenza T.

  In T incassiamo il valore nominale dei bond, paghiamo il prezzo di consegna K e riceviamo il bene, che restituiamo per chiudere l'operazione di vendita allo scoperto.

  $\Rightarrow$ In questo modo otteniamo un payoff certo, pari a $\dfrac{S(0) - c^{LF} - c^{SS}}{b(0,T)} - K > 0$.

  $\Rightarrow$ Quanto descritto costituirebbe dunque un'opportunità di arbitraggio del I tipo!

- Se invece $K > \dfrac{S(0)+c^{SF}+c^{LS}}{b(0,T)}$ in 0 facciamo le operazioni opposte:

  (a) ci procuriamo l'importo $S(0)+c^{SF}+c^{LS}$ vendendo allo scoperto $\dfrac{S(0)+c^{SF}+c^{LS}}{b(0,T)}$ titoli a cedola nulla di scadenza T;

  (b) vendiamo a termine il bene sottostante, pagando la commissione c^{SF};

  (c) compriamo a pronti il bene sottostante, pagando $S(0)+c^{LS}$.

  In T consegniamo il bene incassando il prezzo di consegna K e rimborsiamo il valore nominale dei bond venduti allo scoperto.

  $\Rightarrow$ In questo modo otteniamo un payoff certo, pari a $K - \dfrac{S(0)+c^{SF}+c^{LS}}{b(0,T)} > 0$.

  $\Rightarrow$ Si tratterebbe dunque di un'opportunità di arbitraggio del I tipo!

Ovviamente se manteniamo l'ipotesi che $b^{\mathrm{d}}(0,T) < b^{\mathrm{c}}(0,T)$ (che ha lo stesso effetto dell'introduzione di costi di transazione anche per i titoli a cedola nulla), l'intervallo si allarga ulteriormente (dimostrazione analoga alle precedenti):

$$\frac{S(0)-c^{LF}-c^{SS}}{b^{\mathrm{c}}(0,T)} \le K \le \frac{S(0)+c^{SF}+c^{LS}}{b^{\mathrm{d}}(0,T)}$$

CONTRATTI FUTURES

Analogie con i contratti forward

- definizione del contratto
- finalità
- definizione di *prezzo futures*, come quel particolare prezzo di “consegna” che rende nullo, in $t \in [0,T]$, il valore del contratto.

Notazione:

$\{ f(t,T); 0 \le t \le T \}$ processo stocastico dei prezzi futures

- Anche qui si parte da un "prezzo di consegna" pari al prezzo futures iniziale:

$$K = f(0,T),$$

e alla scadenza il prezzo futures coincide con il prezzo a pronti:

$$f(T,T) = S(T).$$

Differenze dai contratti forward

- i contratti futures sono trattati in Borsa, e quindi sono standardizzati sia nella quantità che nel tipo di bene sottostante, e nella durata;
- la standardizzazione potrebbe comportare del “basis risk” quando i futures sono usati per motivi di copertura;

  Es. produttore di grano che stipula un contratto in posizione short, ma non esistono futures con attività sottostante il grano da lui prodotto, bensì ce ne sono con un altro tipo di grano, di qualità “simile”: se $S(t)$ è il prezzo a pronti del grano sottostante i contratti futures e $\tilde{S}(t)$ quello del grano da lui prodotto, l’effetto finale sarà

  $$\underbrace{K - S(T)}_{\text{dai futures}} \quad + \quad \underbrace{\tilde{S}(T)}_{\text{vendita a pronti del grano}} \quad = K + \left[\tilde{S}(T) - S(T)\right] \neq K \quad \text{in generale}$$

- il rapporto contrattuale nei contratti futures è gestito da una stanza di compensazione ("Clearing House"), organismo di controllo che, agendo come intermediario in tutte le transazioni su futures, garantisce la corretta esecuzione del contratto e sovrintende alla formazione dei prezzi futures, fissati giornalmente;

- il rischio di insolvenza tra le parti è praticamente assente, per la presenza dei margini;
- raramente ha luogo la consegna del bene sottostante, bensì viene regolata in contanti la differenza fra $f(T,T)$ ed $f(0,T)$;
- raramente il contratto viene portato fino a scadenza, bensì viene chiuso prima assumendo una posizione opposta (a costo nullo);
- nei rari casi in cui è prevista la consegna del bene sottostante, di solito non viene stabilita una precisa data di consegna, bensì un intero mese di consegna (*"delivery month"*), ed è la parte venditrice che ha diritto di scegliere, nell'ambito di questo mese, la data precisa in cui effettuare la consegna (*"delivery option"*). Tuttavia, siccome le ipotesi di lavoro precedentemente introdotte consentono, nella maggior parte dei casi, di stabilire, a seconda del bene sottostante, quando è ottimale consegnare, ciò diviene irrilevante in quanto si considera come data di consegna proprio quella ottimale:

$\Rightarrow$ prima possibile se $f(t,T)$ cresce con $T-t$ (es. caso base, merci, valute estere quando gli interessi pagati nel conto estero sono inferiori a quelli domestici, …)

$\Rightarrow$ più tardi possibile se $f(t,T)$ decresce con $T-t$ (es. valute estere quando gli interessi pagati nel conto estero sono superiori a quelli domestici, …).

MECCANISMO DEL *"MARKING-TO-MARKET"*

La differenza $f(T,T) - f(0,T)$ a chi è in posizione lunga (o $f(0,T) - f(T,T)$ a chi è in posizione corta), anziché venir regolata in blocco, alla scadenza T, viene regolata giorno per giorno.

Supponendo di misurare il tempo in giorni, e che T sia un intero, alla fine di ogni giornata (cioè in $t = 1, 2, ..., T$) vengono regolate le seguenti differenze:

$$f(1,T) - f(0,T),\ \ f(2,T) - f(1,T),\ \ ...,\ \ f(T,T) - f(T-1,T) \qquad \text{“long futures”}$$

$$f(0,T) - f(1,T),\ \ f(1,T) - f(2,T),\ \ ...,\ \ f(T-1,T) - f(T,T) \qquad \text{“short futures”}$$

Anche se la somma algebrica di tali differenze coincide con $f(T,T) - f(0,T)$ per il long futures (e con $f(0,T) - f(T,T)$ per lo short), in realtà esse vengono investite in attività prive di rischio, per cui il loro montante in T è in generale diverso.

Se c'è consegna fisica al tempo T piuttosto che regolamento in contanti, la parte in posizione lunga paga $f(T-1,T)$ (anziché $f(0,T)$) e riceve il bene sottostante.

⇒ Questo meccanismo realizza un aggiornamento giornaliero del "prezzo di consegna", di modo che il contratto ha valore nullo al termine di ogni giornata di contrattazione.

⇒ E' proprio grazie ad esso che si può entrare in un contratto già in essere (al prezzo futures corrente) in ogni momento senza pagar nulla.

UGUAGLIANZA TRA PREZZI FORWARD E PREZZI FUTURES

<u>Teorema</u>: *Sotto le ipotesi di lavoro precedentemente enunciate e, inoltre, sotto l'ipotesi che i prezzi dei titoli a cedola nulla con scadenza T siano <u>deterministici</u>, si ha* $f(t,T) = F(t,T)$, $t = 0,1,...,T$ (nonostante il meccanismo del marking to market).

<u>Dim.</u>: Sappiamo già che $f(T,T) = F(T,T)\ (= S(T))$. Prima di dimostrare che tale relazione vale anche per $t = 0,1,...,T-1$, descriviamo la seguente strategia dinamica su futures, che inizia in un fissato istante t $(t = 0,1,...,T-1)$ e termina in T.

data	cash-flow generato	valore in T	nuove posizioni long	pos. totali
t			$b(t+1,T)$	$b(t+1,T)$
$t+1$	$[f(t+1,T) - f(t,T)]b(t+1,T)$	$f(t+1,T) - f(t,T)$	$b(t+2,T) - b(t+1,T)$	$b(t+2,T)$
$t+2$	$[f(t+2,T) - f(t+1,T)]b(t+2,T)$	$f(t+2,T) - f(t+1,T)$	$b(t+3,T) - b(t+2,T)$	$b(t+3,T)$
…	…	…	…	…
$T-1$	$[f(T-1,T) - f(T-2,T)]b(T-1,T)$	$f(T-1,T) - f(T-2,T)$	$1 - b(T-1,T)$	1
T	$f(T,T) - f(T-1,T)$	$f(T,T) - f(T-1,T)$		

Tale strategia non richiede costi, perché le nuove posizioni su futures sono a costo nullo (si entra infatti al prezzo futures corrente), e non produce flussi di cassa intermedi perché i cash-flow generati dalle posizioni futures vengono immediatamente usati per comprare/vendere allo scoperto titoli a cedola nulla con scadenza T. Il cash-flow finale, in T, è quindi dato dal valore di rimborso netto di tutti questi titoli, pari a $\left[f(T,T) - f(t,T) \right]$.

N.B.: (quasi) tutte le ipotesi sono state sfruttate per costruire la strategia, ad es. possibilità di vendite allo scoperto, perfetta divisibilità dei titoli, …, prezzi dei bond deterministici (altrimenti non sarebbe possibile, ai tempi $t,...,T-2$, assumere un numero di posizioni pari ai prezzi futuri $b(t+1,T),...,b(T-1,T)$).

Ai fini della dimostrazione del teorema fondamentale, si considerino, in t $(=0,1,...,T-1)$, i seguenti due portafogli.

Portafoglio A:

- strategia appena descritta;
- $f(t,T)$ titoli a cedola nulla unitari con scadenza T (in posizione lunga).

Portafoglio B:

- una posizione lunga su un nuovo contratto forward (quindi con $K = F(t,T)$);
- $F(t,T)$ titoli a cedola nulla unitari con scadenza T (in posizione lunga).

$\Rightarrow$ A e B non generano flussi netti di cassa prima di T;

inoltre in T hanno lo stesso valore finale:

$$V_A(T) = \left[f(T,T) - f(t,T) \right] + f(t,T) = f(T,T) = S(T)$$

$$V_B(T) = \left[F(T,T) - F(t,T) \right] + F(t,T) = F(T,T) = S(T)$$

$\Rightarrow$ Per evitare opportunità di arbitraggio, anche in t devono avere lo stesso valore:

$$V_A(t) = 0 + f(t,T)b(t,T) = f(t,T)b(t,T),$$

$$V_B(t) = 0 + F(t,T)b(t,T) = F(t,T)b(t,T),$$

quindi, essendo $b(t,T) > 0$, si ha $f(t,T) = F(t,T)$ (cioè la tesi).

N.B.: In tutto ciò è cruciale l'ipotesi che i prezzi dei titoli a cedola nulla siano deterministici (non solo per la dimostrazione), perché è possibile trovare degli esempi con prezzi stocastici in cui non vale l'uguaglianza.

Illustriamo, in maniera del tutto intuitiva, uno di questi esempi.

A tale scopo rimuoviamo l'ipotesi che i prezzi dei titoli a cedola nulla $b(t,T)$ siano deterministici per cui, di conseguenza, risulteranno stocastici anche i corrispondenti tassi $r(t,T)$. Concentriamoci sul processo stocastico dei prezzi futures f che si formano sul mercato per una fissata scadenza T e supponiamo, ad esempio, che le variabili di tale processo siano positivamente correlate con le corrispondenti variabili del processo r (sempre per la scadenza T).

L'idea intuitiva della correlazione positiva tra due variabili aleatorie è che le stesse si muovano nella medesima direzione: quindi ci si aspetta che, se ad esempio r aumenta da un giorno all'altro, cioè $r(t+1,T) > r(t,T)$, allora lo stesso avvenga per il prezzo futures f, ovvero $f(t+1,T) - f(t,T) > 0$, e viceversa nel caso di una diminuzione.

Immaginando di avere una posizione long in un contratto futures, e che le differenze positive vengano investite in titoli a cedola nulla di scadenza T (cioè capitalizzate col tasso corrispondente r), mentre per pagare l'opposto di quelle negative ci si indebiti vendendo allo scoperto gli stessi titoli, ci si aspetta che

- $\Rightarrow$ le differenze positive risultino "amplificate", in quanto investite ad un tasso più alto rispetto a quello del giorno precedente
- $\Rightarrow$ le differenze negative risultino "smorzate", in quanto capitalizzate ad un tasso minore rispetto a quello del giorno precedente

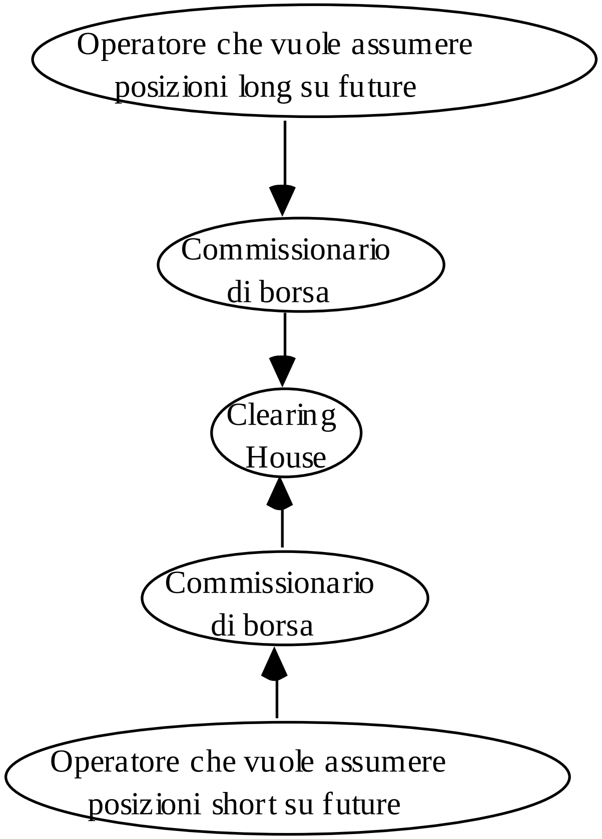
La supposta correlazione positiva non influenza affatto i prezzi forward in quanto le uniche date rilevanti sono quella della stipula, ad es. 0, e la data di consegna T, e quindi tutto viene regolato sulla base del tasso $r(0,T)$.

- $\Rightarrow$ a parità di prezzi forward e futures $F(0,T) = f(0,T)$, risulterebbe dunque preferibile acquisire posizioni long su contratti futures piuttosto che forward, e questo porterebbe alla creazione di opportunità di arbitraggio che si potrebbero ad esempio sfruttare entrando long sui futures e short sui forward
- $\Rightarrow$ per evitare questo (o per effetto dell'operato massivo degli agenti in tale direzione) dovrà dunque essere $F(0,T) < f(0,T)$.

Ovviamente le conclusioni sarebbero opposte nel caso di correlazione negativa tra prezzi futures e tassi, che porterebbe ad un'amplificazione delle differenze negative e ad un'attenuazone di quelle positive generate dalle posizioni long su contratti futures.

I MARGINI NEI CONTRATTI FUTURES

Come già detto, i contratti futures sono trattati esclusivamente in Borsa. Ad essi si accede attraverso una rete di intermediari. Nel caso più semplice, in cui ci si rivolga direttamente a commissionari di borsa che siano anche membri della Clearing House, i passaggi sono i seguenti:



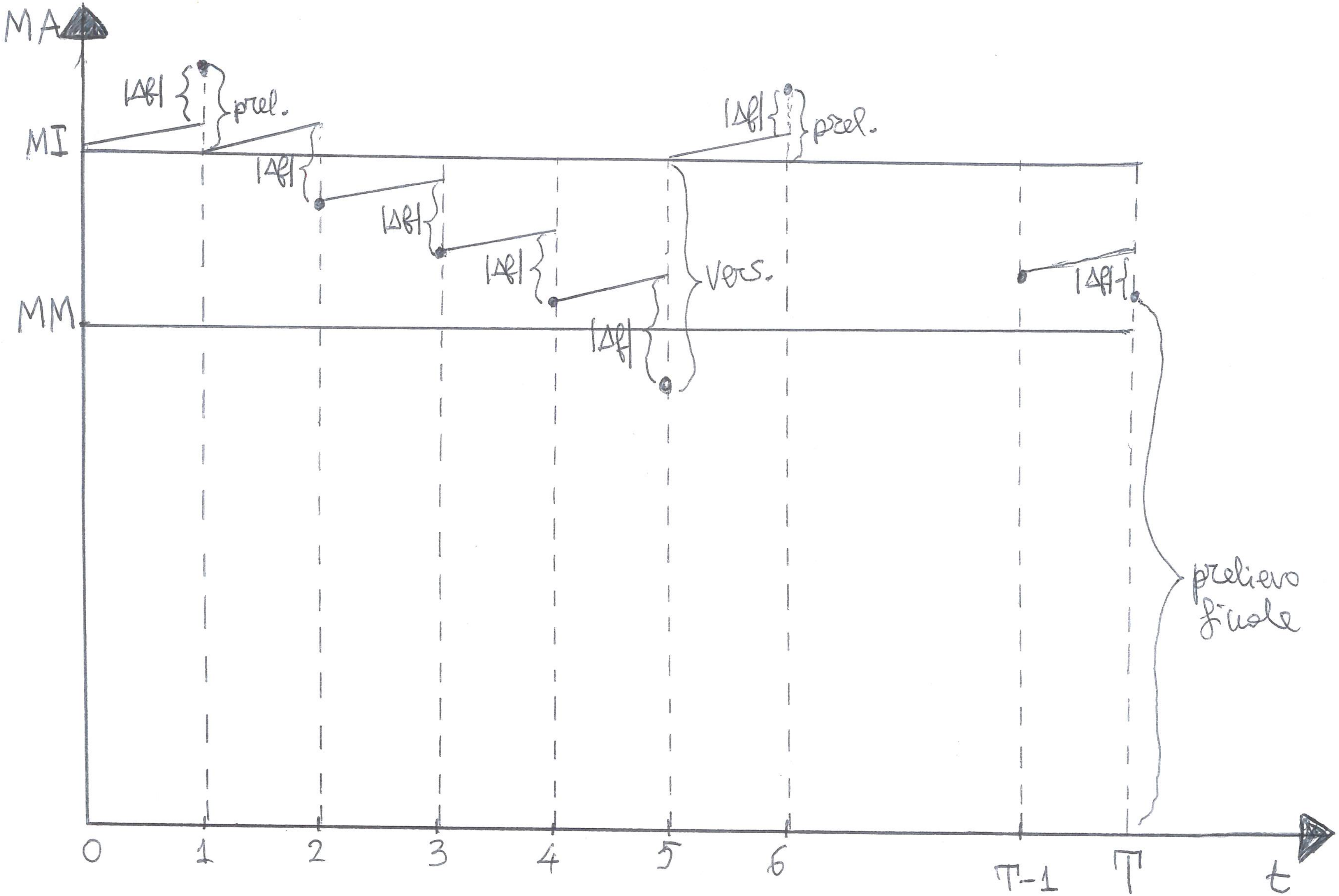
Quindi tra operatori e Clearing House non c'è alcun tipo di rapporto. Siccome le posizioni su futures possono implicare degli obblighi (qualora le variazioni nel prezzo futures siano sfavorevoli), sono richiesti dei depositi di garanzia (*margini*), che al termine saranno recuperati, assieme ai relativi interessi (⇒ non costituendo un costo, non influenzano i prezzi futures "teorici").

I commissionari di borsa rispondono direttamente nei confronti della Clearing House per gli impegni assunti, e devono pertanto tenere un deposito di garanzia presso la stessa.

Gli operatori, invece, si impegnano nei confronti dei commissionari, e allora anche ad essi viene richiesto un deposito (in contanti, titoli di stato, azioni della Clearing House) presso gli stessi.

Concentriamoci ora su quest'ultimo, che funziona come un conto corrente (*"margin account"*, MA):

- All'inizio dell'operazione viene richiesto il deposito del *"margine iniziale"* (MI), ad es. pari al 5% del prezzo futures iniziale, che viene depositato nel c/c.
- Su questo conto vengono accreditati gli (eventuali) interessi e inoltre vengono addebitate/accreditate le variazioni giornaliere nel prezzo futures.
- Se, in seguito a variazioni favorevoli nel prezzo future, il valore del margin account supera quello del margine iniziale, (usualmente) le eccedenze possono essere prelevate dall'operatore.
- Onde evitare di chiedere frequentemente all'operatore di versare fondi addizionali qualora variazioni sfavorevoli facciano invece scendere il valore del margin account al di sotto del margine iniziale, viene fissato un *"margine di mantenimento"* (o "*margine minimo*", MM), ad es. pari al 75% del margine iniziale. Se il valore del conto scende al di sotto di MM, l'operatore deve versare (di solito entro le 24 ore successive) un importo (*"margine di variazione"*, MV) tale da ripristinare MI.
- Alla scadenza, o comunque quando si chiude il contratto, l'operatore riceve il saldo del conto.



$$\Delta f = \begin{cases} f(t,T) - f(t-1,T) & (\text{long}) \\ f(t-1,T) - f(t,T) & (\text{short}) \end{cases}$$

OPZIONE

E' un titolo che conferisce al suo possessore il diritto di comprare (opzione *call*) o di vendere (opzione *put*) l'attività sottostante ad un prezzo prefissato, detto *prezzo di esercizio* o *prezzo base* (*"strike price"* o *"exercise price"*).

N.B.: Chi possiede l'opzione (cioè è in posizione lunga sulla stessa) ha soltanto il diritto, non l'obbligo, di comprare/vendere l'attività sottostante al prezzo di esercizio, e può anche decidere di non esercitare questo diritto (differenza dai contratti forward). Invece il sottoscrittore (o emittente) dell'opzione (in posizione corta) ha l'obbligo di adeguarsi alla volontà della controparte.

L'opzione ha una scadenza (*"maturity"*). Essa viene detta *Europea* se il diritto può essere esercitato soltanto alla scadenza, *Americana* se il diritto può essere esercitato anche prima della scadenza. In caso di esercizio anticipato (cioè prima della scadenza) di un'opzione americana, l'opzione si estingue.

N.B.: Questa terminologia non ha niente a che vedere con i mercati nei quali le opzioni sono trattate (che possono essere sia borse ufficiali che mercati OTC).

Le attività sottostanti le opzioni possono essere di vario tipo: azioni, obbligazioni, indici di borsa, tassi d'interesse, merci, valute estere, …, ma potrebbe trattarsi anche di derivati, ad es. opzioni (⇒ *compound options*), contratti futures (⇒ *futures options*), swaps (⇒ *swaptions*), … .

Nel caso di un futures il possessore dell'opzione ha diritto di entrare in una data futura (scadenza dell'opzione, o anche prima, se la stessa è Americana) nel contratto futures ad un prezzo di esercizio, che funge da "prezzo di consegna" iniziale, prefissato. E' proprio a partire da questo prezzo di esercizio che verrà calcolata la prima differenza, rispetto al prezzo futures nel giorno successivo, da accreditare/addebitare nel margin account.

⇒ Se l'opzione viene esercitata, si entra col prezzo di esercizio anziché col prezzo futures corrente alla data di esercizio.

Nel caso di uno swap il possessore dell'opzione ha diritto di entrare in una data futura (scadenza dell'opzione, o anche prima, se la stessa è Americana) nel contratto swap pagando (*payer swaption*), o incassando (*receiver swaption*), alle successive settlement dates, gli interessi a tasso fisso ad un tasso di esercizio prefissato, anziché al tasso swap corrente alla data di esercizio.

D'ora innanzi ci concentreremo sul caso standard di un bene sottostante "fisico". Tuttavia, anche nel caso delle opzioni è del tutto irrilevante, ai fini della valutazione, che il contratto si chiuda con la consegna fisica del bene oppure con lo scambio della differenza tra prezzo a pronti dello stesso e prezzo di esercizio.

<u>Notazione</u>:

0	data di emissione dell'opzione
T	data di scadenza
K	prezzo di esercizio
$\{S(t); t \geq 0\}$	processo stocastico del prezzo del bene sottostante
$\{c(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del prezzo di un'opzione call europea
$\{p(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del prezzo di un'opzione put europea
$\{C(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del prezzo di un'opzione call americana
$\{P(t); 0 \leq t \leq T\}$	processo stocastico del prezzo di un'opzione put americana

PAYOFF ALLA SCADENZA DI UN'OPZIONE CALL EUROPEA

Le ipotesi di lavoro precedentemente enunciate, e in particolare quella di agenti razionali e non saziati, ci consentono di dire che l'opzione verrà esercitata se $S(T) > K$, non verrà esercitata se $S(T) < K$, sarà indifferente esercitarla o meno se $S(T) = K$. Quindi, dal punto di vista di chi possiede l'opzione, si ha:

$$c(T) = \begin{cases} S(T) - K & \text{se } S(T) > K \\ 0 & \text{se } S(T) \leq K \end{cases} = \max\{S(T) - K, 0\}$$

Il payoff di chi ha emesso l'opzione è invece l'opposto:

$$-c(T) = -\max\{S(T) - K, 0\} = \min\{K - S(T), 0\}$$

$\Rightarrow$ Visto che il payoff dell'opzione è (quasi) certamente ≥ 0, onde evitare opportunità di arbitraggio del II tipo anche il suo prezzo, $c(t)$, deve essere $\geq 0 \quad \forall t \in [0,T)$.

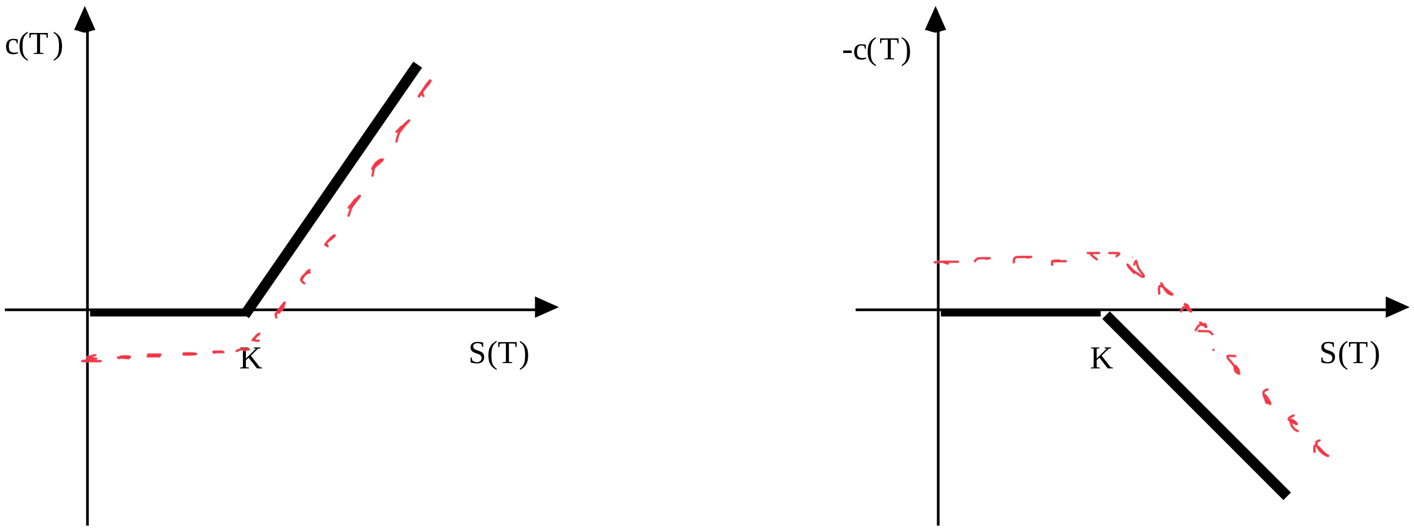
p.a. $-c(t) > 0$ $\qquad$ $c(T) \geq 0$ q.c.

t $\qquad$ T

$\Rightarrow$ Se inoltre, subordinatamente allo stato d'informazione disponibile al tempo $t < T$, la probabilità dell'evento $\{S(T) > K\}$ è > 0, per evitare opportunità di arbitraggio del I tipo anche $c(t)$ deve essere > 0.

p.a. $-c(t) = 0$ $\qquad$ $c(T)$ ≥ 0 q.c.
> 0 con prob. > 0

t $\qquad$ T



(margini)

PAYOFF ALLA SCADENZA DI UN'OPZIONE PUT EUROPEA

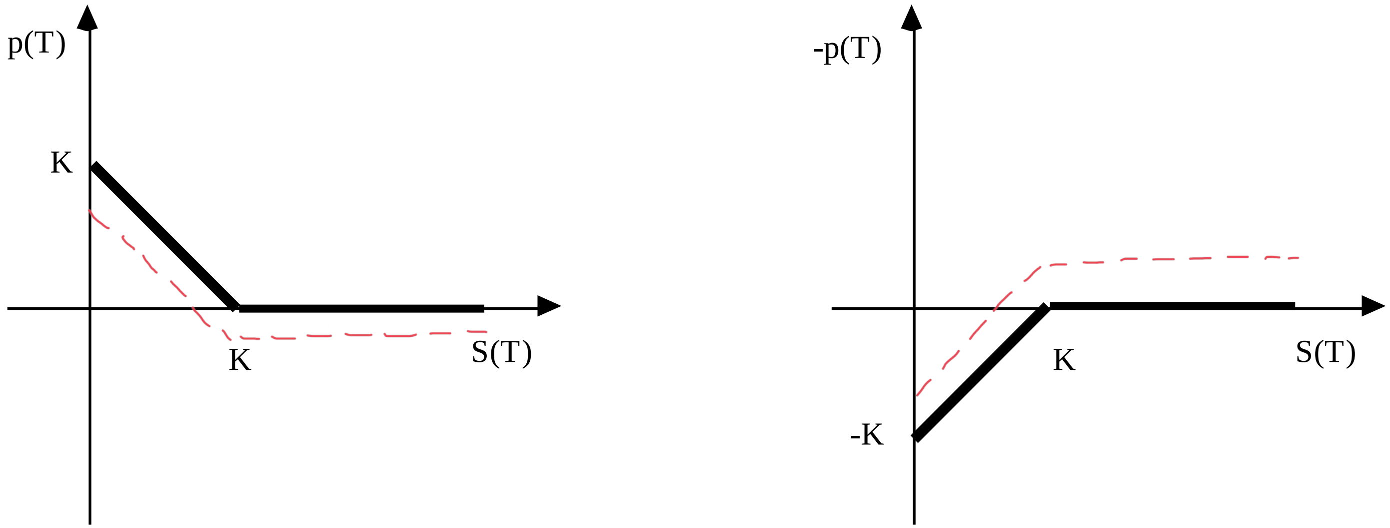
Simmetricamente, la put verrà esercitata se $S(T) < K$, non verrà esercitata se $S(T) > K$, sarà indifferente esercitarla o meno se $S(T) = K$. Quindi, dal punto di vista di chi possiede l'opzione, si ha:

$$p(T) = \begin{cases} K - S(T) & \text{se } S(T) < K \\ 0 & \text{se } S(T) \geq K \end{cases} = \max\{K - S(T), 0\}$$

Il payoff di chi ha emesso l'opzione è invece l'opposto:

$$-p(T) = -\max\{K - S(T), 0\} = \min\{S(T) - K, 0\}$$

$\Rightarrow$ Le stesse considerazioni di prima ci portano a dire che $p(t) \geq 0 \quad \forall t \in [0, T)$. Se inoltre, subordinatamente all'informazione disponibile al tempo $t < T$, l'evento $\{S(T) < K\}$ ha probabilità > 0, allora $p(t) > 0$.



(margini)

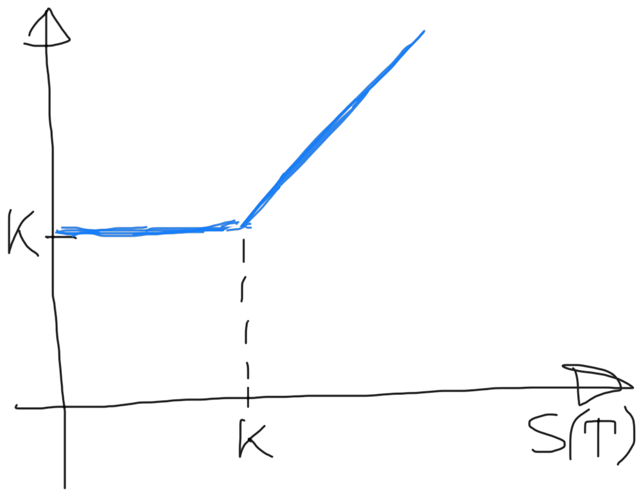
FINALITA' CHE POSSONO INDURRE
A STIPULARE CONTRATTI DI OPZIONE

- copertura da un rischio (come nel caso dei contratti forward e futures). Assumendo posizioni lunghe su opzioni, dietro pagamento del premio ci si copre soltanto dall'eventualità di variazioni sfavorevoli nel prezzo del sottostante, approfittando invece delle variazioni favorevoli.
- "speculazione". Si assumono sia posizioni lunghe che posizioni corte.

Assicurazione di portafoglio

Supponiamo di avere a disposizione un certo capitale da investire per un fissato orizzonte temporale T. E' un momento in cui le borse stanno andando molto bene, per cui siamo attratti dall'investimento in un indice azionario di valore $S(t)$. Nello stesso tempo, però, siccome si tratta di un investimento rischioso, temiamo che le cose in futuro non vadano altrettanto bene e che il valore finale dell'indice $S(T)$, al momento del disinvestimento, sia "basso". Per eliminare questo rischio fissiamo un livello minimo per esso, indicato con K (ad es. pari all'investimento iniziale, oppure ad una percentuale dello stesso). Il nostro obiettivo è quindi quello di avere, dal nostro investimento, un "payoff finale" pari a

$$\begin{cases} S(T) & \text{se } S(T) \geq K \\ K & \text{se } S(T) < K \end{cases} = \max\{S(T), K\}$$



Se le cose stanno così, diciamo che il nostro portafoglio è assicurato a livello K.

Per raggiungere questo obiettivo abbiamo due alternative: investire direttamente nell'indice oppure in titoli a cedola nulla, e acquistare opzioni. Vediamo come:

<u>Garanzie di minimo</u>

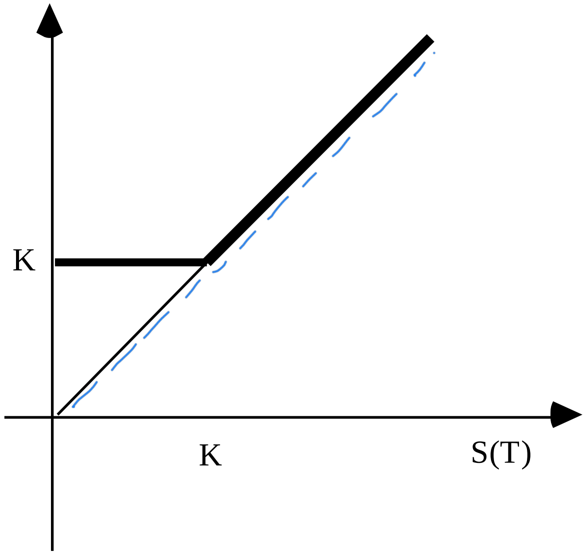
Osservando che $\max\{S(T), K\} = S(T) + \max\{0, K - S(T)\}$ si può pensare di

a) acquisire l'investimento rischioso di payoff finale $S(T)$

b) comprare un'opzione put con attività sottostante l'indice azionario, prezzo di esercizio K e scadenza T

$\Rightarrow$ l'opzione put ci consente di acquisire la garanzia di minimo

$\Rightarrow$ Il costo della put rappresenta il costo (o premio) dell'assicurazione di portafoglio



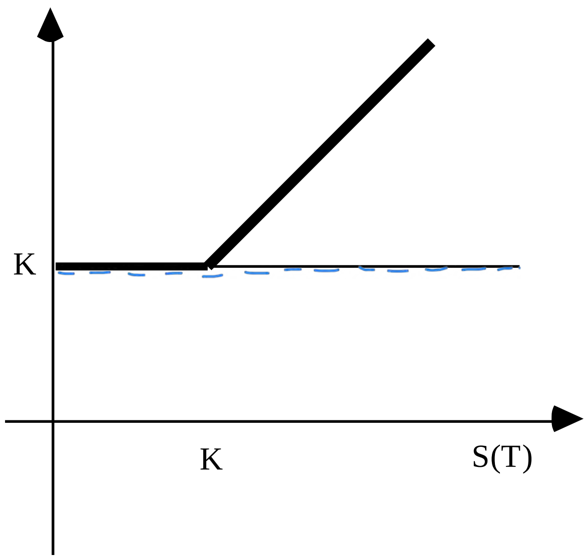
<u>"Partecipazione" all'indice</u> (*Bonus*)

Osservando che $\max\{S(T), K\} = K + \max\{S(T) - K, 0\}$ si può pensare, in alternativa, di

c) comprare K titoli a cedola nulla di scadenza T

d) comprare un'opzione call con attività sottostante l'indice azionario, prezzo di esercizio K e scadenza T

$\Rightarrow$ l'opzione call ci consente di beneficiare dell'andamento positivo della Borsa, partecipando al *surplus* rispetto a K



Abbiamo appena costruito due portafogli che hanno lo stesso payoff finale e non generano alcun flusso di cassa intermedio (il valore dell'indice di Borsa evolve nel tempo in maniera aleatoria, ma non paga dividendi)

⇒ Per evitare opportunità di arbitraggio questi due portafogli devono avere lo stesso valore in ogni istante precedente T

⇒ $S(t)+p(t)=Kb(t,T)+c(t), \quad t<T$

⇒ La relazione appena ottenuta va sotto il nome di *put-call parity* per opzioni Europee

Le strategie appena descritte potrebbero risultare troppo onerose perché, oltre all'investimento iniziale nell'indice di Borsa piuttosto che nei titoli a cedola nulla, richiedono l'acquisto dell'opzione che, come sappiamo, richiede un costo.

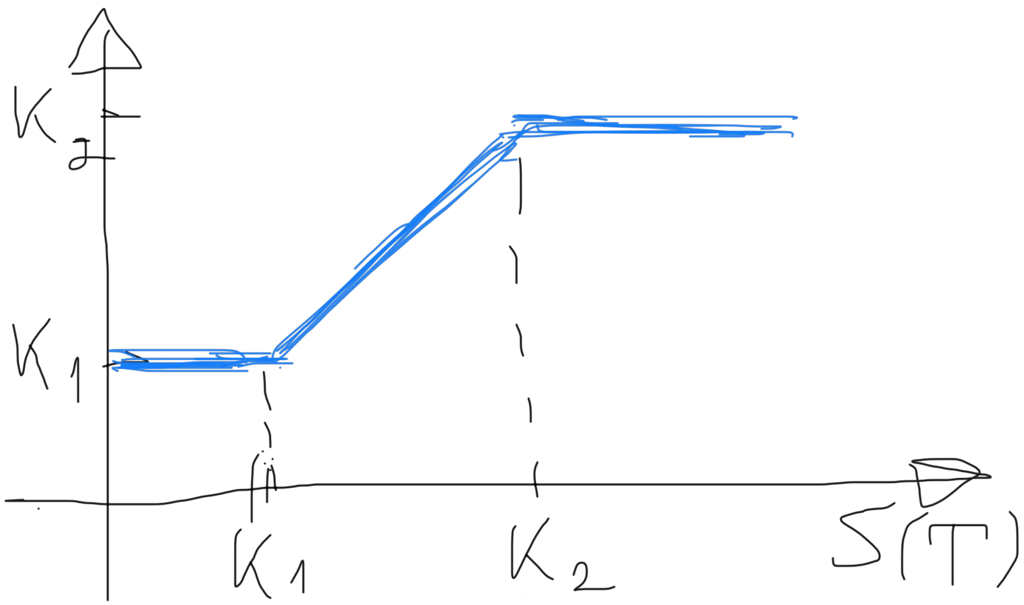
Volendo eliminare, o perlomeno ridurre, tale costo, si potrebbe rinunciare a qualcosa. Precisamente, fissata una soglia minima K_1 al di sotto della quale non si vuole scendere come payoff finale del nostro investimento (come prima), si potrebbe fissare anche una soglia massima $K_2(>K_1)$, rinunciando all'eventuale eccedenza di $S(T)$ rispetto ad essa.

L'obiettivo finale sarebbe dunque quello di ottenere

$$O(T) = \begin{cases} K_1 & \text{se } S(T) < K_1 \\ S(T) & \text{se } K_1 \le S(T) \le K_2 \\ K_2 & \text{se } S(T) > K_2 \end{cases}$$

$$= \max\{\min\{S(T), K_2\}, K_1\}$$

$$= \min\{\max\{S(T), K_1\}, K_2\}$$



Tale obiettivo potrebbe essere raggiunto in tre modi alternativi:

$$O(T) = S(T) + \underbrace{\max\left\{K_1 - S(T), 0\right\}}_{\text{payoff long put}} \underbrace{-\max\left\{S(T) - K_2, 0\right\}}_{\text{payoff short call}}$$

$$= K_1 + \underbrace{\max\left\{S(T) - K_1, 0\right\}}_{\text{payoff long call}} \underbrace{-\max\left\{S(T) - K_2, 0\right\}}_{\text{payoff short call}}$$

$$= K_2 + \underbrace{\max\left\{K_1 - S(T), 0\right\}}_{\text{payoff long put}} \underbrace{-\max\left\{K_2 - S(T), 0\right\}}_{\text{payoff short put}}$$

AOA $\Rightarrow$ $O(t) = S(t) + p\left(t; K_1\right) - c\left(t; K_2\right)$

$$= K_1 b(t,T) + c\left(t; K_1\right) - c\left(t; K_2\right)$$

$$= K_2 b(t,T) + p\left(t; K_1\right) - p\left(t; K_2\right)$$

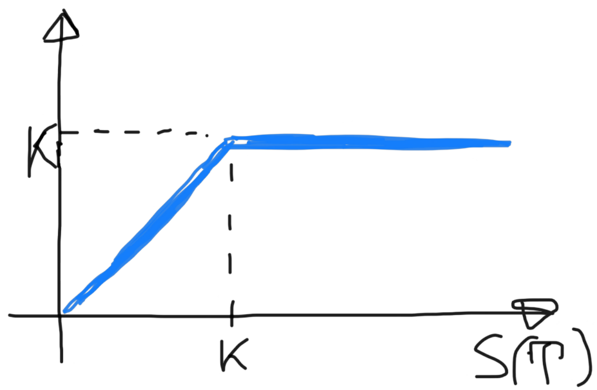
dove nei prezzi delle opzioni si è messo in evidenza anche il prezzo di esercizio.

Posizioni debitorie

Supponiamo di doverci indebitare in una data futura, con interessi da pagare o ad un tasso variabile, che si osserverà in futuro, o ad un tasso fisso. Indichiamo con $S(T)$ il montante, aleatorio, da restituire in T qualora l'indebitamento sia a tasso variabile, e con K quello relativo all'indebitamento a tasso fisso.

$\Rightarrow$ L'obiettivo del debitore potrebbe essere quello di pagare

$$\begin{cases} S(T) & \text{se } S(T) \le K \\ K & \text{se } S(T) > K \end{cases} = \min\{S(T), K\}$$



Anche qui ci sono due alternative per raggiungere tale obiettivo.

Osservando che

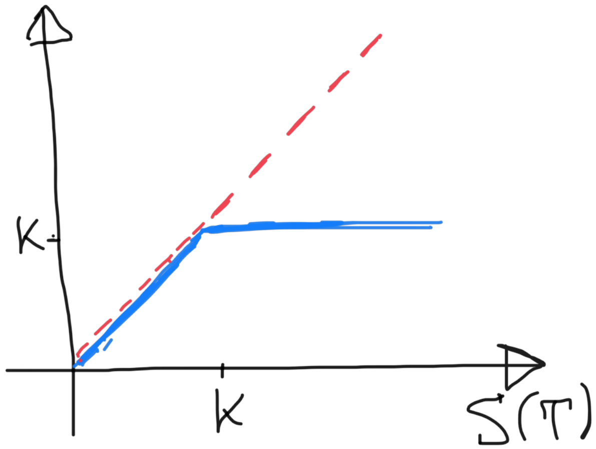
$$-\min\{S(T),K\} = -\left[S(T)+\min\{0,K-S(T)\}\right] = -\left[S(T)-\max\{0,S(T)-K\}\right]$$
$$= -S(T)+\max\{0,S(T)-K\}$$

si può pensare di

a) indebitarsi a tasso variabile impegnandosi a restituire il montante aleatorio $S(T)$

b) comprare un'opzione call Europea con attività sottostante tale montante, prezzo di esercizio K e scadenza T

$\Rightarrow$ l'opzione call ci consente di limitare superiormente l'importo da rimborsare



In alternativa, osservando che

$$-\min\{S(T),K\} = -\left[K + \min\{S(T)-K,0\}\right] = -\left[K - \max\{K-S(T),0\}\right]$$

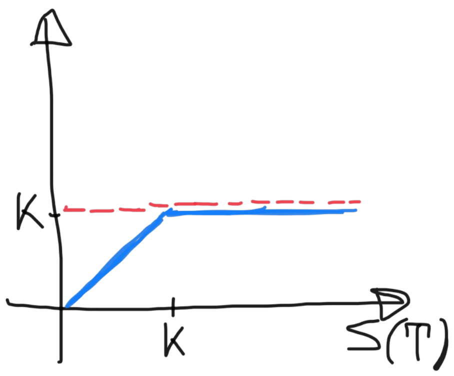
$$= -K + \max\{K - S(T),0\}$$

si può pensare di

a) indebitarsi a tasso fisso impegnandosi a restituire il montante certo K

b) comprare un'opzione put Europea con attività sottostante il montante aleatorio $S(T)$, prezzo di esercizio K e scadenza T

$\Rightarrow$ l'opzione put ci consente di pagare di meno quando $S(T) < K$



Anche qui, volendo ridurre/eliminare il costo derivante dall'acquisto delle opzioni, si potrebbe rinunciare a qualcosa, fissando non soltanto un livello massimo K_2 per il montante da restituire (esattamente come prima), ma anche un livello minimo $K_1 (< K_2)$, rinunciando quindi alla possibilità di pagare meno di K_1.

L'obiettivo finale sarebbe dunque quello di pagare

$$O(T) = \begin{cases} K_1 & \text{se } S(T) < K_1 \\ S(T) & \text{se } K_1 \le S(T) \le K_2 \\ K_2 & \text{se } S(T) > K_2 \end{cases}$$

$$= \max\left\{\min\left\{S(T), K_2\right\}, K_1\right\}$$

$$= \min\left\{\max\left\{S(T), K_1\right\}, K_2\right\}$$

Esattamente come prima, si potrebbe raggiungere l'obiettivo in tre modi alternativi, ricordando però che ora siamo debitori, anziché creditori, e quindi le posizioni sulle opzioni saranno opposte:

$$
\begin{aligned}
-O(T) &= -S(T) + \underbrace{\max\{S(T)-K_2,0\}}_{\text{payoff long call}} \underbrace{-\max\{K_1-S(T),0\}}_{\text{payoff short put}} \\
&= -K_1 + \underbrace{\max\{S(T)-K_2,0\}}_{\text{payoff long call}} \underbrace{-\max\{S(T)-K_1,0\}}_{\text{payoff short call}} \\
&= -K_2 + \underbrace{\max\{K_2-S(T),0\}}_{\text{payoff long put}} \underbrace{-\max\{K_1-S(T),0\}}_{\text{payoff short put}}
\end{aligned}
$$

In quanto segue descriviamo alcuni strumenti ad hoc effettivamente disponibili sul mercato, e precisamente opzioni, o portafogli di opzioni, con sottostante un tasso d'interesse variabile, che consentono appunto di raggiungere gli obiettivi illustrati.

CAPS/FLOORS/COLLARS/SWAPTIONS

Si supponga di dover pagare degli interessi, al tempo $T > \tau(\geq 0)$ e relativi al periodo $[\tau, T]$, su un capitale nominale di riferimento N, calcolati in regime di interesse semplice applicando il tasso variabile $L(\tau, T)$. Se si acquista un'opzione call europea ($\Rightarrow$ *caplet*) con scadenza T, variabile sottostante il tasso L e strike il tasso fisso k (applicato allo stesso capitale nominale e per lo stesso periodo), si ottiene:

$$-N(T-\tau)L(\tau,T) + N(T-\tau)\max\left\{L(\tau,T)-k,0\right\} = -N(T-\tau)\min\left\{L(\tau,T),k\right\}.$$

N.B.: Il payoff dell'opzione è già noto al tempo τ se, come di solito accade, $L(\tau,T)$ viene desunto dal prezzo del titolo a cedola nulla $b(\tau,T)$. Quindi, in questo caso, talvolta viene stabilito che la scadenza dell'opzione sia τ (anziché T), e il suo payoff sia pari a $N(T-\tau)\max\left\{L(\tau,T)-k,0\right\}b(\tau,T)$.

Un *cap* è un portafoglio di caplets, ciascuno con scadenza $i\Delta$ e variabile sottostante il tasso $L\big((i-1)\Delta,\ i\Delta\big)$, per $i = 1, 2, ..., n$. Il tasso strike k è di solito lo stesso per tutti i caplets, così come il capitale di riferimento N.

$\Rightarrow$ Un cap, combinato con un debito a tasso variabile, consente di porre un limite massimo ($\Rightarrow$ cap) al tasso d'interesse pagato.

Simmetricamente, se invece si devono pagare degli interessi al tasso fisso k e si acquista un'opzione put europea ($\Rightarrow$ *floorlet*) con scadenza T, variabile sottostante il tasso L e strike k, si perviene allo stesso risultato:

$$-N(T-\tau)k + N(T-\tau)\max\left\{k - L(\tau,T), 0\right\} = -N(T-\tau)\min\left\{L(\tau,T), k\right\}.$$

Un *floor* è un portafoglio di floorlets, ciascuno di essi con strike k, capitale nominale N, scadenza $i\Delta$ e variabile sottostante il tasso $L\big((i-1)\Delta,\ i\Delta\big)$, per $i = 1, 2, \ldots, n$.

$\Rightarrow$ Un floor, combinato con un debito a tasso fisso, consente di pagare di meno se il tasso variabile è minore del tasso fisso.

N.B.: Il termine floor ("pavimento") deriva dal fatto che, se combinato invece con un investimento a tasso variabile, consente di porre una limitazione inferiore ($\Rightarrow$ floor) al tasso d'interesse, essendo $L + \max\left\{k - L, 0\right\} = \max\left\{L, k\right\}$ (come nel caso dell'assicurazione di portafoglio).

Un *collar* è un portafoglio composto da una posizione lunga(corta) in un floor con strike k_1 e una posizione corta(lunga) in un cap con strike $k_2 > k_1$. Se combinato con una posizione lunga(corta) in un'obbligazione a tasso variabile consente di mantenere il tasso d'interesse compreso tra k_1 e k_2. Si ha infatti:

$$L + \max\{k_1 - L, 0\} - \max\{L - k_2, 0\} = \begin{cases} k_1 & \text{se } L < k_1 \\ L & \text{se } k_1 \le L \le k_2 \\ k_2 & \text{se } L > k_2 \end{cases} .$$

N.B.: Se $k_1 = k_2$, il collar degenera in un receiver(payer) swap in quanto

$$N\Delta\left(\max\{k - L(t_{i-1}, t_i), 0\} - \max\{L(t_{i-1}, t_i) - k, 0\}\right) = N\Delta(k - L(t_{i-1}, t_i)).$$

$\Rightarrow$ Il tasso swap è quel particolare strike che uguaglia i valori di caps e floors.

Una (payer/receiver) *swaption* emessa al tempo $t < t_0$ consente di entrare in un (payer/receiver) swap al tempo t_0 pagando gli interessi fissi al tasso (strike) k anziché al tasso swap corrente $L^{SWAP}(t_0)$ $\Rightarrow$ Si può vedere come un'opzione sul tasso swap L^{SWAP}.

$\Rightarrow$ Mentre caps, floors e collars possono essere espressi (dopo semplici passaggi algebrici) come portafogli di opzioni su titoli a cedola nulla, una swaption è un'opzione su un portafoglio di titoli a cedola nulla, e risulta quindi più complicata da valutare.

TERMINOLOGIA RELATIVA ALLE OPZIONI

In $t \in [0,T]$ un'opzione si dice

- *"in the money"* quando il suo (eventuale) esercizio genererebbe un flusso di cassa strettamente positivo,
- *"at the money"* quando il suo (eventuale) esercizio genererebbe un flusso di cassa nullo,
- *"out of the money"* quando il suo (eventuale) esercizio genererebbe un flusso di cassa strettamente negativo:

	call	**put**
in the money	$S(t) > K$	$S(t) < K$
at the money	$S(t) = K$	$S(t) = K$
out of the money	$S(t) < K$	$S(t) > K$

N.B. La terminologia è valida anche per le opzioni europee, pur essendo esercitabili solo alla scadenza T. Se un'opzione americana è in the money prima della scadenza, non è detto che convenga esercitarla subito; se non è in the money, sicuramente non va esercitata.

Si chiama *valore intrinseco di un'opzione*, in $t \in [0,T]$, la seguente quantità:

$$\max\{S(t)-K,0\} \qquad \textbf{call}$$

$$\max\{K-S(t),0\} \qquad \textbf{put}$$

Alla scadenza T il prezzo (payoff) di un'opzione, europea o americana, coincide con il suo valore intrinseco. Prima della scadenza, come vedremo, il prezzo di un'opzione americana è sempre ≥ del suo valore intrinseco (mentre per le opzioni europee può essere anche <). Se in particolare il prezzo di un'opzione americana è > del suo valore intrinseco, si dice che l'opzione ha *valore temporale*, dato da

$$C(t)-\max\{S(t)-K,0\} \qquad \textbf{call}$$

$$P(t)-\max\{K-S(t),0\} \qquad \textbf{put}$$

Un'opzione americana dotata di valore temporale non va assolutamente esercitata, anche se fortemente in the money (piuttosto che esercitarla conviene venderla!)

- Tutte le opzioni che hanno la stessa attività sottostante costituiscono una **classe**
- All'interno di ogni classe ci sono due **tipi** di opzioni: call e put
- Per ciascun tipo di opzione ci sono diverse **serie**, caratterizzate da diverse coppie (prezzo di esercizio, scadenza)

$\Rightarrow$ Opzioni della stessa classe hanno in comune la stessa attività sottostante

$\Rightarrow$ Opzioni dello stesso tipo sono tutte put o, rispettivamente, tutte call, con la stessa attività sottostante

$\Rightarrow$ Opzioni della stessa serie sono call o, rispettivamente, put, sulla stessa attività sottostante con lo stesso prezzo di esercizio e la stessa scadenza

STRATEGIE OPERATIVE COINVOLGENTI OPZIONI

La presenza delle opzioni arricchisce notevolmente il mercato e consente di ottenere dei profili di payoff finali molto variegati.

Sul mercato esistono dei pacchetti, o portafogli, “preconfezionati” costituiti da opzioni della stessa classe ed eventualmente anche altri beni come ad esempio l’attività sottostante e i titoli a cedola nulla.

Descriviamo ora alcuni di questi pacchetti. Come detto in precedenza, generalmente le opzioni trattate sui mercati sono di *stile* Americano. Tuttavia ci concentreremo esclusivamente su quelle Europee perché in questo modo saremo in grado di determinare il payoff a scadenza dei vari pacchetti. Inoltre, ma solo per fissare le idee, supporremo che l’attività sottostante le opzioni considerate sia un’azione.

Innanzitutto possiamo distinguere tra **posizioni scoperte** (*naked*, o *uncovered*) su opzioni e **posizioni coperte**.

Le posizioni scoperte prevedono semplicemente di acquistare o sottoscrivere un’opzione e sono quindi di quattro tipologie: *long call*, *short call*, *long put*, *short put*.

Le posizioni coperte, anche dette *hedges*, mettono insieme un'opzione, long o short, con la sua azione sottostante, in modo che l'opzione protegga l'azione oppure l'azione protegga l'opzione. Vediamo alcuni esempi di hedges. Qui e nel seguito, per convenzione, useremo numeri negativi per indicare posizioni corte su opzioni o altri titoli.

Hedge diretti

(a) 1 azione – 1 opzione call *short covered call*

(b) 1 azione + 1 opzione put *long protective put*

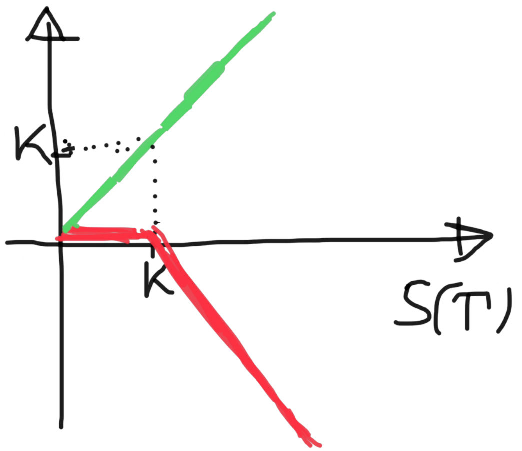
⇒ Il termine long o short fa riferimento alla posizione sull'opzione

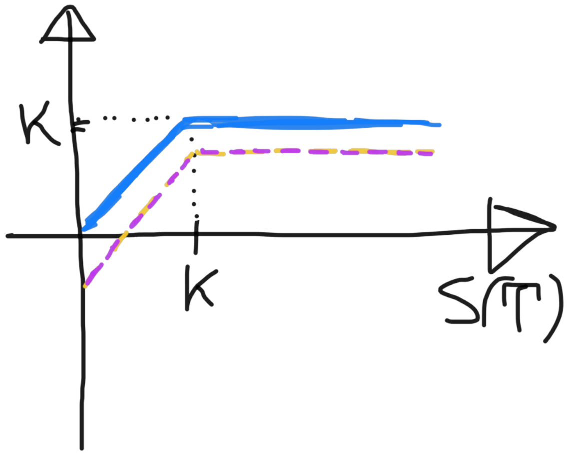
⇒ Nel caso (a) la posizione short sulla call è molto rischiosa, per cui è l'azione che protegge l'opzione

⇒ Nel caso (b) è rischiosa la posizione long sull'azione, per cui è l'opzione che protegge l'azione

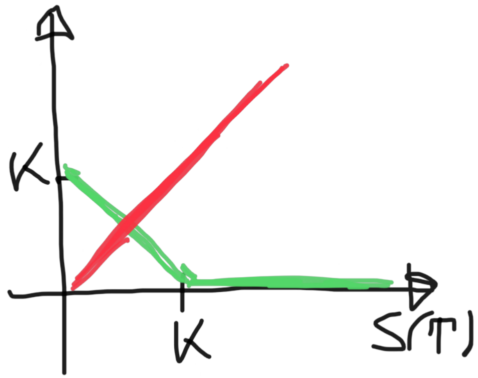
PAYOFF

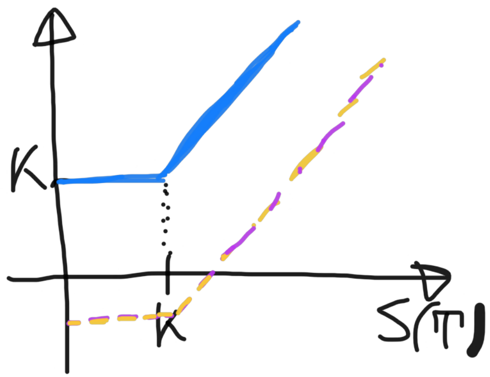
(a) $S(T)-\max\{S(T)-K,0\}=S(T)+\min\{K-S(T),0\}=\min\{K,S(T)\}$





(b) $S(T)+\max\{K-S(T),0\}=\max\{K,S(T)\}$





Hedge inversi

Si tratta esattamente delle posizioni opposte rispetto a prima, quindi con payoff opposto:

(a) – 1 azione + 1 opzione call *long covered call*

(b) – 1 azione – 1 opzione put *short protective put*

Ratio Hedges

Il numero di posizioni (long o short) sull'azione e sull'attività sottostante non coincidono.
Esempi:

(a) 1 azione – 2 opzioni call

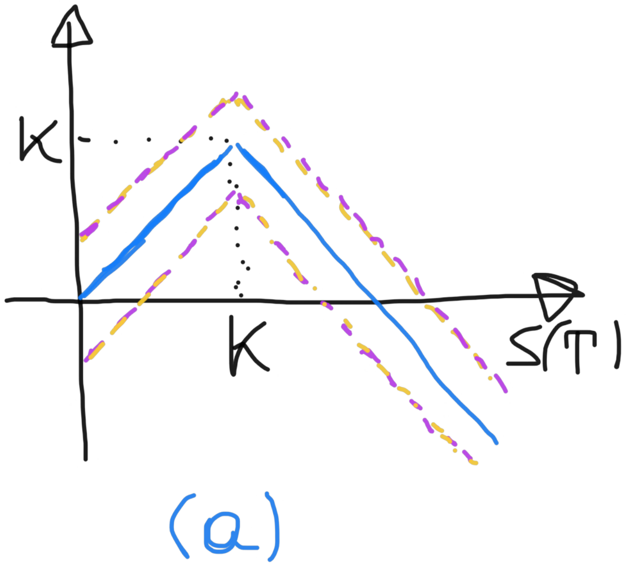
(b) 1 azione + 2 opzioni put

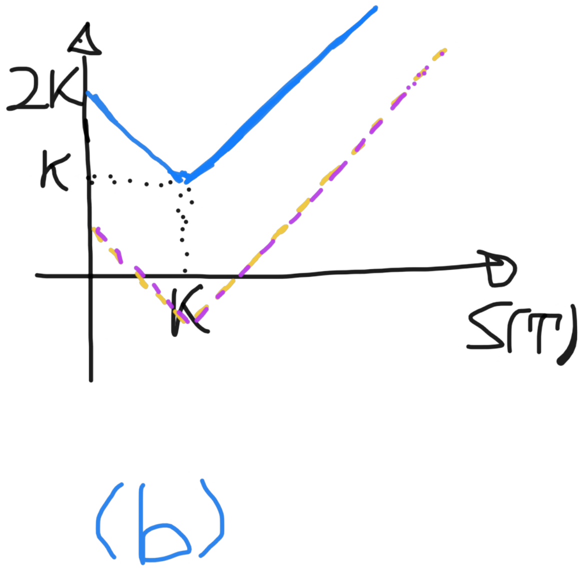
o le posizioni opposte (*Reverse Ratio Hedges*).

PAYOFF

(a) $$S(T) - 2\max\{S(T) - K, 0\} = \begin{cases} S(T) & \text{se } S(T) \le K \\ 2K - S(T) & \text{se } S(T) > K \end{cases}$$

(b) $$S(T) + 2\max\{K - S(T), 0\} = \begin{cases} 2K - S(T) & \text{se } S(T) \le K \\ S(T) & \text{se } S(T) > K \end{cases}$$





Spreads

Uno *spread* è un portafoglio di opzioni dello stesso tipo, ma di diverse serie, alcune delle quali in posizione long, altre in posizione short

⇒ In uno spread tutte le opzioni coinvolte sono call o, in alternativa, put, con la stessa attività sottostante ma diverse scadenze e/o diversi prezzi di esercizio

Gli spread si chiamano **verticali** se le opzioni coinvolte hanno la stessa scadenza ma diversi prezzi di esercizio, **orizzontali** (o *di calendario*) se hanno lo stesso prezzo di esercizio ma diverse scadenze, **diagonali** se hanno diverse scadenze e diversi prezzi di esercizio. Tale terminologia deriva dal modo in cui le quotazioni delle opzioni sono pubblicate sui giornali finanziari.

In quanto segue ci concentreremo esclusivamente sugli spread verticali, per studiarne il payoff a scadenza. Infatti, per quanto riguarda gli spread orizzontali o diagonali, in cui ad es. sono coinvolte solo due scadenze diverse, se ci mettiamo sull'ultima scadenza alcune opzioni sono già spirate e quindi non ci sono più; se ci mettiamo sulla prima non possiamo usare il payoff delle opzioni che scadono dopo ma caso mai dovremmo sostituirlo con il loro valore, solo che per ottenere tale valore bisogna ipotizzare un modello per descrivere l'evoluzione stocastica del prezzo a pronti dell'attività sottostante.

Vediamo alcuni esempi di spread verticali.

<u>Spread al rialzo</u> (*Bullish Vertical Spreads*)

(a) 1 call(K_1) – 1 call(K_2) con $K_1 < K_2$ *call bullish vertical spread*

(b) 1 put(K_1) – 1 put(K_2) con $K_1 < K_2$ *put bullish vertical spread*

⇒ Si chiamano spread al rialzo in quanto il loro payoff risulta crescente (in senso debole) rispetto al prezzo a pronti dell'azione sottostante, e quindi chi li "compra" "scommette" su un andamento rialzista di tale prezzo, ovvero su un "mercato toro".

<u>Spread al ribasso</u> (*Bearish Vertical Spreads*)

(c) 1 call(K_2) – 1 call(K_1) con $K_1 < K_2$ *call bearish vertical spread*

(d) 1 put(K_2) – 1 put(K_1) con $K_1 < K_2$ *put bearish vertical spread*

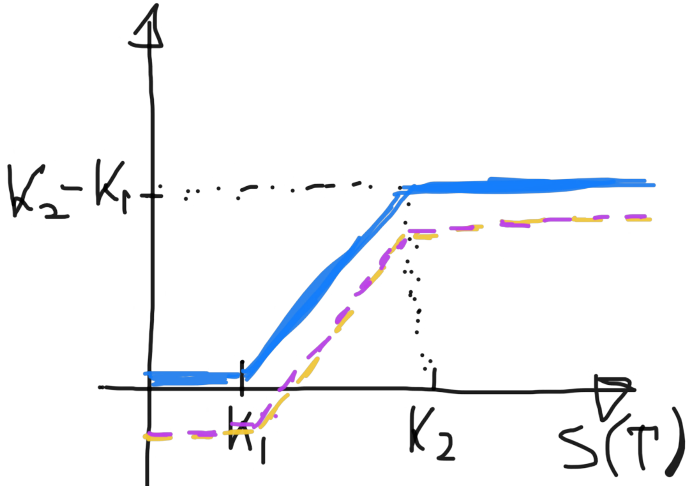
⇒ Si tratta esattamente delle posizioni opposte rispetto a prima

⇒ Si chiamano spread al ribasso in quanto il loro payoff risulta decrescente (in senso debole) rispetto al prezzo a pronti dell'azione sottostante, e quindi chi li "compra" "scommette" su un andamento ribassista di tale prezzo, ovvero su un "mercato orso".

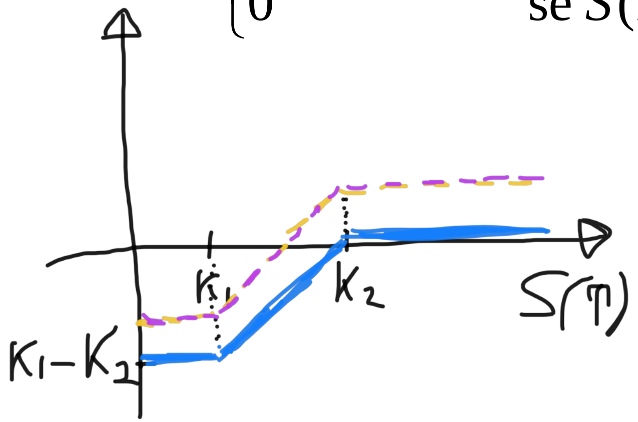
PAYOFF DEI BULLISH VERTICAL SPREADS

$$\text{(a)}\quad \max\{S(T)-K_1,0\}-\max\{S(T)-K_2,0\}=\begin{cases}0 & \text{se } S(T)<K_1\\ S(T)-K_1 & \text{se } K_1\le S(T)\le K_2\\ K_2-K_1 & \text{se } S(T)>K_2\end{cases}$$

$$\text{(b)}\quad \max\{K_1-S(T),0\}-\max\{K_2-S(T),0\}=\begin{cases}K_1-K_2 & \text{se } S(T)<K_1\\ S(T)-K_2 & \text{se } K_1\le S(T)\le K_2\\ 0 & \text{se } S(T)>K_2\end{cases}$$



(a)



(b)

Spread a farfalla (*Butterfly Spreads*)

Dati due diversi prezzi di esercizio K_1 e K_3, con $K_1 < K_3$, indichiamo con $K_2 = \dfrac{K_1 + K_3}{2}$ il loro punto medio. Possiamo allora avere i seguenti tipi di spread a farfalla:

(a) 1 call(K_1) – 2 call(K_2) + 1 call(K_3) (long) *call butterfly spread*

(b) 1 put(K_1) – 2 put(K_2) + 1 put(K_3) (long) *put butterfly spread*

(c) – 1 call(K_1) + 2 call(K_2) – 1 call(K_3) (short) *call butterfly spread*

(d) – 1 put(K_1) + 2 put(K_2) – 1 put(K_3) (short) *put butterfly spread*

⇒ Si chiamano spread a farfalla perché il loro payoff assomiglia alle ali (aperte) di una farfalla

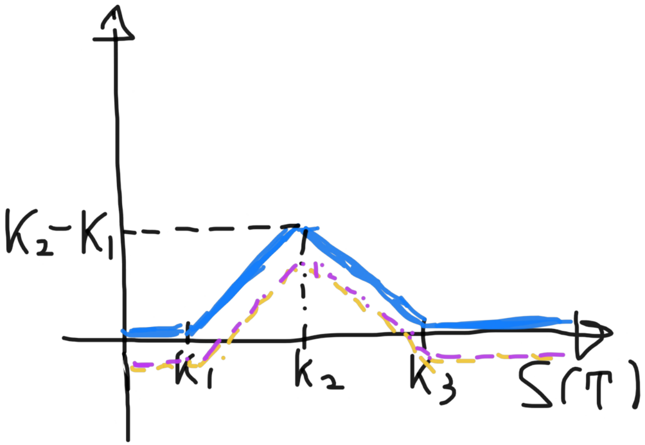
⇒ Long e short fanno riferimento a posizioni esattamente opposte: nel caso long il payoff è sempre ≥ 0 per cui si "compra" qualcosa e quindi bisogna pagare un prezzo; nel caso short, invece, tale payoff è sempre ≤ 0 per cui si "vende" qualcosa e si incassa il relativo prezzo

PAYOFF DEI LONG BUTTERFLY SPREADS

(a) $\max\{S(T)-K_1,0\}-2\max\{S(T)-K_2,0\}+\max\{S(T)-K_3,0\}=$

$$=\begin{cases} 0 & \text{se } S(T)<K_1 \\ S(T)-K_1 & \text{se } K_1\le S(T)<K_2 \\ K_3-S(T) & \text{se } K_2\le S(T)\le K_3 \\ 0 & \text{se } S(T)>K_3 \end{cases}$$

(b) $=\max\{K_1-S(T),0\}-2\max\{K_2-S(T),0\}+\max\{K_3-S(T),0\}$



Condors

Anche se di solito non vengono catalogati nell'ambito degli spread, soddisfano la definizione data all'inizio. Si tratta di una generalizzazione dei Butterflies, in cui però sono coinvolti quattro diversi prezzi di esercizio tra loro equidistanziati. Precisamente, dati K_1 e K_4, con $K_1 < K_4$, si pone $K_2 = \dfrac{2K_1 + K_4}{3}$ e $K_3 = \dfrac{K_1 + 2K_4}{3}$. Possiamo allora avere i seguenti tipi di condor:

(a) 1 call(K_1) – 1 call(K_2) – 1 call(K_3) + 1 call(K_4) (long) *call condor*

(b) 1 put(K_1) – 1 put(K_2) – 1 put(K_3) + 1 put(K_4) (long) *put condor*

(c) – 1 call(K_1) + 1 call(K_2) + 1 call(K_3) – 1 call(K_4) (short) *call condor*

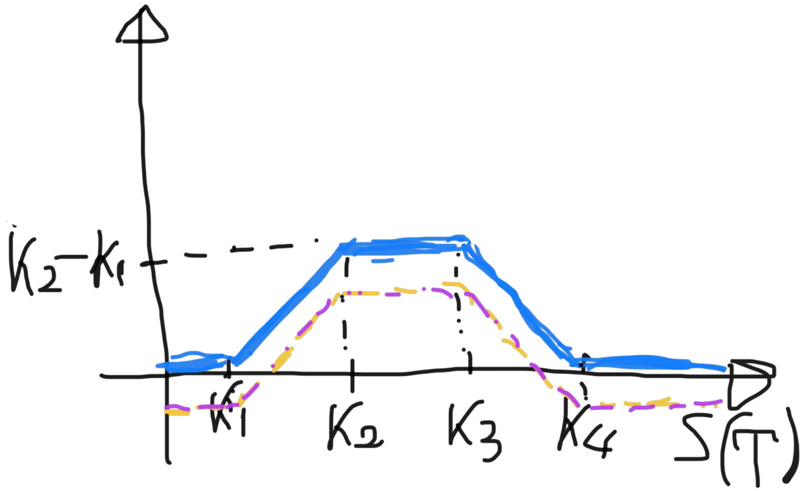
(d) – 1 put(K_1) + 1 put(K_2) + 1 put(K_3) – 1 put(K_4) (short) *put condor*

PAYOFF DEI LONG CONDORS

(a) $\max\{S(T)-K_1,0\}-\max\{S(T)-K_2,0\}-\max\{S(T)-K_3,0\}+\max\{S(T)-K_4,0\}=$

$$=\begin{cases} 0 & \text{se } S(T)<K_1 \\ S(T)-K_1 & \text{se } K_1 \le S(T) < K_2 \\ K_2-K_1 & \text{se } K_2 \le S(T) < K_3 \\ K_4-S(T) & \text{se } K_3 \le S(T) \le K_4 \\ 0 & \text{se } S(T) > K_4 \end{cases}$$

(b) $=\max\{K_1-S(T),0\}-\max\{K_2-S(T),0\}-\max\{K_3-S(T),0\}+\max\{K_3-S(T),0\}$



Combinazioni di opzioni

Una combinazione di opzioni è un portafoglio composto da opzioni della stessa classe ma di diversi tipi. Quindi in una combinazione ci sono sia opzioni call che put, tutte con la stessa attività sottostante. Vediamo ora alcuni esempi.

Straddles

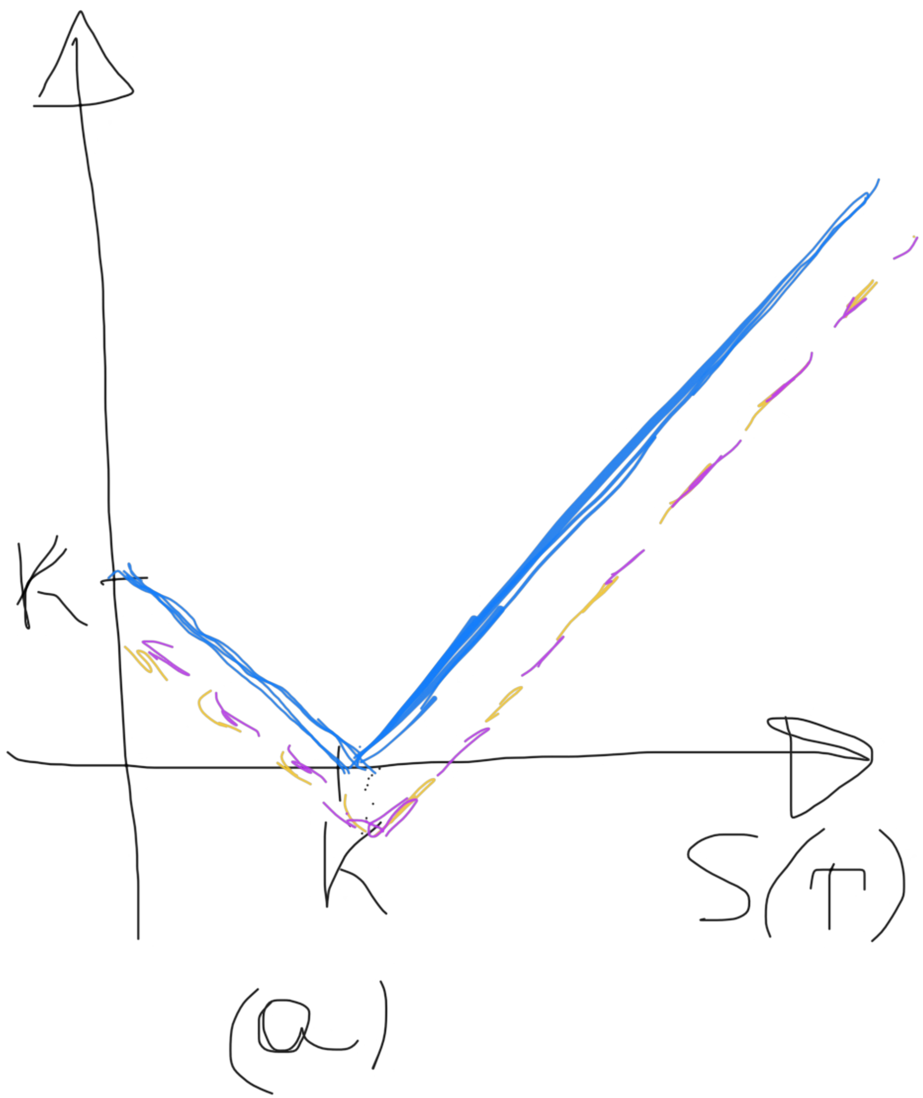
(a) 1 call + 1 put *bottom straddle*

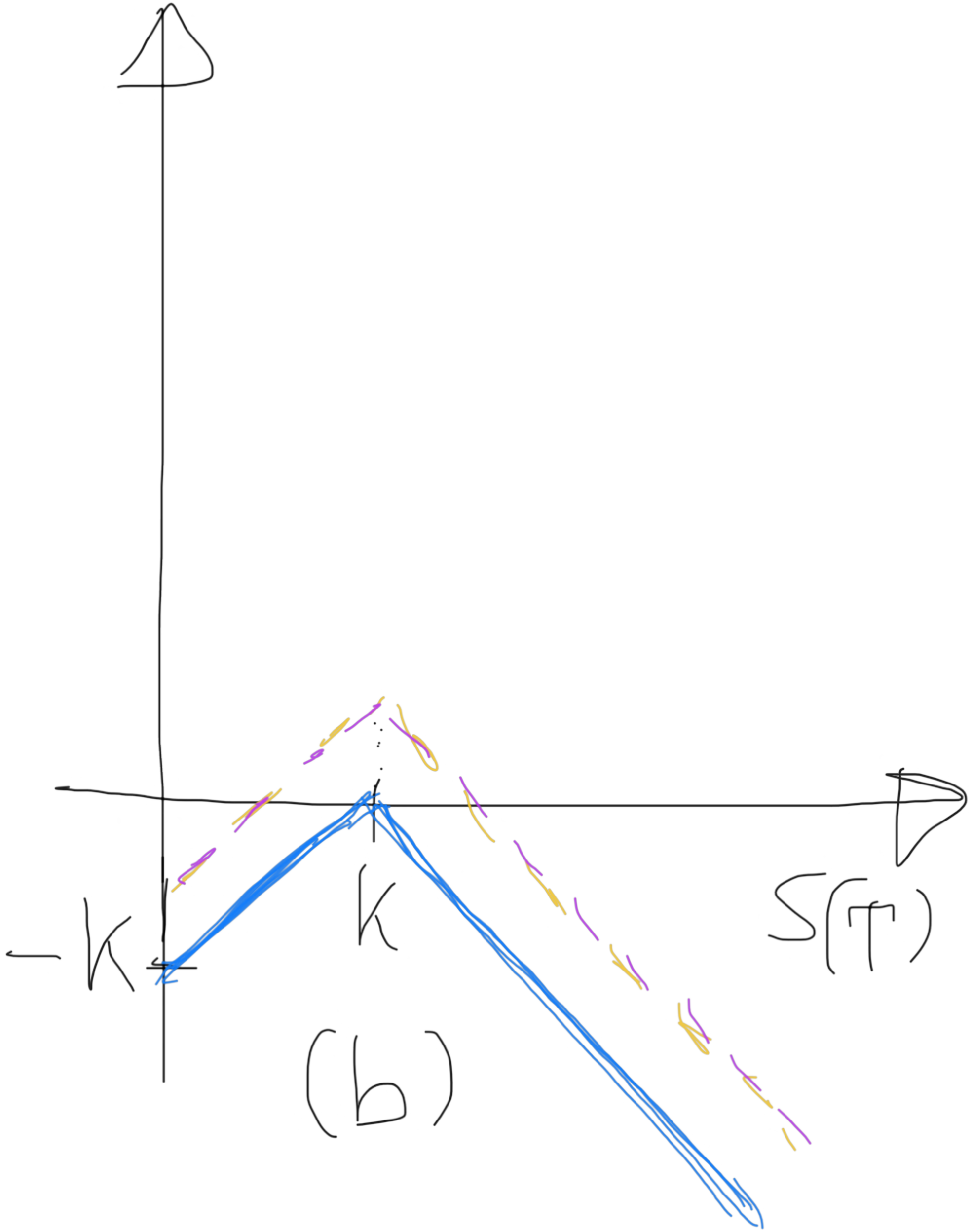
(b) – 1 call – 1 put *top straddle*

PAYOFF

(a) $$\max\{S(T)-K,0\}+\max\{K-S(T),0\}=\begin{cases} K-S(T) & \text{se } S(T)\le K \\ S(T)-K & \text{se } S(T)>K \end{cases}$$

(b) $$-\max\{S(T)-K,0\}-\max\{K-S(T),0\}=\begin{cases} S(T)-K & \text{se } S(T)\le K \\ K-S(T) & \text{se } S(T)>K \end{cases}$$


K
K
S(T)
(a)


-K
K
S(T)
(b)

Strips e Straps

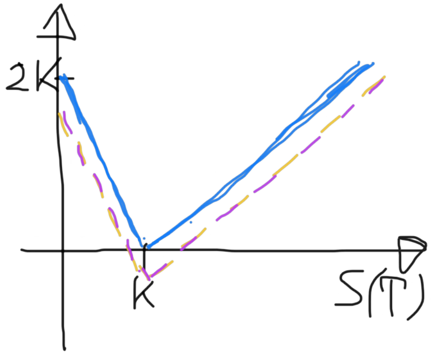
(a) 1 call + 2 put *strip*

(b) 2 call + 1 put *strap*

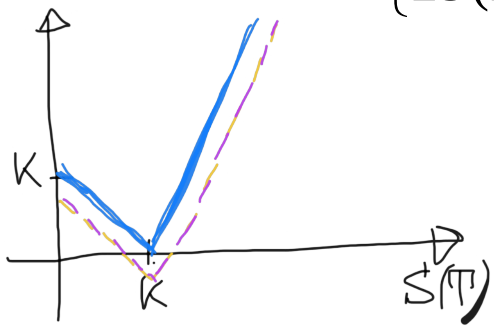
PAYOFF

(a) $$\max\{S(T)-K,0\}+2\max\{K-S(T),0\}=\begin{cases}2K-2S(T) & \text{se } S(T)\le K\\ S(T)-K & \text{se } S(T)>K\end{cases}$$

(b) $$2\max\{S(T)-K,0\}+\max\{K-S(T),0\}=\begin{cases}K-S(T) & \text{se } S(T)\le K\\ 2S(T)-2K & \text{se } S(T)>K\end{cases}$$



(a)



(b)

Strangles

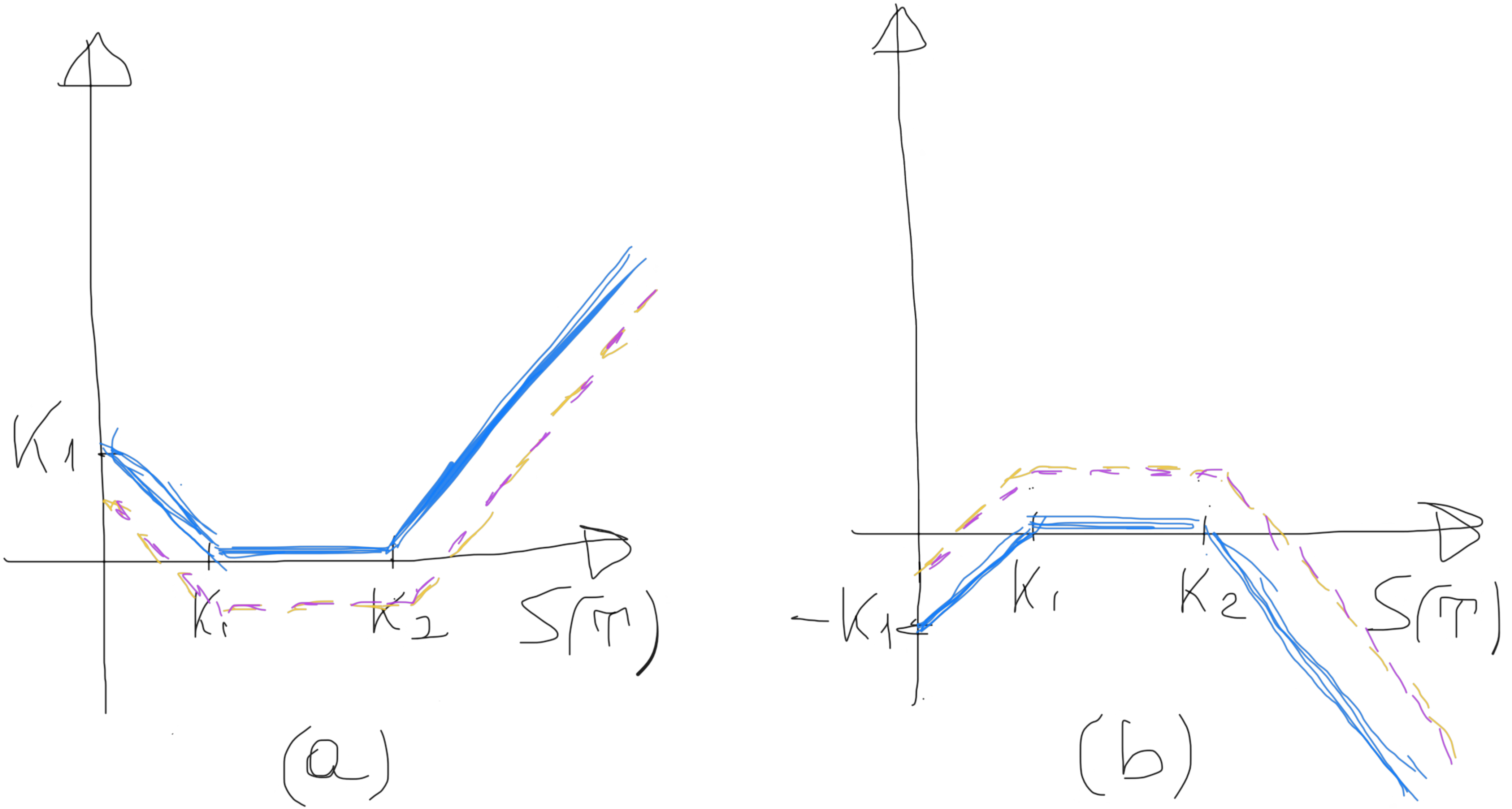
(a) 1 call(K_2) + 1 put(K_1), con $K_1 < K_2$ *bottom vertical combination*

(b) – 1 call(K_2) – 1 put(K_1), con $K_1 < K_2$ *top vertical combination*

PAYOFF

(a) $$\max\{S(T)-K_2,0\}+\max\{K_1-S(T),0\}=\begin{cases} K_1-S(T) & \text{se } S(T)<K_1 \\ 0 & \text{se } K_1\le S(T)\le K_2 \\ S(T)-K_2 & \text{se } S(T)>K_2 \end{cases}$$

(b) $$-\max\{S(T)-K_2,0\}-\max\{K_1-S(T),0\}=\begin{cases} S(T)-K_1 & \text{se } S(T)\le K_1 \\ 0 & \text{se } K_1\le S(T)\le K_2 \\ K_2-S(T) & \text{se } S(T)>K_2 \end{cases}$$


K_1
K_1
K_2
$S(T)$
(a)
$-K_1$
K_1
K_2
$S(T)$
(b)

OPZIONI ESOTICHE

Con il termine "opzioni esotiche" si fa riferimento a una classe di derivati che hanno un payoff più complesso rispetto ai prodotti *plain vanilla*, come ad esempio le opzioni standard. Si tratta di derivati usualmente scambiati nei mercati OTC, e ovviamente la categoria non è chiusa bensì ne vengono progettati di continuo. Spesso, all'interno di questa classe, si usano degli aggettivi "geografici" per identificare specifici derivati, anche se questi nomi non hanno niente a che vedere con i mercati su cui gli stessi sono trattati. In quanto segue illustreremo alcuni esempi di opzioni esotiche.

Packages

Il termine "package" è molto generale e fa riferimento ad un portafoglio composto da opzioni europee e contratti forward con la stessa attività sottostante, titoli a cedola nulla e l'attività sottostante stessa. Quindi anche tutte le strategie che abbiamo fin qua descritto rientrano in questa tipologia. Spesso i packages sono strutturati in maniera tale da avere un costo iniziale nullo, come ad es. i collar.

Opzioni americane non standard

Mentre in un’opzione americana standard l’esercizio anticipato può aver luogo in tutto l’intervallo di tempo precedente la scadenza dell’opzione, un’opzione americana non standard può essere esercitata anticipatamente soltanto in un sottoinsieme di tale intervallo. Inoltre, il prezzo di esercizio potrebbe cambiare con la data di esercizio.

ESEMPI

a) **Opzioni *Bermuda***: L’esercizio anticipato può aver luogo solo in un sottoinsieme discreto di date dell’intervallo $[0,T)$. Questo è ad esempio il caso di alcune opzioni su obbligazioni, esercitabili anticipatamente in corrispondenza delle date di pagamento cedole.

b) ***Warrant***: Sono opzioni in cui una delle due parti (short per le call, long per le put) è una società per azioni. L’attività sottostante è un’azione (o un certo numero di azioni) della stessa società. In caso di esercizio dell’opzione vengono emesse nuove azioni, per cui i warrant sono uno strumento tramite il quale le società realizzano un aumento di capitale. Si tratta di opzioni di stile americano, in cui però l’esercizio anticipato è possibile solo in un sottointervallo di date strettamente contenuto in $[0,T)$. Il prezzo di esercizio, stabilito nel contratto, di solito aumenta al passare del tempo.

Forward Start Options

Si tratta di opzioni per cui viene interamente pagato il prezzo all'epoca di emissione, ma con decorrenza posticipata in una data futura T_1. Spesso il prezzo di esercizio viene stabilito in modo che l'opzione sia *at-the-money* in T_1, quindi risulta pari a $S(T_1)$. Se l'opzione è americana, potrà essere esercitata soltanto a partire da T_1, dove chiaramente non conviene essendo *at-the-money*. Se l'opzione è europea, il suo payoff a scadenza, $T_2(> T_1)$, sarà pertanto dato da

$$\max\left\{S(T_2) - S(T_1), 0\right\} \qquad \text{per le call}$$

$$\max\left\{S(T_1) - S(T_2), 0\right\} \qquad \text{per le put}$$

$\Rightarrow$ Si tratta di un primo esempio di derivato *path-dependent*, in cui il payoff finale non dipende soltanto dal prezzo che ha in quel momento l'attività sottostante, ma anche da uno o più prezzi precedenti.

Opzioni composte

Si tratta di opzioni in cui l'attività sottostante è a sua volta un'opzione. Ce ne sono di quattro tipi: *call su call*, *call su put*, *put su call*, *put su put*.

Quindi ci sarà un'opzione principale, ovvero l'opzione composta, con prezzo di esercizio K e scadenza T_1, ed un'opzione sottostante con la sua attività sottostante, il suo prezzo di esercizio e scadenza $T_2 > T_1$.

Ad esempio, nel caso europeo, se indichiamo con $c(t)$ o, rispettivamente, $p(t)$, il prezzo in t dell'opzione sottostante, call o put, il payoff in T_1 dell'opzione composta sarà dato da:

$$
\begin{array}{ll}
\max\{c(T_1)-K,0\} & \text{call su call} \\
\max\{p(T_1)-K,0\} & \text{call su put} \\
\max\{K-c(T_1),0\} & \text{put su call} \\
\max\{K-p(T_1),0\} & \text{put su put}
\end{array}
$$

Queste opzioni sono state studiate da Geske nel 1979, che ne ha determinato il prezzo sotto ipotesi particolari sull'evoluzione stocastica del valore dell'attività sottostante l'opzione sottostante.

<u>Opzioni di scelta</u>

Dette anche opzioni *As you like it*, consentono di scegliere, a scadenza T_1 o anche prima, se americane, un'opzione put piuttosto che una call.

⇒ Qui ci sono <u>due opzioni sottostanti</u>, ciascuna con il suo prezzo di esercizio, la sua attività sottostante e la sua scadenza, successiva a quella dell'opzione di scelta.

Il prezzo dell'opzione di scelta è pagato interamente al momento dell'emissione, mentre al momento della scelta (esercizio) non si paga nulla.

⇒ Il payoff in T_1, ad es. nel caso europeo, sarà dato da $\max\{c(T_1), p(T_1)\}$.

Nel caso particolare in cui le due opzioni sottostanti sono omologhe con attività sottostante di prezzo $S(t)$, strike K e scadenza $T_2 > T_1$, la put-call parity che abbiamo ricavato quando abbiamo visto l'assicurazione di portafoglio (per un sottostante che non paga dividendi),

$$p(T_1) = c(T_1) + Kb(T_1,T_2) - S(T_1) \quad \text{o, equivalentemente,} \quad c(T_1) = p(T_1) + S(T_1) - Kb(T_1,T_2),$$

ci consente di scrivere questo payoff come

$$\max\{c(T_1), p(T_1)\} = c(T_1) + \max\{Kb(T_1,T_2) - S(T_1), 0\} = p(T_1) + \max\{S(T_1) - Kb(T_1,T_2), 0\}$$

⇒ Oltre ai prezzi futuri, in T_1, di opzioni call e put, in questo payoff compare anche quello di un'*opzione di scambio*, che consente di scambiare il sottostante le opzioni sottostanti con K titoli a cedola nulla di scadenza T_2.

Opzioni a barriera

Si tratta di opzioni, call o put, che nascono (*knock-in*), o si estinguono anticipatamente (*knock-out*), se il prezzo del sottostante raggiunge (o scavalca) una fissata barriera.

⇒ Nel caso delle opzioni *knock-in*, se non viene raggiunta la barriera entro la scadenza l'opzione a barriera si estingue senza che succeda niente; se invece la barriera viene toccata entro la scadenza, l'opzione a barriera "si trasforma" in un'opzione standard.

⇒ Nel caso delle opzioni *knock-out*, si parte da un'opzione standard, che rimane in vita fino a scadenza se non viene raggiunta la barriera; se invece la barriera viene toccata entro la scadenza, l'opzione si estingue anticipatamente.

⇒ call (o put) standard = call (o put) knock-in + call (o put) knock-out

ESEMPI

- **<u>Opzioni a barriera singola</u>**

  Se al momento dell'emissione dell'opzione, epoca 0, viene fissata una barriera $U > S(0)$, allora la stessa può essere raggiunta solo se il prezzo sale

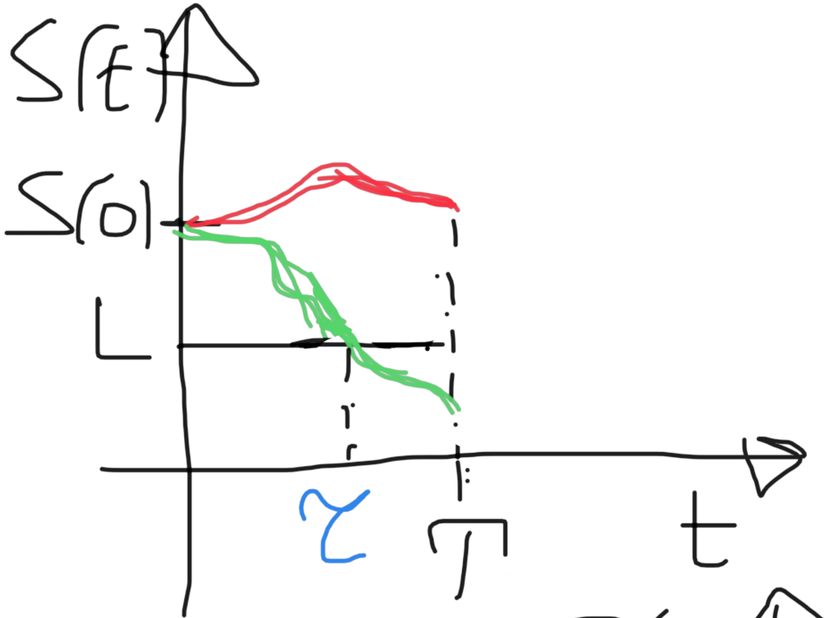
  $\Rightarrow$ *up-and-in* call/put *up-and-out* call/put

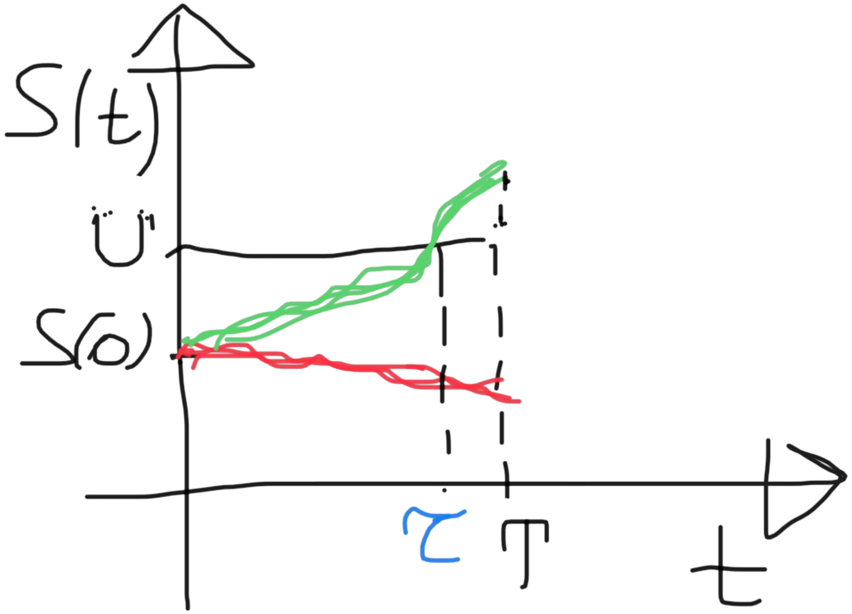
  Se al momento dell'emissione dell'opzione viene fissata una barriera $L < S(0)$, allora la stessa può essere raggiunta solo se il prezzo scende

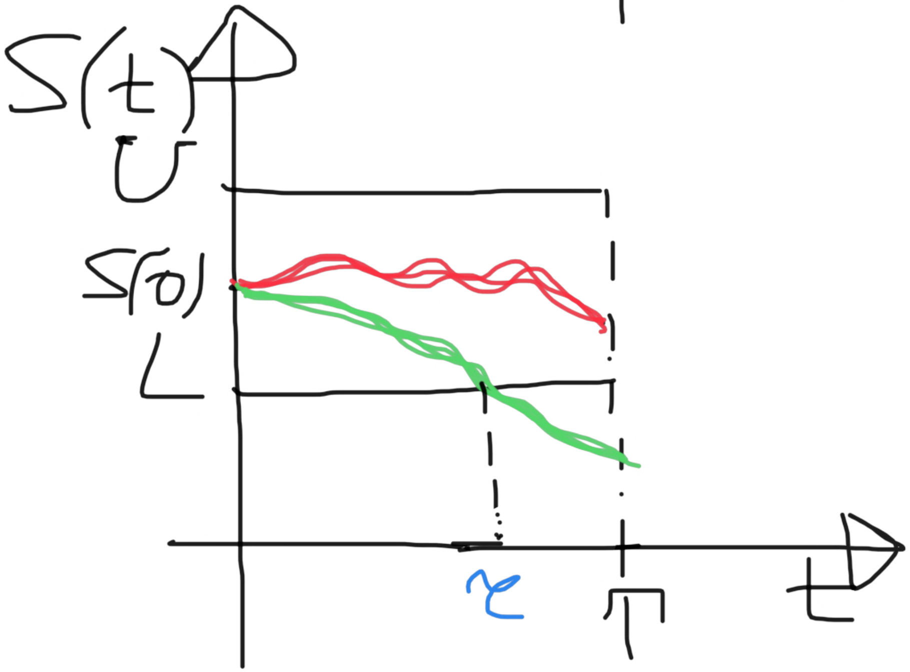
  $\Rightarrow$ *down-and-in* call/put *down-and-out* call/put

- **<u>Opzioni a doppia barriera</u>**

  Al momento dell'emissione dell'opzione vengono fissate due barriere, L e U, tali che $L < S(0) < U$. L'evento knock-in o knock-out si verifica non appena il prezzo del sottostante raggiunge (o scavalca) una delle due barriere


S(t)
S(0)
L
τ
T
t


S(t)
U
S(0)
τ
T
t


S(t)
U
S(0)
L
τ
T
t

- **<u>Opzioni parigine</u>**

  L'evento knock-in o knock-out (*trigger event*) si verifica soltanto se il prezzo del sottostante rimane oltre la barriera per una certa durata (ad es. un mese)

  - <u>consecutiva</u> nel caso delle *opzioni parigine standard*

    ⇒ In questo caso, ogniqualvolta si rientra, il contatore del tempo passato oltre la barriera viene azzerato, quindi non c'è memoria

  - <u>cumulativa</u> nel caso delle *opzioni parigine cumulative*

    ⇒ In questo caso c'è memoria, e conta il tempo totale passato oltre la barriera, anche se non consecutivo

Le opzioni a barriera, di tipo *down-and-out*, vengono spesso utilizzate nei modelli teorici di default. Si pensi ad esempio al caso di una società finanziaria, o di una compagnia di assicurazione, che ha venduto delle garanzie di minimo ai propri clienti, quindi delle opzioni put. Supponiamo che il valore delle attività della compagnia scenda al di sotto di un livello minimo stabilito dalle autorità di vigilanza. Se viene dichiarato subito il fallimento, con conseguente estinzione dell'impegno preso nei confronti dei clienti, si utilizzano delle opzioni a barriera semplici; se invece viene concesso un po' di tempo alla società per un eventuale recupero e ristrutturazione, allora si utilizzano delle opzioni a barriera di tipo parigino.

Opzioni binarie

Si tratta di opzioni con un payoff discontinuo rispetto al prezzo dell'attività sottostante.

ESEMPI

(a) *cash-or-nothing* call $\begin{cases} 0 & \text{se } S(T) < K \\ Q & \text{se } S(T) \geq K \end{cases}$

(b) *asset-or-nothing* call $\begin{cases} 0 & \text{se } S(T) < K \\ S(T) & \text{se } S(T) \geq K \end{cases}$

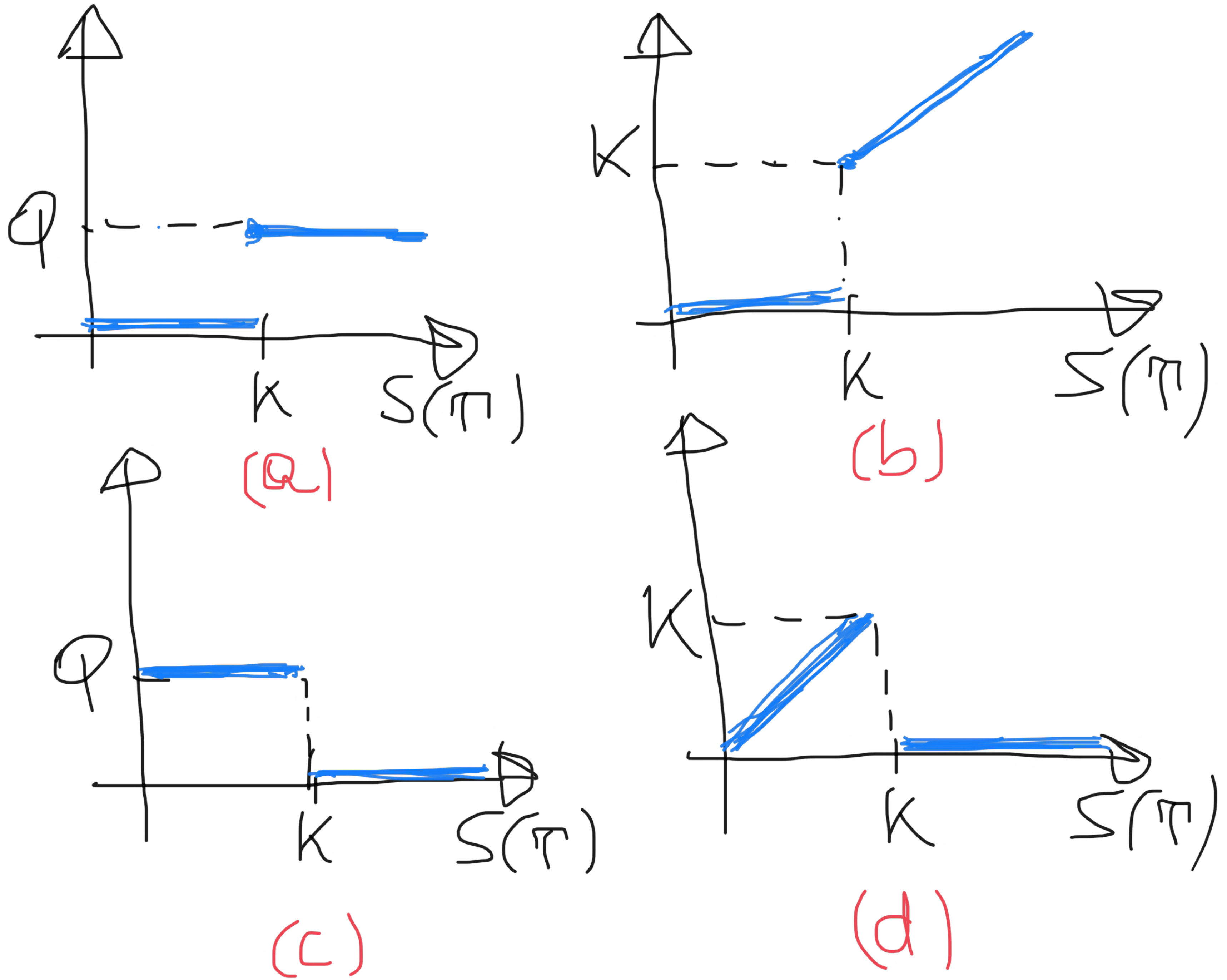
(c) *cash-or-nothing* put $\begin{cases} Q & \text{se } S(T) \leq K \\ 0 & \text{se } S(T) > K \end{cases}$

(d) *asset-or-nothing* put $\begin{cases} S(T) & \text{se } S(T) \leq K \\ 0 & \text{se } S(T) > K \end{cases}$

dove Q è un importo prefissato (*cash*) e K è il "prezzo di esercizio".

In particolare, se $Q = K$ $\Rightarrow$ call standard = asset-or-nothing call – cash-or-nothing call

$\Rightarrow$ put standard = cash-or-nothing put – asset-or-nothing put


q
K
S(T)
(a)
K
K
S(T)
(b)
q
K
S(T)
(c)
K
K
S(T)
(d)

Opzioni lookback

Si tratta di opzioni *path-dependent*, il cui payoff dipende dal minimo o dal massimo valore raggiunto dall'attività sottostante durante la vita dell'opzione.

ESEMPI

- *lookback call* $K = \min\limits_{0 \le t \le T} S(t)$ $\Rightarrow$ Payoff a scadenza $= S(T) - \min\limits_{0 \le t \le T} S(t)$
- *lookback put* $K = \max\limits_{0 \le t \le T} S(t)$ $\Rightarrow$ Payoff a scadenza $= \max\limits_{0 \le t \le T} S(t) - S(T)$

Shout options

Sono a cavallo tra le opzioni europee e quelle americane. Chi possiede l'opzione ha diritto di "gridare", ovvero bloccare, il payoff in una data precedente la scadenza, dopo di che, a scadenza, riceverà il massimo tra quello bloccato e quello finale.

Se ad esempio il payoff viene bloccato in un istante $\tau < T$, allora il payoff finale è pari a:

$\max\left\{S(\tau) - K, S(T) - K, 0\right\}$ per le call, $\max\left\{K - S(\tau), K - S(T), 0\right\}$ per le put

$\Rightarrow$ Ovviamente ha senso bloccare il payoff solo negli istanti in cui l'opzione è *in-the-money*.

Opzioni russe

Si tratta di opzioni americane perpetue. Al momento dell'esercizio si riceve il massimo valore raggiunto dall'attività sottostante durante tutta la vita dell'opzione. Quindi, se ad esempio l'esercizio avviene in τ, il payoff (in τ) risulta pari a $\max_{0 \le t \le \tau} S(t)$.

$\Rightarrow$ Anche in questo caso l'opzione risulta *path-dependent*

$\Rightarrow$ E' una sorta di "gioco", e chi possiede l'opzione deve decidere quando arrestarlo

$\Rightarrow$ Ovviamente il payoff è crescente (in senso debole) al passare del tempo, però la possibilità di investirlo in altri titoli, magari con aspettative di rendimento maggiori, potrebbe rendere interessante l'esercizio

Opzioni asiatiche

Si tratta di opzioni *path-dependent* il cui payoff dipende da una media dei prezzi dell'attività sottostante durante tutta la vita dell'opzione.

La media può essere aritmetica, geometrica, …, e comunque il metodo di calcolo della stessa è ben specificato nel contratto.

La media può sostituire il prezzo dell'attività sottostante $\Rightarrow$ *average price*, o il prezzo di esercizio $\Rightarrow$ *average strike*.

ESEMPI

Indichiamo con $\bar{S}$ tale media.

- *average price call* $\Rightarrow$ Payoff a scadenza $= \max\left\{\bar{S} - K, 0\right\}$
- *average price put* $\Rightarrow$ Payoff a scadenza $= \max\left\{K - \bar{S}, 0\right\}$
- *average strike call* $\Rightarrow$ Payoff a scadenza $= \max\left\{S(T) - \bar{S}, 0\right\}$
- *average strike put* $\Rightarrow$ Payoff a scadenza $= \max\left\{\bar{S} - S(T), 0\right\}$

Opzioni passaporto

Si tratta di opzioni il cui payoff è costituito dalla parte positiva del risultato di una strategia di trading, e quindi dall'eventuale guadagno generato dalla stessa, mentre le perdite sono assorbite da chi sottoscrive l'opzione.

Opzioni reset

Dette anche *cliquet*, o *ratchet*, sono di fatto una sequenza di opzioni, pagate tutte all'inizio. La prima di queste opzioni è standard e *at-the-money*, le successive sono *forward start options* "concatenate".

Quindi, ad es. nel caso call, una reset option emessa in $T_0 = 0$ con date di reset $T_1, T_2, ..., T_{n-1}$ e scadenza T_n (con $T_0 < T_1 < ... < T_{n-1} < T_n$) prevede i seguenti cash-flow:

$$\max\{S(T_1) - S(T_0), 0\} \qquad \text{in } T_1$$

$$\max\{S(T_2) - S(T_1), 0\} \qquad \text{in } T_2$$

$$\dots$$

$$\max\{S(T_n) - S(T_{n-1}), 0\} \qquad \text{in } T_n$$

Opzioni arcobaleno

Si tratta di opzioni che hanno più di una attività sottostante.

ESEMPI

- **Opzioni di scambio**

  Danno al loro possessore il diritto di scambiare un'attività rischiosa per un'altra, a differenza delle opzioni standard in cui si ha diritto di scambiare un'attività rischiosa contro un importo certo.

  Per esempio le due attività potrebbero essere entrambe azioni, ovviamente emesse da due società diverse (il rapporto di scambio non è necessariamente unitario, ma comunque prefissato), oppure entrambe obbligazioni, o entrambe valute estere, o azioni ed obbligazioni, …, nel caso delle opzioni di scelta abbiamo incontrato il payoff di un'opzione di scambio che coinvolgeva una certa attività di prezzo $S(t)$ ed un titolo a cedola nulla.

  Indicando con $S_1(t)$ il prezzo in t dell'attività che si riceve, in caso di esercizio dell'opzione, e con $S_2(t)$ quello dell'attività che si cede

  $\Rightarrow$ il payoff, in T, dell'opzione di scambio è dato da $\max\{S_1(T)-S_2(T),0\}$

  Queste opzioni sono state studiate da Margrabe nel 1978.

- **Opzioni sul massimo o sul minimo tra due o più attività rischiose**

Indicando con $S_1(t), S_2(t), ..., S_n(t)$ il prezzo in t delle n attività coinvolte, e con K il prezzo di esercizio, il payoff a scadenza, T, è dato da

$$\max\{\max\{S_1(T), S_2(T), ..., S_n(T)\} - K, 0\} \qquad \text{call sul massimo}$$

$$\max\{\min\{S_1(T), S_2(T), ..., S_n(T)\} - K, 0\} \qquad \text{call sul minimo}$$

$$\max\{K - \max\{S_1(T), S_2(T), ..., S_n(T)\}, 0\} \qquad \text{put sul massimo}$$

$$\max\{K - \min\{S_1(T), S_2(T), ..., S_n(T)\}, 0\} \qquad \text{put sul minimo}$$

Queste opzioni sono state studiate da Johnson nel 1987.

- **Opzioni su un paniere di beni**

Dette anche *basket options*, hanno come sottostante una media, tipicamente aritmetica, dei prezzi di due o più attività rischiose.

$\Rightarrow$ i payoff sono analoghi al caso precedente, solo che al posto del massimo o del minimo abbiamo la suddetta media.

LIMITAZIONI DI PURO ARBITRAGGIO PER IL PREZZO DELLE OPZIONI

Come si è già anticipato, le ipotesi di lavoro introdotte all'inizio non sono purtroppo sufficienti per determinare in maniera precisa il prezzo di un'opzione, ma consentono di individuare un intervallo di valori in cui esso deve cadere. Anche qui, rimuovendo qualche ipotesi, l'intervallo si "allarga" ulteriormente.

D'ora innanzi, per fissare le idee, ci concentreremo esclusivamente sulle opzioni su azioni o, più in generale, su opzioni la cui attività sottostante non richiede costi di detenzione. Tuttavia i risultati che seguono possono essere facilmente adattati anche al caso di opzioni su merci.

Come per i contratti forward, indichiamo con

$D(t,T)$ il valore al tempo t di tutti i dividendi (noti) pagati dal bene sottostante tra t e T,

$q\ (>0)$ l'intensità di dividendo pagato nel continuo dal bene sottostante,

e poniamo $$\bar{S}(t) = \begin{cases} S(t) & \text{se non ci sono dividendi tra } t \text{ e } T \\ S(t) - D(t,T) & \text{se i dividendi sono certi} \\ S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} & \text{se i dividendi sono pagati nel continuo} \end{cases}, \quad \text{per } t \in [0,T].$$

<u>Osservazione</u>: Risulta $0 \leq \bar{S}(t) \leq S(t) \ \forall t \in [0,T]$.

La limitazione superiore $\bar{S}(t) \leq S(t)$ è ovvia.

La limitazione inferiore $\bar{S}(t) \geq 0$ è anche ovvia quando non ci sono dividendi oppure gli stessi sono pagati nel continuo come nel caso delle valute. Ricordiamo infatti che l'attività sottostante ha un prezzo $S(t) \geq 0$ quasi certamente $\forall t$ in quanto trattasi di un'attività a responsabilità limitata.

Nel caso dei dividendi certi, se per assurdo per qualche t fosse $D(t,T) > S(t)$,

- in t si potrebbe:
  - comprare a pronti l'attività sottostante,
  - vendere allo scoperto titoli a cedola nulla "corrispondenti" ai dividendi,

  con un introito pari a $D(t,T) - S(t) > 0$;
- tra t e T, ogniqualvolta si incassa un dividendo si potrebbero rimborsare i bond corrispondenti, con un saldo $= 0$;
- in T i bond sarebbero stati tutti rimborsati e si potrebbe rivendere l'attività sottostante con un introito $S(T) \geq 0$ quasi certamente

$\Rightarrow$ tutto ciò è assurdo in quanto costituirebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Relazione fra opzioni call europee ed americane con identiche caratteristiche

(c0) $C(t) \geq c(t)\ \forall t \in [0,T]$.

$\Rightarrow$ Le limitazioni inferiori al prezzo delle opzioni europee saranno valide anche per quelle americane, le limitazioni superiori al prezzo delle opzioni americane saranno valide anche per quelle europee.

Interpretazione: Le opzioni americane conferiscono un diritto in più rispetto a quelle europee, e cioè il diritto all'esercizio anticipato, che non può avere valore negativo.

Dimostrazione: In T sappiamo già che vale l'uguaglianza perché se l'opzione americana non è stata esercitata prima, alla scadenza il suo valore coincide col payoff, che è lo stesso delle opzioni europee. Se per assurdo $\exists t < T : C(t) < c(t)$,

- in t si potrebbe vendere la call europea e comprare quella americana, con un introito pari a $c(t) - C(t) > 0$;
- tra t e T non fare niente, anche se abbiamo una call americana che potrebbe essere esercitata;
- in T esercitare se colui a cui abbiamo venduto la call europea esercita, non esercitare in caso contrario, per cui si compenserebbero i payoff, con saldo $= 0$ q.c.

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Osservazione: Nella dim. non ci siamo preoccupati di agire razionalmente (ad es. non abbiamo valutato se poteva convenire esercitare anticipatamente l'opzione americana), in quanto l'obiettivo era quello di far vedere la presenza di opportunità di arbitraggio.

Limitazioni inferiori per il prezzo delle opzioni call

Abbiamo già dimostrato che

(ci1) $c(t) \geq 0 \qquad \forall t \in [0,T]$,

per cui, per la **(c0)**, anche

(Ci1) $C(t) \geq 0 \qquad \forall t \in [0,T]$.

Inoltre:

(Ci2) $C(t) \geq S(t) - K \qquad \forall t \in [0,T]$.

Dimostrazione di (Ci2): Sappiamo già che $C(T) = \max\{S(T) - K, 0\} \geq S(T) - K$. Se per assurdo $\exists t < T : C(t) < S(t) - K$, in t si potrebbe comprare la call ed esercitarla subito, con un introito immediato pari a $S(t) - K - C(t) > 0$ e poi più nulla, e quindi ci sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Osservazione: La limitazione **(Ci2)** non vale per le opzioni europee, che prima della scadenza potrebbero anche avere un prezzo $c(t) < S(t) - K$ senza che ciò costituisca un'opportunità di arbitraggio in quanto non possono essere esercitate subito.

Infine:

(ci2) $c(t) \geq \overline{S}(t) - Kb(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$,

da cui, per la **(c0)**, anche

(Ci3) $C(t) \geq \overline{S}(t) - Kb(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$.

Interpretazione di (ci2): A secondo membro riconosciamo il valore di un contratto forward, in posizione long, sulla stessa attività sottostante della call, data di consegna T e prezzo di consegna K. La call non può valere meno del forward, visto che c'è la possibilità di "tirarsi indietro", cioè non esercitare se non conviene farlo.

Osservazione: La relazione vale in T poiché il payoff del forward è ≤ q.c. di quello della call, e precisamente:

$$V^L(T) = S(T) - K \begin{cases} < 0 & \text{se } S(T) < K \\ = S(T) - K & \text{se } S(T) \geq K \end{cases} \leq \max\{S(T) - K, 0\} = c(T).$$

Se sul mercato ci fossero dei contratti forward di questo tipo e per qualche $t < T$ la relazione **(ci2)** fosse violata, in t si potrebbe vendere allo scoperto il long forward e comprare la call, con un introito pari a $\overline{S}(t) - Kb(t,T) - c(t) > 0$. Non ci sarebbe poi nulla fino a T, epoca in cui il saldo dell'operazione sarebbe pari a $c(T) - V^L(T) \geq 0$ q.c., quindi con un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

⇒ Il problema è che non sappiamo se ci sono contratti forward sul mercato e quindi, per la dimostrazione, dobbiamo ragionare direttamente con strategie che coinvolgono soltanto l'opzione e le attività di base.

<u>Dimostrazione di (ci2)</u>:

Sappiamo già che $c(T) = \max\{S(T) - K, 0\} \geq S(T) - K = \bar{S}(T) - Kb(T,T)$. Supponiamo per assurdo che $\exists t < T$ tale per cui la **(ci2)** è violata. Distinguiamo tre casi.

1) **<u>Non ci sono dividendi</u>** tra t e T, quindi $c(t) < S(t) - Kb(t,T)$. Allora:

- in t si
  - vende allo scoperto il bene sottostante,
  - comprano K titoli a cedola nulla di scadenza T,
  - compra la call,

  con un introito pari a $S(t) - Kb(t,T) - c(t) > 0$;
- tra t e T non succede nulla;
- in T si
  - incassa il valore nominale, K, dei bond in scadenza,
  - se $S(T) > K$ si esercita la call, pagando K e ricevendo il bene, in caso contrario si compra il bene sul mercato a pronti, pagandolo $S(T)$,
  - si restituisce il bene, che era stato venduto allo scoperto,

  con payoff $K - \min\{S(T), K\} = K + \max\{-S(T), -K\} = \max\{K - S(T), 0\} \geq 0$ q.c.

⇒ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

2)I **<u>dividendi</u>** pagati tra t e T sono **<u>certi</u>**, quindi $c(t) < S(t) - D(t,T) - Kb(t,T)$. Allora:

- in t si
  - vende allo scoperto il bene sottostante,
  - comprano titoli a cedola nulla "corrispondenti ai dividendi",
  - comprano K titoli a cedola nulla di scadenza T,
  - compra la call,

  con un introito pari a $S(t) - D(t,T) - Kb(t,T) - c(t) > 0$;
- tra t e T si incassa il valore nominale dei bond via via in scadenza, che viene utilizzato per pagare il dividendo corrispondente $\Rightarrow$ saldo nullo;
- in T i bond corrispondenti ai dividendi sono già stati incassati e i dividendi pagati. Quindi, come nel caso 1), si
  - incassa il valore nominale dei K bond in scadenza,
  - se $S(T) > K$ si esercita la call, pagando K e ricevendo il bene, in caso contrario si compra il bene sul mercato a pronti, pagandolo $S(T)$,
  - si restituisce il bene,

  con payoff $K - \min\{S(T), K\} = K + \max\{-S(T), -K\} = \max\{K - S(T), 0\} \geq 0$ q.c.

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

3)I **<u>dividendi</u>** sono pagati **<u>nel continuo</u>**, con intensità q, e reinvestiti nel bene stesso, quindi $c(t) < S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} - Kb(t,T)$. Allora:

- in t si
  - vende allo scoperto una quantità di bene sottostante pari a $\mathrm{e}^{-q(T-t)}$,
  - comprano K titoli a cedola nulla di scadenza T,
  - compra la call,

  con un introito pari a $S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} - Kb(t,T) - c(t) > 0$;
- tra t e T non si devono pagare dividendi sul bene venduto allo scoperto, ma la quantità di bene da restituire aumenta al passare del tempo;
- in T il "debito" in termini di quantità di bene da restituire è unitario. Quindi, come nei casi 1) e 2), si
  - incassa il valore nominale dei K bond in scadenza,
  - se $S(T) > K$ si esercita la call, pagando K e ricevendo il bene, in caso contrario si compra il bene sul mercato a pronti, pagandolo $S(T)$,
  - si restituisce il bene,

  con payoff $K - \min\{S(T), K\} = K + \max\{-S(T), -K\} = \max\{K - S(T), 0\} \geq 0$ q.c.

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Limitazioni superiori per il prezzo delle opzioni call

(Cs1) $C(t) \le S(t) \qquad \forall t \in [0,T]$,

da cui, per la **(c0)**, anche

(cs1) $c(t) \le S(t) \qquad \forall t \in [0,T]$.

Interpretazione:

L'opzione americana può essere immediatamente "trasformata" nell'attività sottostante, però per far questo bisogna pagare il prezzo di esercizio $K \ge 0$, quindi vale di meno dell'attività stessa. Solo se $K = 0$ è la stessa cosa avere l'opzione o l'attività sottostante, quindi $C(t) = S(t)$.

Se invece l'opzione è europea, prima della scadenza non è equivalente, in termini di valore, avere l'opzione oppure l'attività sottostante quando $K = 0$, a causa degli eventuali dividendi che non possono essere percepiti da chi possiede l'opzione, esercitabile solo a scadenza; se però non ci sono dividendi anche in questo caso $c(t) = S(t)$.

<u>Dimostrazione della (Cs1)</u>:

- A scadenza T l'opzione vale $0 \leq S(T)$ (se $S(T) \leq K$), oppure $S(T) - K \leq S(T)$ (se $S(T) > K$).
- Supponiamo per assurdo che $\exists t < T : C(t) > S(t)$.

  Allora in t si vende la call e si compra il bene sottostante, con un introito pari a $C(t) - S(t) > 0$.

  Successivamente:

  - se la call viene esercitata in un istante $\tau \leq T$, si consegna il bene e si incassa $K \geq 0$;
  - se la call non viene mai esercitata, in T ci rimane il bene, che vale $S(T) \geq 0$.

  Inoltre:

  - se il bene paga dividendi certi, incassiamo anche i dividendi (≥ 0) tra t e τ nel primo caso e tra t e T nel secondo;
  - se il bene paga dividendi nel continuo, ci rimane una quantità di bene pari a $e^{q(\tau - t)} - 1$ nel primo caso, e una quantità addizionale pari a $e^{q(T-t)} - 1$ nel secondo, di valore ≥ 0

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Intervallo di valori per il prezzo delle opzioni call

Siccome tutte le limitazioni inferiori devono essere soddisfatte, basta che lo sia la massima; simmetricamente, nel caso delle limitazioni superiori, in generale basta che lo sia la minima (ma nel nostro caso ne abbiamo soltanto una).

Call europee:

$$\Rightarrow \quad \max\left\{\bar{S}(t) - Kb(t,T), 0\right\} \le c(t) \le S(t) \qquad \forall t \in [0,T].$$

In particolare:

$$S(t) = 0 \;\Rightarrow\; c(t) = 0,$$

$$K = 0,\ \bar{S}(t) = S(t) \;\Rightarrow\; c(t) = S(t).$$

Call americane:

$$\Rightarrow \quad \max\left\{S(t) - K, \bar{S}(t) - Kb(t,T), 0\right\} \le C(t) \le S(t) \qquad \forall t \in [0,T].$$

In particolare:

$$S(t) = 0 \;\Rightarrow\; C(t) = 0,$$

$$K = 0 \;\Rightarrow\; C(t) = S(t).$$

<u>Proprietà analitiche del prezzo delle opzioni call</u>

Le ipotesi di mercato, di <u>natura economica</u>, comportano alcune <u>proprietà analitiche</u> per il prezzo delle opzioni call, sia europee che americane.

<u>Monotonia rispetto allo strike</u>:

(1) $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad c(t;K_1) \geq c(t;K_2) \qquad \forall t \in [0,T]$,

(2) $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad C(t;K_1) \geq C(t;K_2) \quad \forall t \in [0,T]$,

con ovvio significato dei simboli, e anche di ovvia interpretazione.

<u>Dimostrazione della (1)</u>:

E' immediato verificare che la proprietà vale in T. Infatti

$$K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad c(T;K_1) = \max\{S(T) - K_1, 0\} \geq \max\{S(T) - K_2, 0\} = c(T;K_2).$$

Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$ e $t < T : c(t;K_1) < c(t;K_2)$, allora in t si potrebbe vendere la call con prezzo di esercizio K_2 e comprare quella con prezzo di esercizio K_1, cioè comprare un *call bullish vertical spread*, che sappiamo avere un payoff finale, in T, ≥ 0 quasi certamente, a fronte di un introito iniziale pari a $c(t;K_2) - c(t;K_1) > 0$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

<u>Dimostrazione della (2)</u>:

Anche qui è immediato verificare che la proprietà vale in T in quanto, esattamente come prima, $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad C(T;K_1) = \max\{S(T) - K_1, 0\} \geq \max\{S(T) - K_2, 0\} = C(T;K_2)$.

Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$ e $t < T : C(t;K_1) < C(t;K_2)$, allora in t si potrebbe vendere la call con strike K_2 e comprare quella con strike K_1, cioè comprare un *call bullish vertical spread* americano, con un introito pari a $C(t;K_2) - C(t;K_1) > 0$.

Successivamente, anche se si è in possesso di un'opzione americana, si potrebbe "stare in agguato", aspettando di vedere cosa fa la controparte:

- se l'opzione con prezzo di esercizio K_2 viene esercitata in un istante $\tau \leq T$, allora esercitiamo anche noi, con un payoff pari a $\big(S(\tau) - K_1\big) - \big(S(\tau) - K_2\big) = K_2 - K_1 > 0$;
- se l'opzione con prezzo di esercizio K_2 non viene <u>mai</u> esercitata, in T ci rimane la nostra, che ha payoff $\max\{S(T) - K_1, 0\} \geq 0$.

$\Rightarrow$ Comunque vadano le cose, a fronte di un introito iniziale strettamente positivo abbiamo un payoff finale non negativo quasi certamente,

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

<u>Lipschitzianità rispetto allo strike</u>:

(3) $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad c(t;K_1) - c(t;K_2) \leq (K_2 - K_1)b(t,T) \qquad \forall t \in [0,T],$

(4) $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad C(t;K_1) - C(t;K_2) \leq K_2 - K_1 \qquad \forall t \in [0,T].$

$\Rightarrow$ Questa proprietà implica la <u>continuità</u> del prezzo delle opzioni rispetto allo strike.

<u>Dimostrazione della (3)</u>:

La proprietà vale in T. Infatti

$c(T;K_1) - c(T;K_2) = \max\{S(T) - K_1, 0\} - \max\{S(T) - K_2, 0\}$ è il payoff a scadenza di un *call bullish vertical spread*, che abbiamo verificato essere $\leq K_2 - K_1$ q.c. ($b(T,T) = 1$).

Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$ e $t < T : c(t;K_1) - c(t;K_2) > (K_2 - K_1)b(t,T)$, allora in t si potrebbe vendere la call con strike K_1, comprare quella con strike K_2 (cioè comprare un *call bearish vertical spread*) e comprare inoltre $K_2 - K_1$ titoli a cedola nulla di scadenza T, con un introito pari a $c(t;K_1) - c(t;K_2) - (K_2 - K_1)b(t,T) > 0$.

Il payoff finale, in T, di questa strategia, risulta pari a

$$\max\{S(T) - K_2, 0\} - \max\{S(T) - K_1, 0\} + K_2 - K_1 = \begin{cases} K_2 - K_1 & \text{se } S(T) < K_1 \\ K_2 - S(T) & \text{se } K_1 \leq S(T) \leq K_2 \\ 0 & \text{se } S(T) > K_2 \end{cases} \geq 0$$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

<u>Dimostrazione della (4)</u>:

Per lo stesso motivo di prima la proprietà vale in T (i payoff a scadenza di opzioni europee e americane sono coincidenti).

Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$ e $t < T : C(t;K_1) - C(t;K_2) > K_2 - K_1$, allora in t si potrebbe vendere la call con strike K_1, comprare quella con strike K_2 e investire $K_2 - K_1$ nel money market account, con un introito pari a $C(t;K_1) - C(t;K_2) - (K_2 - K_1) > 0$.

Successivamente, anche se si è in possesso di un'opzione americana, si potrebbe "stare in agguato", aspettando di vedere cosa fa la controparte:

- se l'opzione con prezzo di esercizio K_1 viene esercitata in un istante $\tau \le T$, allora ritiriamo il montante del money market account ed esercitiamo anche noi, con un payoff pari a $\dfrac{K_2 - K_1}{B(t)} B(\tau) + \left(S(\tau) - K_2\right) - \left(S(\tau) - K_1\right) = (K_2 - K_1)(\mathrm{e}^{\int_t^\tau r(u)\mathrm{d}u} - 1) \ge 0$ quasi certamente, se i tassi sono non negativi, come abbiamo sempre assunto;
- se l'opzione con prezzo di esercizio K_1 non viene <u>mai</u> esercitata non esercitiamo neppure noi, ma ci rimane comunque il montante del money market account $\dfrac{K_2 - K_1}{B(t)} B(T) = (K_2 - K_1)\mathrm{e}^{\int_t^T r(u)\mathrm{d}u} \ge 0$ quasi certamente.

$\Rightarrow$ Comunque vadano le cose, a fronte di un introito iniziale strettamente positivo abbiamo un payoff finale non negativo (quasi certamente),

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Osservazioni:

- In caso di esercizio della call con strike K_1 in $\tau \leq T$ non è detto che convenga esercitare anche la nostra, che ha strike $K_2 > K_1$.
- Se la decisione della nostra controparte di non esercitare mai la call con strike K_1 è razionale, allora non conviene esercitare nemmeno l'opzione con strike $K_2 > K_1$.
- Abbiamo utilizzato il money market account anziché titoli a cedola nulla in quanto non è noto a priori quando dobbiamo, eventualmente, disinvestire per far fronte al pagamento della differenza $K_2 - K_1$ in caso di esercizio delle opzioni. Infatti, se investissimo tale importo in titoli a cedola nulla, in caso di disinvestmento (ovvero vendita dei titoli) prima della loro scadenza, anche con tassi positivi c'è il rischio di ricavare meno dell'investimento iniziale e quindi di non essere in grado di far fronte al pagamento integrale di tale differenza.

<u>Convessità rispetto allo strike</u>:

(5) $K_1 < K_2,\ 0 \le \alpha \le 1 \ \Rightarrow\ c\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) \le \alpha c(t;K_1) + (1-\alpha)c(t;K_2) \qquad \forall t \in [0,T],$

(6) $K_1 < K_2,\ 0 \le \alpha \le 1 \ \Rightarrow\ C\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) \le \alpha C(t;K_1) + (1-\alpha)C(t;K_2) \quad \forall t \in [0,T].$

$\Rightarrow$ Anche questa proprietà implica la <u>continuità</u> del prezzo delle call rispetto allo strike.

<u>Dimostrazione della (5)</u>:

E' facile verificare, scrivendo i payoff, che la proprietà vale in T. In particolare, se $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ o $S(T) \le K_1$ o $S(T) \ge K_2$ vale l'=, se $0 < \alpha < 1$ e $K_1 < S(T) < K_2$ vale il <.

E' chiaro che vale l'= anche per $t < T$ nei casi estremi $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$. Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$, $0 < \alpha < 1$ e $t < T$: $c\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) > \alpha c(t;K_1) + (1-\alpha)c(t;K_2)$, allora in t si potrebbe vendere una call con prezzo di esercizio $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$, comprare α call con prezzo di esercizio K_1 e $1-\alpha$ call con prezzo di esercizio K_2, con un introito pari a $c\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) - \alpha c(t;K_1) - (1-\alpha)c(t;K_2) > 0$.

Il payoff finale, in T, di questa strategia, risulta pari a

$$\alpha \max\left\{S(T)-K_1,0\right\}+(1-\alpha)\max\left\{S(T)-K_2,0\right\}-\max\left\{S(T)-\alpha K_1-(1-\alpha)K_2,0\right\}$$

$$=\begin{cases} 0 & \text{se } S(T)\le K_1 \\ \alpha\left(S(T)-K_1\right) & \text{se } K_1<S(T)<\alpha K_1+(1-\alpha)K_2 \\ (1-\alpha)\left(K_2-S(T)\right) & \text{se } \alpha K_1+(1-\alpha)K_2\le S(T)<K_2 \\ 0 & \text{se } S(T)\ge K_2 \end{cases} \quad \ge 0 \text{ quasi certamente}$$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Dimostrazione della (6):

Come nel caso precedente, la proprietà vale in T (il payoff è lo stesso delle opzioni europee), e inoltre vale l'= anche per $t < T$ nei casi estremi $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

Supponiamo per assurdo che esistano $K_1 < K_2$, $0 < \alpha < 1$ e $t < T$: $C\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) > \alpha C(t;K_1) + (1-\alpha)C(t;K_2)$.

Allora in t si potrebbe vendere una call con prezzo di esercizio $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$, comprare α call con prezzo di esercizio K_1 e $1-\alpha$ call con prezzo di esercizio K_2, con un introito pari a $C\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) - \alpha C(t;K_1) - (1-\alpha)C(t;K_2) > 0$.

Successivamente, anche se si è in possesso di opzioni americane, si potrebbe "stare in agguato", aspettando di vedere cosa fa la controparte:

- se questa esercita in $\tau \le T$, allora esercitiamo anche noi, con payoff $= 0$;
- se questa non esercita mai, allora in T ci rimangono le nostre opzioni, che hanno un payoff ≥ 0 quasi certamente

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Osservazione: potrebbe essere non razionale esercitare in τ l'opzione con strike K_2.

<u>Monotonia rispetto alla scadenza delle opzioni call americane</u>:

(7) $T_1 < T_2 \quad \Rightarrow \quad C(t;T_1) \leq C(t;T_2) \;\; \forall t \in [0,T_1]$,

con un (leggero) abuso di notazione.

<u>Interpretazione</u>:

Tanto più lunga è la vita dell'opzione, tanto maggiori sono le opportunità di esercizio.

<u>Dimostrazione</u>:

Supponiamo per assurdo che $\exists t \leq T_1 : C(t;T_1) > C(t;T_2)$. Allora in t vendiamo la call con scadenza T_1 e compriamo quella con scadenza T_2, con un introito pari a $C(t;T_1) - C(t;T_2) > 0$.

Successivamente, anche se siamo in possesso di una call americana, non facciamo niente e aspettiamo di vedere cosa fa la controparte:

- se questa esercita in $\tau \leq T_1$, allora esercitiamo anche noi, con payoff $= 0$;
- se questa non esercita mai, allora in T_1 ci rimane la nostra opzione, che vale $C(T_1;T_2) \geq 0$ (q.c.)

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

<u>Osservazione</u>:

La proprietà non vale (in generale) per le call europee, che potrebbero avere prezzo minore anche se con scadenza più lontana. Infatti proviamo a simulare la dimostrazione di prima:

Supponiamo che $\exists t \le T_1 : c(t;T_1) > c(t;T_2)$. Allora in t vendiamo la call con scadenza T_1 e compriamo quella con scadenza T_2, con un introito pari a $c(t;T_1) - c(t;T_2) > 0$.

Tra t e T_1 non succede niente perché entrambe le opzioni sono europee.

Arriviamo in T_1:

- se la call che abbiamo venduto non viene esercitata, ci rimane la nostra, che vale $c(T_1;T_2) \ge 0$;
- se però la call viene esercitata non possiamo esercitare la nostra, controbilanciando il payoff, perché siamo prima della scadenza, e il suo valore $c(T_1;T_2)$ potrebbe anche essere $< S(T_1) - K$ per cui, vendendola, si avrebbe un payoff < 0.

Tuttavia, se l'attività sottostante non paga dividendi, sappiamo che vale la limitazione inferiore $c(T_1;T_2) \ge S(T_1) - Kb(T_1,T_2)$, per cui il payoff in caso di esercizio in T_1 sarebbe $c(T_1;T_2) - (S(T_1) - K) \ge \left(S(T_1) - Kb(T_1,T_2)\right) - \left(S(T_1) - K\right) = K\left[1 - b(T_1,T_2)\right] \ge 0$ perché i tassi d'interesse sono non negativi $\Rightarrow$ quindi la proprietà vale se non ci sono dividendi.

D'altra parte se siamo in questa situazione (senza dividendi) dimostreremo che le opzioni call europee valgono esattamente quanto quelle americane.

Relazione fra opzioni put europee ed americane con identiche caratteristiche

(p0) $P(t) \geq p(t) \qquad \forall t \in [0,T]$.

Dimostrazione: In T sappiamo già che vale l'uguaglianza perché se l'opzione americana non è stata esercitata prima, alla scadenza il suo valore coincide col payoff, che è lo stesso delle opzioni europee. Se per assurdo $\exists t < T : P(t) < p(t)$,

- in t si potrebbe vendere la put europea e comprare quella americana, con un introito pari a $p(t) - P(t) > 0$;
- tra t e T non fare niente, anche se abbiamo una put americana che potrebbe essere esercitata;
- in T esercitare se colui a cui abbiamo venduto la put europea esercita, non esercitare in caso contrario, per cui si compenserebbero i payoff, con saldo $= 0$ q.c.

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Limitazioni inferiori per il prezzo delle opzioni put

Abbiamo già dimostrato che

(pi1) $p(t) \geq 0 \qquad \forall t \in [0,T]$,

per cui, per la **(p0)**, anche

(Pi1) $P(t) \geq 0 \qquad \forall t \in [0,T]$.

Inoltre:

(Pi2) $P(t) \geq K - S(t) \qquad \forall t \in [0,T]$.

Dimostrazione di (Pi2): Sappiamo già che $P(T) = \max\{K - S(T), 0\} \geq K - S(T)$. Se per assurdo $\exists t < T : P(t) < K - S(t)$, in t si potrebbe comprare la put ed esercitarla subito, con un introito immediato pari a $K - S(t) - P(t) > 0$ e poi più nulla, e quindi ci sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Osservazione: La limitazione **(Pi2)** non vale per le opzioni europee, che prima della scadenza potrebbero anche avere un prezzo $p(t) < K - S(t)$ senza che ciò costituisca un'opportunità di arbitraggio in quanto non possono essere esercitate subito.

Infine:

(pi2) $p(t) \geq Kb(t,T) - \overline{S}(t) \qquad \forall t \in [0,T]$,

da cui, per la **(p0)**, anche

(Pi3) $P(t) \geq Kb(t,T) - \overline{S}(t) \qquad \forall t \in [0,T]$.

Interpretazione di (ci2): A secondo membro riconosciamo il valore di un contratto forward, in posizione short, sulla stessa attività sottostante della put, data di consegna T e prezzo di consegna K. La put non può valere meno del forward, visto che c'è la possibilità di "tirarsi indietro", cioè non esercitare se non conviene farlo.

<u>Dimostrazione di (pi2)</u>:
La relazione vale in T in quanto $p(T) = \max\{K - S(T), 0\} \geq K - S(T) = Kb(T,T) - \bar{S}(T)$.
Supponiamo per assurdo che $\exists t < T$ tale per cui la **(pi2)** è violata. Distinguiamo tre casi.

1) **<u>Non ci sono dividendi</u>** tra t e T, quindi $p(t) < Kb(t,T) - S(t)$. Allora:

- in t si
  - vendono allo scoperto K titoli a cedola nulla di scadenza T,
  - compra il bene sottostante,
  - compra la put,

  con un introito pari a $Kb(t,T) - S(t) - p(t) > 0$;

- tra t e T non succede nulla;

- in T
  - se $S(T) < K$ si esercita la put, incassando K e consegnando il bene, in caso contrario si vende il bene sul mercato a pronti, incassando $S(T)$,
  - si rimborsa il valore nominale, K, dei bond venduti allo scoperto,

  con payoff $\max\{S(T), K\} - K = \max\{S(T) - K, 0\} \geq 0$ q.c.

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

2)I **dividendi** pagati tra t e T sono **certi**, quindi $p(t) < Kb(t,T) - S(t) + D(t,T)$. Allora:

- in t si
  - vendono allo scoperto K titoli a cedola nulla di scadenza T,
  - vendono allo scoperto titoli a cedola nulla "corrispondenti ai dividendi",
  - compra il bene sottostante,
  - compra la put,

  con un introito pari a $Kb(t,T) + D(t,T) - S(t) - p(t) > 0$;
- tra t e T si incassano i dividendi, che vengono via via utilizzati per rimborsare i bond corrispondenti venduti allo scoperto $\Rightarrow$ saldo nullo;
- in T i dividendi sono stati tutti incassati e i bond corrispondenti rimborsati. Quindi, come nel caso 1),
  - se $S(T) < K$ si esercita la put, incassando K e consegnando il bene, in caso contrario si vende il bene sul mercato a pronti, incassando $S(T)$,
  - si rimborsa il valore nominale, K, dei bond venduti allo scoperto,

  con payoff $\max\{S(T), K\} - K = \max\{S(T) - K, 0\} \geq 0$ q.c.

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

3)I **<u>dividendi</u>** sono pagati **<u>nel continuo</u>**, con intensità q, e reinvestiti nel bene stesso, quindi $p(t) < Kb(t,T) - S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}$. Allora:

- in t si
  - vendono allo scoperto K titoli a cedola nulla di scadenza T,
  - compra una quantità di bene sottostante pari a $\mathrm{e}^{-q(T-t)}$,
  - compra la put,

  con un introito pari a $Kb(t,T) - S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} - p(t) > 0$;

- tra t e T si reinvestono i dividendi nel bene stesso, cosicché la quantità disponibile aumenta nel tempo;

- in T la quantità di bene è unitaria. Quindi, come nei casi 1) e 2),
  - se $S(T) < K$ si esercita la put, incassando K e consegnando il bene, in caso contrario si vende il bene sul mercato a pronti, incassando $S(T)$,
  - si rimborsa il valore nominale, K, dei bond venduti allo scoperto,

  con payoff $\max\{S(T), K\} - K = \max\{S(T) - K, 0\} \geq 0$ q.c.

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Limitazioni superiori per il prezzo delle opzioni put

(Ps1) $P(t) \le K \qquad \forall t \in [0,T]$,

da cui, per la **(p0)**, anche

(ps1) $p(t) \le K \qquad \forall t \in [0,T]$.

In realtà, per le opzioni europee abbiamo una limitazione più stretta (se i tassi sono non negativi):

(ps2) $p(t) \le Kb(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$.

Interpretazione:

L'opzione americana può essere immediatamente "trasformata" nel prezzo di esercizio K, però per far questo bisogna cedere l'attività sottostante che ha un valore non negativo, quindi l'opzione vale meno di K. Solo se $S(t) = 0$ è equivalente avere l'opzione o il suo prezzo di esercizio, quindi $P(t) = K$.

Anche se l'opzione è europea si può avere K cedendo l'attività sottostante, ma non subito bensì a scadenza, per cui è come ricevere subito K titoli a cedola nulla di scadenza T dando in cambio l'attività sottostante in T. Quindi l'opzione vale meno dei bond, e solo se l'attività sottostante non vale nulla adesso (per cui si presume che non avrà valore nemmeno in T), l'opzione ha lo stesso valore degli stessi, cioè $p(t) = Kb(t,T)$.

Dimostrazione della (Ps1):

- A scadenza T l'opzione vale $0 \le K$ (se $S(T) \ge K$), oppure $K - S(T) \le K$ (se $S(T) < K$).
- Supponiamo per assurdo che $\exists t < T : P(t) > K$.

  Allora in t si vende la put e si investe K nel money market account, con un introito pari a $P(t) - K > 0$.

  Successivamente:

  - se la put viene esercitata in $\tau \le T$, si ritira il montante del money market account, si paga K e si riceve il bene, con un payoff pari a $K(e^{\int_t^\tau r(u)\mathrm{d}u} - 1) + S(\tau) \ge 0$ q.c.;
  - se la put non viene mai esercitata, in T ci rimane il money market account, che vale $Ke^{\int_t^T r(u)\mathrm{d}u} \ge 0$ quasi certamente.

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Dimostrazione della (ps2):

A scadenza T l'opzione vale $0 \le K$ se $S(T) \ge K)$, oppure $K - S(T) \le K$ se $S(T) < K$ $(b(T,T) = 1)$.

Supponiamo per assurdo che $\exists t < T : p(t) > Kb(t,T)$.

- Allora in t si vende la put e si comprano K titoli a cedola nulla di scadenza T, con un introito pari a $p(t) - Kb(t,T) > 0$.
- Tra t e T non succede nulla.
- In T:
  - si incassa il valore nominale, K, dei bond in scadenza;
  - se la put viene esercitata, si paga K e si riceve il bene, che vale $S(T) \ge 0$ (q.c.), altrimenti ci rimane $K \ge 0$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Osservazione: La limitazione non vale per opzioni americane perché in caso di esercizio anticipato (in $\tau < T$) la vendita dei bond prima della scadenza ci frutta meno del loro valore nominale (con tassi positivi), e quindi il payoff finale, $S(\tau) - K\left[1 - b(\tau,T)\right]$, potrebbe anche risultare < 0.

Intervallo di valori per il prezzo delle opzioni put

Put europee:

Anche se ci sono due limitazioni superiori, con tassi non negativi la minima è $Kb(t,T)$

$$\Rightarrow \quad \max\left\{Kb(t,T)-\bar{S}(t),0\right\} \le p(t) \le Kb(t,T) \qquad \forall t \in [0,T].$$

In particolare:

$$S(t)=0 \;\Rightarrow\; p(t)=Kb(t,T),$$

$$K=0 \;\Rightarrow\; p(t)=0.$$

Put americane:

$$\Rightarrow \quad \max\left\{K-S(t), Kb(t,T)-\bar{S}(t),0\right\} \le P(t) \le K \qquad \forall t \in [0,T].$$

In particolare:

$$S(t)=0 \;\Rightarrow\; P(t)=K,$$

$$K=0 \;\Rightarrow\; P(t)=0.$$

Proprietà analitiche del prezzo delle opzioni put

Monotonia rispetto allo strike:

(1) $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad p(t;K_1) \le p(t;K_2) \qquad \forall t \in [0,T]$,

(2) $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad P(t;K_1) \le P(t;K_2) \qquad \forall t \in [0,T]$.

Dimostrazione della (1):

E' immediato verificare che la proprietà vale in T. Infatti

$$K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad p(T;K_1) = \max\{K_1 - S(T), 0\} \le \max\{K_2 - S(T), 0\} = p(T;K_2).$$

Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$ e $t < T : p(t;K_1) > p(t;K_2)$, allora in t si potrebbe vendere la put con prezzo di esercizio K_1 e comprare quella con prezzo di esercizio K_2, cioè comprare un *put bearish vertical spread*, che ha un payoff finale, in T, ≥ 0 quasi certamente (è l'opposto del payoff del *put bullish vertical*, che avevamo visto essere ≤ 0 q.c.), a fronte di un introito iniziale pari a $p(t;K_1) - p(t;K_2) > 0$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

<u>Dimostrazione della (2)</u>:

Anche qui è immediato verificare che la proprietà vale in T in quanto, esattamente come prima, $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad P(T;K_1) = \max\{K_1 - S(T), 0\} \le \max\{K_2 - S(T), 0\} = P(T;K_2)$.

Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$ e $t < T : P(t;K_1) > P(t;K_2)$, allora in t si potrebbe vendere la put con strike K_1 e comprare quella con strike K_2, cioè comprare un *put bearish vertical spread* americano, con un introito pari a $P(t;K_1) - P(t;K_2) > 0$.

Successivamente, anche se si è in possesso di un'opzione americana, si potrebbe "stare in agguato", aspettando di vedere cosa fa la controparte:

- se l'opzione con prezzo di esercizio K_1 viene esercitata in un istante $\tau \le T$, allora esercitiamo anche noi, con un payoff pari a $\left(K_2 - S(\tau)\right) - \left(K_1 - S(\tau)\right) = K_2 - K_1 > 0$;
- se l'opzione con prezzo di esercizio K_1 non viene <u>mai</u> esercitata, in T ci rimane la nostra, che ha payoff $\max\{K_2 - S(T), 0\} \ge 0$.

$\Rightarrow$ Comunque vadano le cose, a fronte di un introito iniziale strettamente positivo abbiamo un payoff finale non negativo quasi certamente,

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

<u>Lipschitzianità rispetto allo strike</u>:

(3) $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad p(t;K_2) - p(t;K_1) \le (K_2 - K_1)b(t,T) \qquad \forall t \in [0,T]$,

(4) $K_1 < K_2 \quad \Rightarrow \quad P(t;K_2) - P(t;K_1) \le K_2 - K_1 \qquad \forall t \in [0,T]$.

$\Rightarrow$ Questa proprietà implica la <u>continuità</u> del prezzo delle opzioni rispetto allo strike.

<u>Dimostrazione della (3)</u>:

La proprietà vale in T. Infatti

$p(T;K_2) - p(T;K_1) = \max\{K_2 - S(T), 0\} - \max\{K_1 - S(T), 0\}$ è il payoff a scadenza di un *put bearish vertical spread*, $\le (K_2 - K_1)b(T,T)(= K_2 - K_1)$ q.c. (avevamo verificato che il suo opposto, payoff del *put bullish vertical spread*, era $\ge -(K_2 - K_1)$).

Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$ e $t < T$: $p(t;K_2) - p(t;K_1) > (K_2 - K_1)b(t,T)$, allora in t si potrebbe vendere la put con strike K_2, comprare quella con strike K_1 (cioè comprare un *put bullish vertical spread*) e comprare inoltre $K_2 - K_1$ titoli a cedola nulla di scadenza T, con un introito pari a $p(t;K_2) - p(t;K_1) - (K_2 - K_1)b(t,T) > 0$.

Il payoff finale, in T, di questa strategia, risulta pari a

$$\max\{K_1 - S(T), 0\} - \max\{K_2 - S(T), 0\} + K_2 - K_1 = \begin{cases} 0 & \text{se } S(T) < K_1 \\ S(T) - K_1 & \text{se } K_1 \le S(T) \le K_2 \\ K_2 - K_1 & \text{se } S(T) > K_2 \end{cases} \ge 0$$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

<u>Dimostrazione della (4)</u>:

Per lo stesso motivo di prima la proprietà vale in T (i payoff a scadenza di opzioni europee e americane sono coincidenti).

Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$ e $t < T : P(t;K_2) - P(t;K_1) > K_2 - K_1$, allora in t si potrebbe vendere la put con strike K_2, comprare quella con strike K_1 e investire $K_2 - K_1$ nel money market account, con un introito pari a $P(t;K_2) - P(t;K_1) - (K_2 - K_1) > 0$.

Successivamente, anche se si è in possesso di un'opzione americana, si potrebbe "stare in agguato", aspettando di vedere cosa fa la controparte:

- se l'opzione con prezzo di esercizio K_2 viene esercitata in un istante $\tau \leq T$, allora ritiriamo il montante del money market account ed esercitiamo anche noi, con un payoff pari a $\dfrac{K_2 - K_1}{B(t)} B(\tau) + \big(K_1 - S(\tau)\big) - \big(K_2 - S(\tau)\big) = (K_2 - K_1)(\mathrm{e}^{\int_t^\tau r(u)\mathrm{d}u} - 1) \geq 0$ quasi certamente, se i tassi sono non negativi, come abbiamo sempre assunto;
- se l'opzione con prezzo di esercizio K_2 non viene <u>mai</u> esercitata non esercitiamo neppure noi, ma ci rimane comunque il montante del money market account $\dfrac{K_2 - K_1}{B(t)} B(T) = (K_2 - K_1)\mathrm{e}^{\int_t^T r(u)\mathrm{d}u} \geq 0$ quasi certamente.

$\Rightarrow$ Comunque vadano le cose, a fronte di un introito iniziale strettamente positivo abbiamo un payoff finale non negativo (quasi certamente),

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

<u>**Convessità rispetto allo strike**</u>:

(5) $K_1 < K_2,\ 0 \le \alpha \le 1 \ \Rightarrow\ p\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) \le \alpha\, p(t;K_1) + (1-\alpha)\, p(t;K_2) \quad \forall t \in \big[0,T\big]$,

(6) $K_1 < K_2,\ 0 \le \alpha \le 1 \ \Rightarrow\ P\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) \le \alpha P(t;K_1) + (1-\alpha) P(t;K_2) \quad \forall t \in \big[0,T\big]$.

$\Rightarrow$ Anche questa proprietà implica la <u>continuità</u> del prezzo delle put rispetto allo strike.

<u>Dimostrazione della (5)</u>:

E' facile verificare, scrivendo i payoff, che la proprietà vale in T. In particolare, se $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$ o $S(T) \le K_1$ o $S(T) \ge K_2$ vale l'=, se $0 < \alpha < 1$ e $K_1 < S(T) < K_2$ vale il <.

E' chiaro che vale l'= anche per $t < T$ nei casi estremi $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$. Se per assurdo esistessero $K_1 < K_2$, $0 < \alpha < 1$ e $t < T$: $p\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) > \alpha\, p(t;K_1) + (1-\alpha)\, p(t;K_2)$, allora in t si potrebbe vendere una put con prezzo di esercizio $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$, comprare α put con prezzo di esercizio K_1 e $1-\alpha$ put con prezzo di esercizio K_2, con un introito pari a $p\big(t;\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\big) - \alpha\, p(t;K_1) - (1-\alpha)\, p(t;K_2) > 0$.

Il payoff finale, in T, di questa strategia, risulta pari a

$$\alpha \max\left\{K_1 - S(T), 0\right\} + (1-\alpha)\max\left\{K_2 - S(T), 0\right\} - \max\left\{\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2 - S(T), 0\right\}$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{se } S(T) \le K_1 \\ \alpha\big(S(T) - K_1\big) & \text{se } K_1 < S(T) < \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2 \\ (1-\alpha)\big(K_2 - S(T)\big) & \text{se } \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2 \le S(T) < K_2 \\ 0 & \text{se } S(T) \ge K_2 \end{cases} \quad \ge 0 \text{ quasi certamente}$$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Dimostrazione della (6):

Come nel caso precedente, la proprietà vale in T (il payoff è lo stesso delle opzioni europee), e inoltre vale l'$=$ anche per $t < T$ nei casi estremi $\alpha = 0$ o $\alpha = 1$.

Supponiamo per assurdo che esistano $K_1 < K_2$, $0 < \alpha < 1$ e $t < T$: $P\left(t; \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\right) > \alpha P(t; K_1) + (1-\alpha)P(t; K_2)$.

Allora in t si potrebbe vendere una put con prezzo di esercizio $\alpha K_1 + (1-\alpha)K_2$, comprare α put con prezzo di esercizio K_1 e $1-\alpha$ put con prezzo di esercizio K_2, con un introito pari a $P\left(t; \alpha K_1 + (1-\alpha)K_2\right) - \alpha P(t; K_1) - (1-\alpha)P(t; K_2) > 0$.

Successivamente, anche se si è in possesso di opzioni americane, si potrebbe "stare in agguato", aspettando di vedere cosa fa la controparte:

- se questa esercita in $\tau \le T$, allora esercitiamo anche noi, con payoff $= 0$;
- se questa non esercita mai, allora in T ci rimangono le nostre opzioni, che hanno un payoff ≥ 0 quasi certamente

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Monotonia rispetto alla scadenza delle opzioni put americane:

(7) $T_1 < T_2 \quad \Rightarrow \quad P(t;T_1) \leq P(t;T_2) \quad \forall t \in [0, T_1]$.

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che $\exists t \leq T_1 : P(t;T_1) > P(t;T_2)$. Allora in t vendiamo la put con scadenza T_1 e compriamo quella con scadenza T_2, con un introito pari a $P(t;T_1) - P(t;T_2) > 0$.

Successivamente, anche se siamo in possesso di una put americana, non facciamo niente e aspettiamo di vedere cosa fa la controparte:

- se questa esercita in $\tau \leq T_1$, allora esercitiamo anche noi, con payoff $= 0$;
- se questa non esercita mai, allora in T_1 ci rimane la nostra opzione, che vale $P(T_1;T_2) \geq 0$ (q.c.)

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del II tipo.

Osservazione:

La proprietà non vale per le put europee, che potrebbero avere prezzo minore anche se con scadenza più lontana. Infatti, simulando la dimostrazione di prima:

Supponiamo che $\exists t \leq T_1 : p(t;T_1) > p(t;T_2)$. Allora in t vendiamo la put con scadenza T_1 e compriamo quella con scadenza T_2, con un introito pari a $p(t;T_1) - p(t;T_2) > 0$.

Tra t e T_1 non succede niente perché entrambe le opzioni sono europee.

Arriviamo in T_1:

- se la put che abbiamo venduto non viene esercitata, ci rimane la nostra, che vale $p(T_1;T_2) \geq 0$;
- se però la put viene esercitata non possiamo esercitare la nostra, controbilanciando il payoff, perché siamo prima della scadenza, e il suo valore $p(T_1;T_2)$ potrebbe anche essere $< K - S(T_1)$ per cui, vendendola, si avrebbe un payoff < 0.

Anche se l'attività sottostante non paga dividendi, la limitazione inferiore non ci consente di garantire la non negatività del payoff finale, come succedeva nel caso delle call.

RELAZIONI FRA OPZIONI CALL E PUT "OMOLOGHE"

Put-Call Parity per opzioni europee

$p(t) = c(t) - \bar{S}(t) + Kb(t,T)$ o, equivalentemente, $c(t) = p(t) + \bar{S}(t) - Kb(t,T)$, $\forall t \in [0,T]$.

Dimostrazione:

Osserviamo preliminarmente che la relazione vale in T in quanto

$$c(T) - p(T) = \max\{S(T) - K, 0\} - \max\{K - S(T), 0\} = S(T) - K = V^L(T).$$

$\Rightarrow$ Visto che opzioni europee e contratti forward non generano flussi di cassa prima di T, per evitare opportunità di arbitraggio devono avere lo stesso valore anche prima di T:

$$c(t) - p(t) = V^L(t) = \bar{S}(t) - Kb(t,T).$$

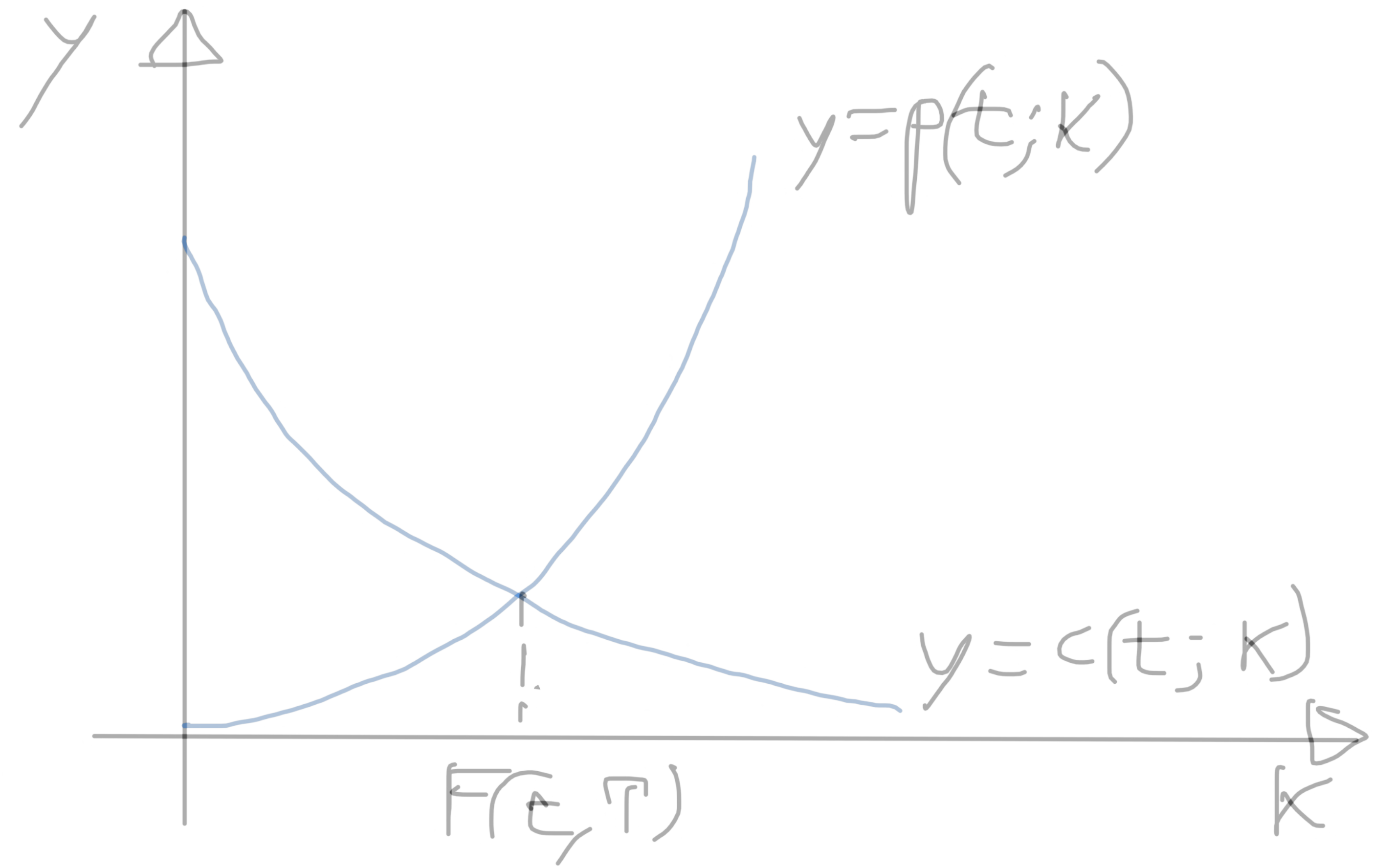
Osservazione:

In realtà, siccome sul mercato potrebbero non esserci contratti forward, per trarre questa conclusione bisogna ragionare direttamente con il portafoglio di attività di base, di valore $\bar{S}(t) - Kb(t,T)$, che abbiamo costruito nelle lezioni precedenti, inerenti i contratti forward, in modo tale da replicare il payoff finale $S(T) - K = c(T) - p(T)$ (portafoglio che avevamo chiamato, rispettivamente, B, C, D, E, in base alle ipotesi fatte sui dividendi).

⇒ Se sul mercato fossero presenti opzioni europee, un contratto forward in posizione long (short), oltre che tramite portafogli di attività di base potrebbe essere replicato tramite una posizione long (short) su una call e short (long) su una put omologa, ovviamente con la stessa attività sottostante, scadenza pari alla data di consegna e prezzo di esercizio uguale al prezzo di consegna.

⇒ $V^L(t) = c(t) - p(t) \quad \Rightarrow \quad \left(V^L(t) = 0 \iff c(t) = p(t)\right) \quad \forall t \in [0, T]$.

⇒ Il prezzo forward è quel particolare strike che uguaglia i valori di put e call omologhe.



Relazioni fra opzioni put e call americane

$$C(t)-S(t)+Kb(t,T)\le P(t)\le C(t)-\bar{S}(t)+K \qquad \text{o, equivalentemente,}$$

$$P(t)+\bar{S}(t)-K\le C(t)\le P(t)+S(t)-Kb(t,T) \qquad \forall t\in[0,T].$$

Osservazione:

Non si tratta di una relazione di parità in quanto, in generale, $\bar{S}(t)\le S(t)$ e, se i tassi sono non negativi, $b(t,T)\le 1$. La relazione diventa di parità soltanto se non ci sono dividendi ($\bar{S}(t)=S(t)$) e i tassi sono nulli ($b(t,T)=1$).

Dimostrazione:

E' immediato verificare che la relazione vale in T dove $\bar{S}(T)=S(T)$ e $b(T,T)=1$. Quindi il primo e il terzo membro coincidono e la relazione diventa una parità, la stessa che si ha nel caso europeo in quanto a scadenza opzioni europee e americane hanno uguale payoff.

Per la dimostrazione nel caso $t<T$ concentriamoci sulla prima delle due relazioni e supponiamo per assurdo che questa sia violata, ovvero che

$\exists t<T: P(t)<C(t)-S(t)+Kb(t,T)$ oppure $P(t)>C(t)-\bar{S}(t)+K$.

Se $P(t) < C(t) - S(t) + Kb(t,T)$ allora

- in t:
  - vendiamo la call,
  - vendiamo allo scoperto K titoli a cedola nulla di scadenza T,
  - compriamo la put
  - compriamo il bene sottostante

  con un introito pari a $C(t) + Kb(t,T) - P(t) - S(t) > 0$.
- Successivamente non prendiamo iniziative riguardo all'esercizio della put, ma aspettiamo di vedere cosa fa colui a cui abbiamo venduto la call:
  - se la call viene esercitata in $\tau \le T$ consegniamo il bene, incassiamo K, compriamo i bond per restituirli e vendiamo la put, con un payoff pari a $K\left[1 - b(\tau,T)\right] + P(\tau) \ge 0$,
  - se la call non viene <u>mai</u> esercitata, in T esercitiamo la put, cioè consegniamo il bene e incassiamo K, e rimborsiamo i bond venduti allo scoperto giunti a scadenza, con un payoff $= 0$.

  A questi payoff non negativi (q.c.) si aggiungono anche eventuali dividendi, in particolare incassiamo i dividendi (≥ 0) fino a τ o, rispettivamente, T, se questi sono certi, vendiamo la quantità di bene che ci rimane in τ $(= \mathrm{e}^{q(\tau - t)} - 1)$ o, rispettivamente, in T $(= \mathrm{e}^{q(T-t)} - 1)$ se i dividendi sono pagati nel continuo e reinvestiti nel bene stesso

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del secondo tipo.

Se $P(t) > C(t) - \bar{S}(t) + K$ distinguiamo tre casi:

1)**<u>Non ci sono dividendi</u>** tra t e T, quindi $P(t) > C(t) - S(t) + K$. Allora

- in t:
  - vendiamo la put,
  - vendiamo allo scoperto il bene sottostante,
  - compriamo la call,
  - investiamo K nel money market account,

  con un introito pari a $P(t) + S(t) - C(t) - K > 0$.
- Successivamente non prendiamo iniziative riguardo all'esercizio della call, ma aspettiamo di vedere cosa fa colui a cui abbiamo venduto la put:
  - se la put viene esercitata in $\tau \le T$ ritiriamo il montante del money market account, paghiamo K e riceviamo il bene, che restituiamo immediatamente, e vendiamo la call, con un payoff pari a $K(e^{\int_t^\tau r(u)\mathrm{d}u} - 1) + C(\tau) \ge 0$,
  - se la put non viene <u>mai</u> esercitata, in T ritiriamo il montante del money market account, esercitiamo la call pagando K e ricevendo il bene che restituiamo, con un payoff pari a $K(e^{\int_t^T r(u)\mathrm{d}u} - 1) \ge 0$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del secondo tipo.

2)I **<u>dividendi</u>** pagati tra t e T sono **<u>certi</u>**, quindi $P(t) > C(t) - \left[S(t) - D(t,T)\right] + K$. Allora

- in t:
  - vendiamo la put,
  - vendiamo allo scoperto il bene sottostante,
  - compriamo titoli a cedola nulla "corrispondenti" ai dividendi,
  - compriamo la call,
  - investiamo K nel money market account,

  con un introito pari a $P(t) + S(t) - D(t,T) - C(t) - K > 0$.
- Successivamente usiamo il ricavato di eventuali bond in scadenza per pagare i dividendi corrispondenti e non prendiamo iniziative riguardo all'esercizio della call, aspettando di vedere cosa fa colui a cui abbiamo venduto la put:
  - se la put viene esercitata in $\tau \le T$ ritiriamo il montante del money market account, paghiamo K e riceviamo il bene, che restituiamo immediatamente, vendiamo eventuali bond corrispondenti ai dividendi non ancora scaduti e vendiamo la call, con un payoff pari a $K(\mathrm{e}^{\int_t^\tau r(u)\mathrm{d}u} - 1) + D(\tau,T) + C(\tau) \ge 0$,
  - se la put non viene <u>mai</u> esercitata, in T ritiriamo il montante del money market account, esercitiamo la call pagando K e ricevendo il bene che restituiamo, con un payoff pari a $K(\mathrm{e}^{\int_t^T r(u)\mathrm{d}u} - 1) \ge 0$ (si noti che i bond corrispondenti ai dividendi sono già stati incassati e i dividendi pagati)

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del secondo tipo.

3)I **dividendi** sono pagati **nel continuo**, con intensità q, e reinvestiti nel bene stesso, quindi $P(t) > C(t) - S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} + K$. Allora

- in t:
  - vendiamo la put,
  - vendiamo allo scoperto una quantità di bene sottostante pari a $\mathrm{e}^{-q(T-t)}(<1)$,
  - compriamo la call,
  - investiamo K nel money market account,

  con un introito pari a $P(t) + S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} - C(t) - K > 0$.
- Successivamente il nostro debito in termini di quantità di bene da restituire aumenta al passare del tempo per effetto dei dividendi. Aspettiamo comunque di vedere cosa fa colui a cui abbiamo venduto la put:
  - se la put viene esercitata in $\tau \leq T$ ritiriamo il montante del money market account, paghiamo K e riceviamo il bene, restituiamo immediatamente una quantità di bene pari a $\mathrm{e}^{-q(T-t)}\mathrm{e}^{q(\tau-t)} = \mathrm{e}^{-q(T-\tau)}$, vendiamo la quantità residua $1-\mathrm{e}^{-q(T-\tau)}$ e vendiamo la call, con un payoff pari a $K(\mathrm{e}^{\int_t^\tau r(u)\mathrm{d}u} - 1) + S(\tau)(1-\mathrm{e}^{-q(T-\tau)}) + C(\tau) \geq 0$,
  - se la put non viene <u>mai</u> esercitata, in T ritiriamo il montante del money market account, esercitiamo la call pagando K e ricevendo il bene, che restituiamo, con un payoff pari a $K(\mathrm{e}^{\int_t^T r(u)\mathrm{d}u} - 1) \geq 0$

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del secondo tipo.

ESERCIZIO ANTICIPATO DELLE OPZIONI CALL AMERICANE

Le limitazioni al prezzo delle opzioni, in particolare una delle limitazioni inferiori, ci consentono di stabilire alcuni risultati, peraltro abbastanza intuitivi, circa la convenienza o meno all'esercizio anticipato di un'opzione americana. Più precisamente, ci sono alcune situazioni in cui siamo in grado di dire che tale esercizio anticipato non conviene, anche se l'opzione è *deep in-the-money*, mentre non abbiamo risultati che ci consentono di dire quando esso conviene. Per far vedere che l'esercizio non conviene, dimostreremo che l'opzione ha valore temporale, cioè che il suo prezzo è strettamente maggiore di quello che si otterrebbe esercitandola subito per cui, piuttosto che esercitarla, conviene venderla.

Iniziamo dal caso delle call. Il prossimo risultato è molto forte, in quanto non soltanto ci consente di individuare quando non conviene esercitare anticipatamente una call americana, ma addirittura stabilisce che non conviene mai, per cui il diritto in più da questa fornito rispetto alla corrispondente opzione europea non vale nulla e quindi l'opzione americana vale esattamente quanto quella europea.

<u>Proposizione C1</u>:

Siano $b(\tau,T)<1$ quasi certamente $\forall\,\tau\in[0,T)$. Se l'attività sottostante non paga dividendi (almeno fino a T), allora non è mai ottimale esercitare un'opzione call americana prima della scadenza $\Rightarrow C(t)=c(t) \quad \forall t\in\left[0,T\right]$.

<u>Dimostrazione</u>:

Già sappiamo che l'uguaglianza tra i prezzi di call europee e americane vale in T poiché $C(T)=c(T)=\max\left\{S(T)-K,0\right\}$. Vale anche $\forall t<T$ quando $K=0$ in quanto, non essendoci dividendi, sappiamo che $C(t)=c(t)=S(t)$.

Supponiamo allora $K>0$ e fissiamo arbitrariamente $t<T$. Se l'attività sottostante non paga dividendi tra t e T (cioè $\overline{S}(t)=S(t)$), allora non ne pagherà nemmeno tra τ e T (cioè $\overline{S}(\tau)=S(\tau)$) $\forall\,\tau\in[t,T)$. Quindi, sfruttando la limitazione inferiore **(Ci3),** si ottiene:

$$C(\tau)\geq\overline{S}(\tau)-Kb(\tau,T)=S(\tau)-\underbrace{Kb(\tau,T)}_{<K}>S(\tau)-K \;\;\Rightarrow\;\; C(\tau)>S(\tau)-K \quad \forall\,\tau\in[t,T).$$

Non convenendo l'esercizio anticipato in tutto l'intervallo $[t,T)$ $\Rightarrow$ $C(t)=c(t)$ e, data l'arbitrarietà nella scelta di t $(<T)$, questa proprietà vale qualunque esso sia.

<u>Interpretazione:</u>

Se ci troviamo prima della scadenza e l'opzione è *in-the-money*, possiamo chiederci che cosa perdiamo e che cosa guadagniamo esercitando subito piuttosto che aspettare di arrivare a scadenza:

- guadagniamo gli eventuali dividendi prodotti dal bene sottostante,
- perdiamo gli interessi sul prezzo di esercizio, che potrebbe essere investito in titoli a cedola nulla, con rendimento strettamente positivo, fino alla scadenza dell'opzione (se non disponessimo del prezzo di esercizio, per esercitare subito dovremmo finanziarci vendendo allo scoperto i bond, e quindi pagare questi interessi).

Nel nostro caso, visto che non ci sono dividendi, non abbiamo niente da guadagnare ma soltanto da perdere, per cui non conviene l'esercizio anticipato.

<u>Osservazione</u>:

In questo ragionamento abbiamo confrontato solamente due alternative:

- esercitare subito,
- aspettare la scadenza,

senza valutare le ulteriori e potenzialmente infinite possibilità di esercizio anticipato in un istante successivo. Siccome però non ci sono dividendi, giungeremmo alla stessa conclusione ponendoci in qualunque istante prima della scadenza.

$\Rightarrow$ Il ragionamento appena fatto ci porta a concludere che, anche nel caso in cui ci sono dividendi, se in un istante $t < T$ investire lo strike K in titoli a cedola nulla con scadenza T rende di più, in termini di interessi, dei dividendi pagati dal bene sottostante tra t e T, allora non è ottimale l'esercizio immediato di un'opzione call americana ($\Rightarrow$ quello che si perde esercitando subito, piuttosto che aspettare la scadenza, supera ciò che si guadagna).

Osservazioni:

- La conclusione è corretta anche se si sono trascurate le infinite, ulteriori possibilità di esercizio anticipato in istanti successivi a t, in quanto la decisione di esercitare in t, essendo "dominata" da quella di aspettare la scadenza, è sicuramente non ottimale. Se invece dal confronto tra queste due alternative fosse risultato preferibile l'esercizio immediato, allora non sarebbe stato corretto concludere sull'ottimalità dello stesso in quanto si è trascurato di valutare le rimanenti alternative, che potrebbero risultare ancora migliori.

- Questa conclusione è comunque “locale”, in t, perché la predominanza del valore degli interessi sui dividendi non è detto che permanga anche in istanti successivi. Infatti i prezzi dei titoli a cedola nulla, e quindi gli interessi da questi procurati, variano nel tempo in maniera aleatoria, così come varia il valore dei dividendi, anche se certi, e a maggior ragione quando gli stessi dipendono dal valore del bene sottostante, come nel caso delle valute. Anche nel caso limite in cui dividendi e interessi sono certi (ad es. interessi nel regime esponenziale), mentre gli interessi calano con continuità al passare del tempo tendendo ad azzerarsi in prossimità della scadenza, i dividendi potrebbero anche essere distribuiti in maniera uniforme, e con continuità, nel tempo, e allora in questo caso la relazione potrebbe permanere, così come potrebbe invece esserci un unico, “grosso” dividendo in prossimità della scadenza per cui il suo valore aumenta al passare del tempo e la relazione può essere ribaltata. Quindi, a differenza del caso precedente, in cui non c’erano dividendi, non si può concludere sull’uguaglianza tra i valori di opzioni europee e americane.

Vediamo adesso di formalizzare, e dimostrare per altra strada, quanto appena stabilito.

- Gli interessi al tempo T sul prezzo di esercizio K investito in t in titoli a cedola nulla di scadenza T sono dati dalla differenza tra il montante (cioè il numero di bond acquistati) e l'investimento iniziale: $\dfrac{K}{b(t,T)} - K = K\left[\dfrac{1}{b(t,T)} - 1\right]$

  $\Rightarrow$ il loro valore in t, essendo noti in questa data, si ottiene "scontandoli" con il prezzo del titolo a cedola nulla $b(t,T)$: $K\left[\dfrac{1}{b(t,T)} - 1\right] b(t,T) = K\left[1 - b(t,T)\right]$.

- In caso di dividendi nel continuo con intensità q, i dividendi totali, in T, prodotti da una quantità iniziale unitaria di sottostante al tempo t, espressi in unità del bene stesso, sono pari a $\mathrm{e}^{q(T-t)} - 1$

  $\Rightarrow$ $\mathrm{e}^{q(T-t)} - 1$ unità di sottostante al tempo T sono equivalenti a $\left[\mathrm{e}^{q(T-t)} - 1\right]\mathrm{e}^{-q(T-t)} = 1 - \mathrm{e}^{-q(T-t)}$ unità dello stesso al tempo t, di valore pari a $S(t)\left[1 - \mathrm{e}^{-q(T-t)}\right]$.

Proposizione C2:

$$\left.\begin{array}{ll} K\left[1-b(t,T)\right] > D(t,T) & \text{in caso di dividendi certi} \\ K\left[1-b(t,T)\right] > S(t)\left[1-\mathrm{e}^{-q(T-t)}\right] & \text{in caso di dividendi nel continuo} \end{array}\right\} \Rightarrow\ C(t) > S(t)-K\,.$$

Dimostrazione:

Si ricordi che $C(t) \geq \bar{S}(t) - Kb(t,T)$.

- Quindi, se i dividendi sono noti, $-D(t,T) > -K + Kb(t,T)$ per ipotesi

  $\Rightarrow\ C(t) \geq \left[S(t) - D(t,T)\right] - Kb(t,T) > S(t) - K + Kb(t,T) - Kb(t,T) = S(t) - K\,.$

- In caso di dividendi nel continuo, $S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} > S(t) - K + Kb(t,T)$ per ipotesi

  $\Rightarrow\ C(t) \geq S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)} - Kb(t,T) > S(t) - K + Kb(t,T) - Kb(t,T) = S(t) - K\,.$

Proposizione C3:

Supponiamo che i prezzi dei titoli a cedola nulla prima della loro scadenza siano <1 quasi certamente e che $K>0$. Se le date di pagamento dividendi tra 0 e T sono note, allora l'esercizio anticipato, in $t<T$, di un'opzione call americana non è mai ottimale se t non è una data di pagamento dividendi oppure, se lo è, il dividendo ivi dovuto è già stato pagato.

Osservazioni:

- Gli unici istanti in cui non siamo in grado di escludere la convenienza all'esercizio anticipato di un'opzione call americana sono quelli immediatamente precedenti la distribuzione di un dividendo.
- Si noti che l'entità dei dividendi, che in generale potrebbero anche essere aleatori, non ha alcuna importanza.

<u>Dimostrazione</u>:

Sia $t < T$, e $\tau \in (t, T)$ la prossima data di pagamento dividendi. Il nostro obiettivo è quello di provare che $C(t) > S(t) - K$.

Se, *per assurdo*, fosse $C(t) = S(t) - K$ (infatti non può essere $C(t) < S(t) - K$),

- al tempo t, si potrebbe:
  - vendere allo scoperto il bene sottostante,
  - comprare la call,
  - investire K in titoli a cedola nulla di scadenza τ ,

  con un cash-flow iniziale $= 0$;
- al tempo τ, <u>immediatamente prima del pagamento del dividendo</u>:
  - vendere la call,
  - riscuotere il valore nominale dei bond in scadenza,
  - comprare il sottostante e restituirlo,

  con un cash-flow finale pari a

$$C(\tau) + \frac{K}{b(t,\tau)} - S(\tau) \geq \left[S(\tau) - K\right] + \frac{K}{b(t,\tau)} - S(\tau) = K\left[\frac{1}{b(t,\tau)} - 1\right] > 0,$$

  (poiché $b(t,\tau) < 1$ e $K > 0$)

$\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del I tipo.

<u>N.B.</u>: E' fondamentale chiudere tutto prima del pagamento del dividendo, altrimenti saremmo noi a doverlo pagare, e quindi il cash-flow finale potrebbe anche risultare < 0.

ESERCIZIO ANTICIPATO DELLE OPZIONI PUT AMERICANE

Considerando ora opzioni put, il discorso si ribalta perché, in caso di esercizio anticipato:

- si perdono gli eventuali dividendi generati dal bene sottostante,
- si guadagnano gli interessi sul prezzo di esercizio.

$\Rightarrow$ Se il valore di quello che si perde supera il valore di ciò che si guadagna, allora non conviene l'esercizio anticipato.

In particolare, se non ci sono dividendi, non si perde nulla per cui potrebbe anche convenire l'esercizio anticipato (ma non siamo in grado di stabilirlo).

Proposizione P1:

$$\left.\begin{array}{ll} K\left[1-b(t,T)\right]<D(t,T) & \text{in caso di dividendi certi} \\ K\left[1-b(t,T)\right]<S(t)\left[1-\mathrm{e}^{-q(T-t)}\right] & \text{in caso di dividendi nel continuo} \end{array}\right\} \Rightarrow \; P(t)>K-S(t).$$

Dimostrazione:

Si ricordi che $P(t)\geq Kb(t,T)-\bar{S}(t)$.

- Quindi, se i dividendi sono noti, $D(t,T)>K-Kb(t,T)$ per ipotesi

  $\Rightarrow \; P(t)\geq Kb(t,T)-\left[S(t)-D(t,T)\right]>Kb(t,T)-S(t)+K-Kb(t,T)=K-S(t)$.

- In caso di dividendi nel continuo, $-S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}>K-Kb(t,T)-S(t)$ per ipotesi

  $\Rightarrow \; P(t)\geq Kb(t,T)-S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}>Kb(t,T)+K-Kb(t,T)-S(t)=K-S(t)$.

Proposizione P2:

Si supponga che le date di pagamento dei dividendi siano note. Siano $t < T$, e $\tau \in (t,T)$ la prossima data di pagamento dividendi. Indichiamo con d il dividendo che verrà pagato in τ, se noto, oppure una sua limitazione inferiore quasi certa, se aleatorio. Se tale dividendo (o limitazione) supera gli interessi conseguibili tramite l'investimento dello strike K in titoli a cedola nulla di scadenza τ, allora non è ottimale esercitare l'opzione put in t, cioè

$$d > \frac{K}{b(t,\tau)} - K \quad \Rightarrow \quad P(t) > K - S(t).$$

Dimostrazione:

Si supponga *per assurdo* che $P(t) = K - S(t)$. Allora

- al tempo t, si potrebbe:
  - vendere allo scoperto $\dfrac{K}{b(t,\tau)}$ titoli a cedola nulla di scadenza τ,
  - comprare la put,
  - comprare il bene sottostante,

  con un cash-flow iniziale $= 0$;

- al tempo τ:
  - incassare il dividendo,
  - vendere la put,
  - vendere l'attività sottostante,
  - rimborsare i bond in scadenza,

con un cash-flow finale = (se il dividendo è certo) o ≥ q.c. (se aleatorio) a

$$d + P(\tau) + S(\tau) - \frac{K}{b(t,\tau)} > \left[\frac{K}{b(t,\tau)} - K\right] + \left[K - S(\tau)\right] + S(\tau) - \frac{K}{b(t,\tau)} = 0$$

⇒ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del I tipo.

<u>**Osservazione**</u>:

Se i prezzi dei titoli a cedola nulla di scadenza τ sono deterministici e crescenti nel tempo, allora $d > \dfrac{K}{b(t,\tau)} - K \;\Rightarrow\; d > \dfrac{K}{b(u,\tau)} - K \quad \forall u \in [t,\tau]$

⇒ l'esercizio anticipato non è ottimale non soltanto in t, ma (almeno) fino a quando il dividendo non sia stato pagato.

MODELLO BINOMIALE

(Cox, Ross, Rubinstein, 1979)

Come si è visto, le ipotesi di lavoro introdotte all'inizio non sono sufficienti per individuare in maniera precisa il prezzo di un'opzione. Se si vuol raggiungere questo risultato, perlomeno con riferimento alle opzioni europee, bisogna "modellare" anche l'evoluzione stocastica del prezzo dell'attività sottostante. In tal senso, un modello molto semplice ed allo stesso tempo molto efficace per capire la logica sottostante è quello binomiale. Esso inoltre gode di importanti proprietà asintotiche.

Modello monoperiodale

Supponiamo che

- il mercato sia aperto in due sole date, indicate per convenzione con 0 e 1;
- su di esso siano trattate due attività di base: un'attività non rischiosa e un'attività rischiosa.

⇒ Visto che c'è un'unica data futura in cui sono aperti i mercati, l'unica attività non rischiosa è costituita dal titolo a cedola nulla di scadenza 1, con rendimento $r \doteq r(0,1) = -\ln b(0,1)$.

- Tuttavia, per comodità (in vista dell'estensione al modello binomiale multiperiodale), consideriamo come attività non rischiosa il money market account che formalizza, quando si opera nel discreto, una strategia di tipo roll-over su titoli a cedola nulla con scadenza la data successiva di apertura dei mercati.

⇒ Nel modello monoperiodale ciò significa investire 1 unità monetaria al tempo 0 nel titolo a cedola nulla con scadenza 1, per cui $B(0) = 1$ e $B(1) = \mathrm{e}^r$ (anziché investire $b(0,1) = \mathrm{e}^{-r}$ in 0 per avere $b(1,1) = 1$ in 1, con cash-flow proporzionali) .

- Supponiamo che il prezzo iniziale dell'attività rischiosa sia $S(0) = S > 0$, e che il suo prezzo in 1, $S(1)$, possa assumere soltanto due possibili valori, $S^{(u)}$ ("up") ed $S^{(d)}$ ("down") tali che $S^{(u)} > S^{(d)} > 0$.

  Per comodità poniamo $u = \dfrac{S^{(u)}}{S}$ ($\Rightarrow$ $S^{(u)} = Su$) e $d = \dfrac{S^{(d)}}{S}$ ($\Rightarrow$ $S^{(d)} = Sd$), per cui i due numeri reali u e d, con $u > d > 0$, possono essere interpretati come possibili determinazioni del fattore di capitalizzazione aleatorio $\dfrac{S(1)}{S(0)}$.

⇒ Gli eventi, incompatibili ed esaustivi, $\{S(1) = Su\}$ e $\{S(1) = Sd\}$ costituiscono una partizione dell'evento certo; d'ora innanzi li chiameremo, rispettivamente, "stato up" e "stato down".

Schematicamente si ha:

$$\begin{array}{ccc} & & e^r \\ & \nearrow & \\ 1 & & \\ & \searrow & \\ & & e^r \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & & Su \\ & \nearrow & \\ S & & \\ & \searrow & \\ & & Sd \end{array}$$

Osservazioni:

1. Il prezzo in 1 dell'attività rischiosa congloba eventuali dividendi.
2. E' importante che tutti gli operatori del mercato concordino sulla descrizione dell'incertezza riguardante $S(1)$, attribuendo probabilità strettamente positiva e di somma 1 ad entrambe le determinazioni Su e Sd, mentre è del tutto irrilevante tale probabilità, che potrebbe anche differire da operatore ad operatore. Ricordiamo, infatti, che tutti gli operatori attribuiscono probabilità equivalenti (ma non necessariamente coincidenti) agli eventi d'interesse.

$\Rightarrow$ L'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio implica $d < e^r < u$.

$\Rightarrow$ "up" e "down" non fanno riferimento al movimento di $S(1)$ rispetto ad S (infatti d potrebbe anche essere >1 e quindi $Sd > S$), quanto al valore finale dell'investimento di S nel money market account.

Dimostrazione:

Supponiamo per assurdo che la relazione sia violata, ovvero che $d \geq e^r$ oppure $u \leq e^r$.

- Se $d \geq e^r$, in 0:

  - vendiamo allo scoperto S unità di money market account,
  - compriamo il bene sottostante,

  con un saldo $= 0$, e in 1:

  - rivendiamo il bene,
  - rimborsiamo il money market account,

  con un saldo pari a $S(1) - Se^r = \begin{cases} Su - Se^r = S(u - e^r) > 0 & \text{nello stato up} \\ Sd - Se^r = S(d - e^r) \geq 0 & \text{nello stato down} \end{cases}$

  $\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del I tipo.

- Se invece $u \leq \mathrm{e}^r$, in 0:
  - vendiamo allo scoperto il bene sottostante,
  - compriamo S unità di money market account,

  con un saldo $= 0$, e in 1:
  - rivendiamo il money market account,
  - compriamo il bene, che restituiamo,

  con un saldo pari a $S\mathrm{e}^r - S(1) = \begin{cases} S\mathrm{e}^r - Su = S(\mathrm{e}^r - u) \geq 0 & \text{nello stato up} \\ S\mathrm{e}^r - Sd = S(\mathrm{e}^r - d) > 0 & \text{nello stato down} \end{cases}$

  $\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del I tipo.

Introduciamo ora dei <u>derivati</u> con scadenza 1 e attività sottostante l'attività rischiosa.

⇒ Il loro <u>payoff finale</u> $X(1)$ (in generale aleatorio) sarà funzione del prezzo finale dell'attività sottostante, $X(1) = f\left(S(1)\right)$, e quindi potrà assumere (al più) <u>due determinazioni</u> a seconda che si verifichi lo "stato up" oppure lo "stato down".

Indichiamo, rispettivamente, con $x = f(Su)$ e $y = f(Sd)$ queste determinazioni, e conveniamo di rappresentare tale payoff tramite un vettore di $\mathbb{R}^2$. Rappresentiamo allo stesso modo anche le due attività di base.

<u>Esempi</u>: $\begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} \to$ attività rischiosa di base, $\begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix} \to$ attività non rischiosa

$\begin{pmatrix} \max\{Su - K, 0\} \\ \max\{Sd - K, 0\} \end{pmatrix} \to$ opzione call con prezzo di esercizio K

$\begin{pmatrix} K - Su \\ K - Sd \end{pmatrix} \to$ contratto forward con prezzo di consegna K, in posizione short

<u>Definizioni</u>:

1. Dato un titolo (derivato), identificabile tramite il suo payoff finale $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, esso si dice <u>replicabile</u> se è possibile ottenerlo come valore finale di un portafoglio costituito dalle due attività di base (cioè se tale derivato è un'attività *ridondante*).
2. Sia $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ replicabile tramite un portafoglio costituito da δ attività rischiose e β attività non rischiose. I due numeri reali δ e β definiscono la <u>strategia</u> (o portafoglio) <u>replicante</u> il payoff $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

   $\Rightarrow$ Si tratta (necessariamente) di una <u>strategia statica</u>, in quanto inizia in 0 e non viene più modificata fino alla sua chiusura, in 1.
3. Il <u>mercato</u> costituito dalle due attività di base si dice <u>completo</u> se ogni payoff è replicabile.

$\Rightarrow$ Il payoff $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è replicabile se $\exists \delta, \beta \in \mathbb{R} : \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Il mercato è completo se $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \ \exists \delta, \beta \in \mathbb{R} : \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$u \neq d$ $\Rightarrow$ i vettori $\begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix} e^r \\ e^r \end{pmatrix}$ sono <u>linearmente indipendenti</u>

$\Rightarrow$ essendo 2, essi costituiscono una <u>base</u>, e quindi un <u>sistema di generatori</u>, di $\mathbb{R}^2$

$\Rightarrow$ <u>la strategia replicante è unica</u>.

Per determinare tale strategia risolviamo allora il sistema lineare

$$\begin{cases} \delta S u + \beta \mathrm{e}^{r} = x \\ \delta S d + \beta \mathrm{e}^{r} = y \end{cases} .$$

Sottraendo membro a membro la seconda equazione dalla prima, e dividendo per $S(u-d)$ $(\neq 0)$, si ottiene:

$$\delta = \frac{x-y}{S(u-d)} .$$

Sostituendo poi δ in una delle due equazioni ed esplicitando β si ha infine:

$$\beta = \mathrm{e}^{-r} \frac{yu - xd}{u-d} .$$

Ad esempio, se si vuol replicare una put europea bisogna finanziarsi vendendo allo scoperto l'attività sottostante ($x \leq y \;\; \Rightarrow \;\; \delta \leq 0$) e, ovviamente, visto che il valore dell'opzione non può essere < 0, bisogna investire nel money market account ($\beta \geq 0$); se invece si vuole replicare una call, bisogna investire nell'attività sottostante ($x \geq y \;\; \Rightarrow$ $\delta \geq 0$). Infine, come già sapevamo, se si vuol replicare un contratto forward in posizione long bisogna acquistare esattamente un'unità di attività sottostante ($\delta = 1$) e vendere allo scoperto money market account ($\beta = -K\mathrm{e}^{-r}$).

$\Rightarrow$ L'assenza di opportunità di arbitraggio implica che <u>il prezzo</u> in 0 <u>del derivato</u>, che indichiamo con $X(0)$, <u>deve coincidere con quello del portafoglio replicante</u>:

$$X(0) = \delta \cdot S + \beta \cdot 1 = \frac{x-y}{S(u-d)} S + \mathrm{e}^{-r} \frac{yu - xd}{u-d}.$$

<u>Osservazione</u>:

L'obiettivo che ci eravamo posti, e cioè determinare in maniera precisa il prezzo dei derivati, in particolare delle opzioni europee, è stato raggiunto. Per arrivare a questo obiettivo siamo passati attraverso un risultato intermedio non meno importante di quello finale, e cioè la costruzione della strategia replicante il derivato. Si pensi, ad esempio, ad una società finanziaria (banca o assicurazione) che emette dei prodotti d'investimento con garanzia di minimo che, come visto, è rappresentata da un'opzione put. Se la società vuole coprirsi dal rischio di dover integrare il valore dei fondi d'investimento nel caso questi risultino inferiori al minimo garantito e non trova le put sul mercato, potrebbe cercare di replicarle tramite un portafoglio in cui c'è dentro l'attività sottostante e l'attività non rischiosa $\Rightarrow$ ovviamente, però, rimane esposta al <u>rischio di modello</u>.

Riprendiamo ora il prezzo del derivato:

$$X(0) = \frac{x-y}{S(u-d)} S + \mathrm{e}^{-r} \frac{yu - xd}{u-d} = (x\mathrm{e}^{-r}) \frac{\mathrm{e}^{r} - d}{u-d} + (y\mathrm{e}^{-r}) \frac{u - \mathrm{e}^{r}}{u-d}.$$

Osserviamo che i due numeri $\frac{\mathrm{e}^{r} - d}{u-d}$ e $\frac{u - \mathrm{e}^{r}}{u-d}$ dipendono soltanto dai parametri di mercato r, u, d mentre sono indipendenti da x e y, quindi sono gli stessi per tutti i derivati. Inoltre l'assenza di opportunità di arbitraggio implica che sono entrambi strettamente compresi tra 0 e 1 (ricordiamo infatti che $d < \mathrm{e}^{r} < u$) e, infine, la loro somma è pari a 1.

$\Rightarrow$ Questi numeri possono essere interpretati come <u>probabilità</u>, rispettivamente dello "stato up" e dello "stato down".

$\Rightarrow$ Si tratta di <u>probabilità equivalenti</u> a quelle degli operatori, perché entrambe strettamente positive.

Posto $q = \frac{\mathrm{e}^{r} - d}{u-d}$ (e quindi $\frac{u - \mathrm{e}^{r}}{u-d} = 1-q$), otteniamo la seguente rappresentazione:

$$X(0) = (x\mathrm{e}^{-r})\, q + (y\mathrm{e}^{-r})(1-q) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[X(1)\mathrm{e}^{-r} \right],$$

dove $\mathbb{Q}$ è una misura di probabilità, equivalente a quella degli operatori, che assegna probabilità q allo "stato up" e $1-q$ allo "stato down".

⇒ Il prezzo in 0 di tutti i derivati si ottiene come speranza matematica, sotto $\mathbb{Q}$, del loro payoff finale attualizzato col tasso privo di rischio r.

⇒ Ciò vale anche per le attività di base in quanto

$$S = (Su\mathrm{e}^{-r})\,q + (Sd\mathrm{e}^{-r})(1-q) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[S(1)\mathrm{e}^{-r}\right],$$

$$B(0) = (\mathrm{e}^{r}\mathrm{e}^{-r})\,q + (\mathrm{e}^{r}\mathrm{e}^{-r})(1-q) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[B(1)\mathrm{e}^{-r}\right] = 1.$$

⇒ $\mathbb{Q}$ viene detta probabilità neutrale al rischio perché chi compra/vende il derivato scambia l'importo aleatorio $X(1)$ contro un importo certo (cioè il suo prezzo) pari alla speranza matematica, sotto $\mathbb{Q}$, di $X(1)$ (ovviamente il fattore di attualizzazione e^{-r} interviene perché i due importi sono pagati in epoche diverse). Se $\mathbb{Q}$ fosse dunque la probabilità del nostro operatore, questo sarebbe neutrale (o indifferente) al rischio. Comunque noi non facciamo ipotesi sulle preferenze degli operatori; al limite potrebbe non esserci alcun operatore sul mercato neutrale al rischio, quindi con probabilità $\mathbb{Q}$. In particolare, se l'operatore non è neutrale al rischio, il prezzo $X(0)$ del derivato è diverso dalla speranza matematica di $X(1)$ (attualizzato) calcolata con la probabilità assegnata dall'operatore.

$\Rightarrow$ Nel modello binomiale non solo l'<u>assenza di opportunità di arbitraggio</u> implica l'<u>esistenza di una siffatta misura neutrale al rischio</u>, come abbiamo visto, ma vale anche il viceversa, ovvero c'è <u>equivalenza</u> tra assenza di opportunità di arbitraggio ed esistenza di probabilità neutrali al rischio.

Per vedere questo si consideri una qualunque strategia che prevede un costo iniziale certo, $Z(0)$, all'epoca 0, ed un payoff finale aleatorio, $Z(1)$, all'epoca 1, con possibili determinazioni z (se si verifica lo "stato up") e w (se si verifica lo "stato down"). Supponiamo che esista (almeno) una misura neutrale al rischio $\mathbb{Q}$ tale che $Z(0) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z(1)\mathrm{e}^{-r}\right] = (z\mathrm{e}^{-r})\,q + (w\mathrm{e}^{-r})(1-q)$. Questa strategia non può essere un'opportunità di arbitraggio, né del I, né del II tipo.

- Infatti, se fosse un'opportunità di arbitraggio del II tipo, $Z(0) < 0$ e $\mathbb{Q}(Z(1) \geq 0) = 1$, quindi $z \geq 0$ e $w \geq 0$. Ma allora anche $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z(1)\mathrm{e}^{-r}\right] = (z\mathrm{e}^{-r})\,q + (w\mathrm{e}^{-r})(1-q) \geq 0$, e quindi sarebbe $\neq Z(0)$ (<0).

- Se fosse invece un'opportunità di arbitraggio del I tipo, $Z(0) = 0$, $\mathbb{Q}(Z(1) \geq 0) = 1$ e $\mathbb{Q}(Z(1) > 0) > 0$, quindi $z \geq 0$ e $w \geq 0$, con uno almeno dei due strettamente positivo. Ma allora anche $\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[Z(1)\mathrm{e}^{-r}\right] = (z\mathrm{e}^{-r})\,q + (w\mathrm{e}^{-r})(1-q) > 0$, e quindi sarebbe $\neq Z(0)$ $(=0)$.

⇒ C'è comunque sempre un collegamento tra assenza di opportunità di arbitraggio ed esistenza di (almeno) una probabilità neutrale al rischio anche in modelli più generali, dove di solito vale l'implicazione che abbiamo appena visto.

⇒ L'unicità della probabilità neutrale al rischio scende dalla completezza del mercato.

⇒ In mercati incompleti, privi di opportunità di arbitraggio, ci sono infinite misure neutrali al rischio. Se un mercato è incompleto, non tutti i derivati sono replicabili:

- se un derivato è replicabile (ad es. un contratto forward), la speranza matematica del suo payoff finale attualizzato è la stessa sotto qualunque probabilità neutrale al rischio, e quindi il prezzo del derivato è univocamente determinato (= valore della/e strategia/e replicante/i);

- se il derivato non è replicabile, la speranza matematica del suo payoff finale attualizzato varia al variare della probabilità neutrale al rischio utilizzata per il calcolo, per cui rimane individuato un intervallo di valori in cui deve stare il prezzo del derivato, con estremo inferiore (rispettivamente superiore) l'estremo inferiore (superiore), delle speranze matematiche del payoff finale al variare della misura di probabilità utilizzata.

Esempio di mercato incompleto:

Modello trinomiale monoperiodale

Supponiamo che

- il mercato sia aperto in due sole date, 0 e 1;
- su di esso siano trattate due attività di base: un'attività rischiosa e un'attività non rischiosa, data dal money market account, che cresce con intensità pari a r (>0).
- Supponiamo che il prezzo iniziale dell'attività rischiosa sia $S(0)=S>0$, e che il suo prezzo in 1, $S(1)$, possa assumere soltanto tre possibili valori, Su, Sm e Sd, dove u, m e d sono tre numeri reali tali che $u>m>d\geq 0$.

$\Rightarrow$ E' importante che tutti gli operatori del mercato concordino sulla descrizione dell'incertezza riguardante $S(1)$, attribuendo probabilità strettamente positiva (e di somma 1) ai tre eventi $\{S(1)=Su\}$ ("stato up"), $\{S(1)=Sm\}$ ("stato middle") e $\{S(1)=Sd\}$ ("stato down"), mentre sono del tutto irrilevanti tali probabilità, che potrebbero anche differire da operatore ad operatore.

$\Rightarrow$ L'ipotesi di assenza di opportunità di arbitraggio implica $d < \mathrm{e}^r < u$, mentre non ha alcuna importanza dove è collocato m rispetto a e^r.

Dimostrazione (come nel modello binomiale):

Supponiamo per assurdo che la relazione sia violata, ovvero che $d \geq \mathrm{e}^r$ oppure $u \leq \mathrm{e}^r$.

- Se $d \geq \mathrm{e}^r$, in 0:
  - vendiamo allo scoperto S unità di money market account,
  - compriamo il bene sottostante,

  con un saldo $= 0$, e in 1:
  - rivendiamo il bene,
  - rimborsiamo il money market account,

  con un saldo pari a
  $$S(1) - S\mathrm{e}^r = \begin{cases} Su - S\mathrm{e}^r = S(u - \mathrm{e}^r) > 0 & \text{nello stato up} \\ Sm - S\mathrm{e}^r = S(m - \mathrm{e}^r) > 0 & \text{nello stato middle} \\ Sd - S\mathrm{e}^r = S(d - \mathrm{e}^r) \geq 0 & \text{nello stato down} \end{cases}$$

  $\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del I tipo.

- Se invece $u \leq e^r$, in 0:
  - vendiamo allo scoperto il bene sottostante,
  - compriamo S unità di money market account,

  con un saldo $= 0$, e in 1:
  - rivendiamo il money market account,
  - compriamo il bene, che restituiamo,

  con un saldo pari a $$Se^r - S(1) = \begin{cases} Se^r - Su = S(e^r - u) \geq 0 & \text{nello stato up} \\ Se^r - Sm = S(e^r - m) > 0 & \text{nello stato middle} \\ Se^r - Sd = S(e^r - d) > 0 & \text{nello stato down} \end{cases}$$

  $\Rightarrow$ questa sarebbe un'opportunità di arbitraggio del I tipo.

Introduciamo ora dei <u>derivati</u> con scadenza 1 e attività sottostante l'attività rischiosa.

$\Rightarrow$ Il loro <u>payoff finale</u> $X(1)$ (in generale aleatorio) sarà funzione del prezzo finale dell'attività sottostante, $X(1) = f\big(S(1)\big)$, e quindi potrà assumere (al più) <u>tre determinazioni</u> a seconda che si verifichi lo stato "up", "middle" o "down".

Indichiamo con $x = f(Su)$, $y = f(Sm)$ e $z = f(Sd)$ tali determinazioni, e rappresentiamo questo payoff, così come quello delle attività di base, tramite un vettore di $\mathbb{R}^3$.

Ci chiediamo ora se esso è replicabile tramite un portafoglio di attività di base, ovvero se

$$\exists \delta, \beta \in \mathbb{R} : \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sm \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \mathrm{e}^r \\ \mathrm{e}^r \\ \mathrm{e}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

La risposta ovviamente non è univoca in quanto dipende dal derivato, ad es. se si tratta di un contratto forward o, più in generale, se f è una funzione lineare, allora la risposta è sì.

Se invece ci chiediamo se il mercato è completo, ovvero se

$$\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \ \exists \delta, \beta \in \mathbb{R} : \delta \begin{pmatrix} Su \\ Sm \\ Sd \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} \mathrm{e}^r \\ \mathrm{e}^r \\ \mathrm{e}^r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

la risposta è no perché due vettori di $\mathbb{R}^3$, anche se linearmente indipendenti, non bastano per generare tutto lo spazio.

Vediamo se in questo mercato, incompleto, esistono misure neutrali al rischio e, se sì, quante sono.

A questo proposito definiamo misura di probabilità neutrale al rischio una terna $\mathbb{Q}=(q_1,q_2,q_3)$ di numeri reali, che rappresentano le probabilità dei tre stati del mondo, tale che:

$$\begin{cases} q_1 > 0 \\ q_2 > 0 \\ q_3 > 0 \\ q_1 + q_2 + q_3 = 1 \\ \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[S(1)\mathrm{e}^{-r} \right] = Su\mathrm{e}^{-r} q_1 + Sm\mathrm{e}^{-r} q_2 + Sd\mathrm{e}^{-r} q_3 = S \end{cases}.$$

Esplicitiamo q_3 nella penultima equazione, $q_3 = 1 - q_1 - q_2$, e sostituiamolo nella terza disequazione e nell'ultima equazione in modo da ridurci a due sole variabili.

Dopo qualche elementare passaggio otteniamo dunque:

$$\begin{cases} q_1 > 0 \\ q_2 > 0 \\ q_1 + q_2 < 1 \\ q_1(u-d) + q_2(m-d) = \mathrm{e}^r - d \end{cases} .$$

Osserviamo che l'ultima equazione è quella di una retta nelle variabili q_1 e q_2.

⇒ Le coppie q_1 e q_2 soluzioni del sistema sono dunque tutti i punti di questa retta che stanno nel I quadrante (esclusi gli assi) e (strettamente) sotto la retta di equazione $q_1 + q_2 = 1$.

Al fine di individuare se il sistema ammette soluzioni, rappresentiamo tutto nel piano con q_1 sull'asse delle ascisse e q_2 su quello delle ordinate. Le intercette della retta rappresentata dall'ultima equazione sull'asse delle ascisse e, rispettivamente, su quello delle ordinate, sono $\overline{q}_1 = \dfrac{\mathrm{e}^r - d}{u-d}$ e $\overline{q}_2 = \dfrac{\mathrm{e}^r - d}{m-d}$.

⇒ L'assenza di opportunità di arbitraggio implica $0 < \overline{q}_1 < 1$ e $\overline{q}_2 > 0$.

Distinguiamo allora tre situazioni:

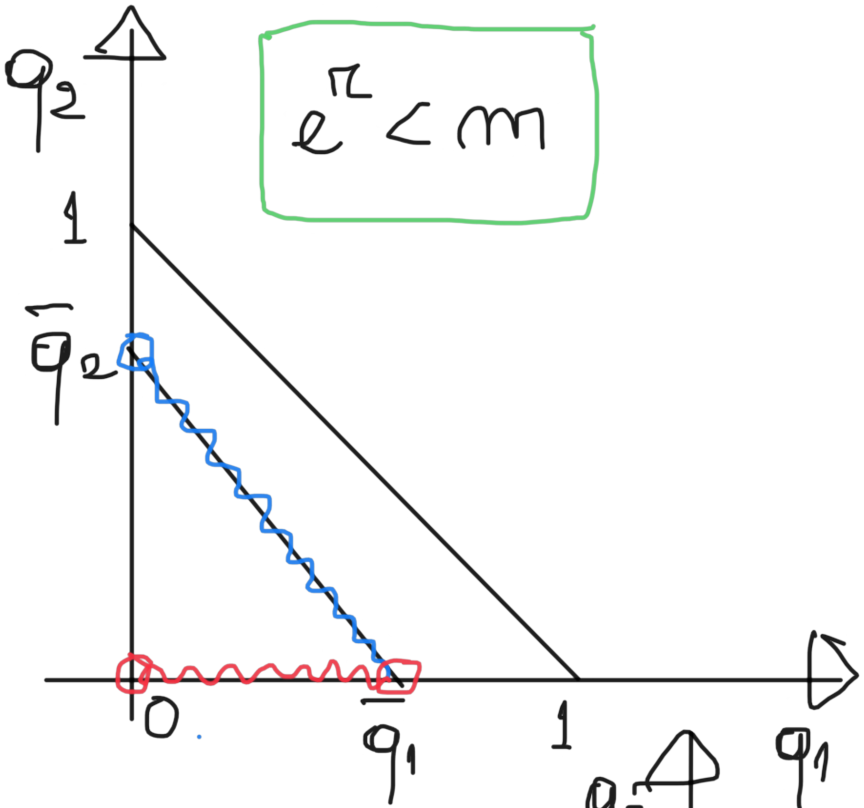
(a) $\mathrm{e}^r < m \;\Rightarrow\; \bar{q}_2 < 1$,

(b) $\mathrm{e}^r = m \;\Rightarrow\; \bar{q}_2 = 1$,

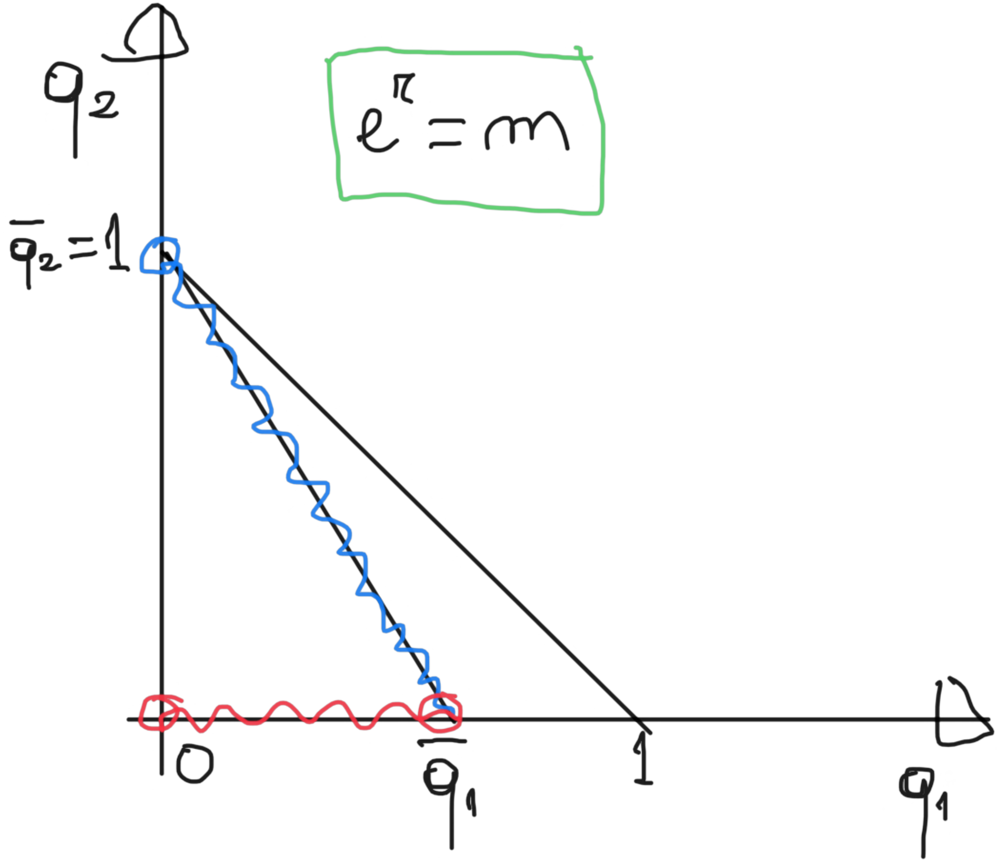
(c) $\mathrm{e}^r > m \;\Rightarrow\; \bar{q}_2 > 1$.

Nel caso (c) le rette di equazione $q_1 + q_2 = 1$ e $q_1(u-d) + q_2(m-d) = \mathrm{e}^r - d$ si intersecano nel punto di ascissa $\bar{\bar{q}}_1 = \dfrac{\mathrm{e}^r - m}{u-m}$ e ordinata $\bar{\bar{q}}_2 = \dfrac{u - \mathrm{e}^r}{u-m}$. L'assenza di opportunità di arbitraggio $\Rightarrow\; \bar{\bar{q}}_2 > 0 \;\Rightarrow\; 0 < \bar{\bar{q}}_1 < \bar{q}_1$.

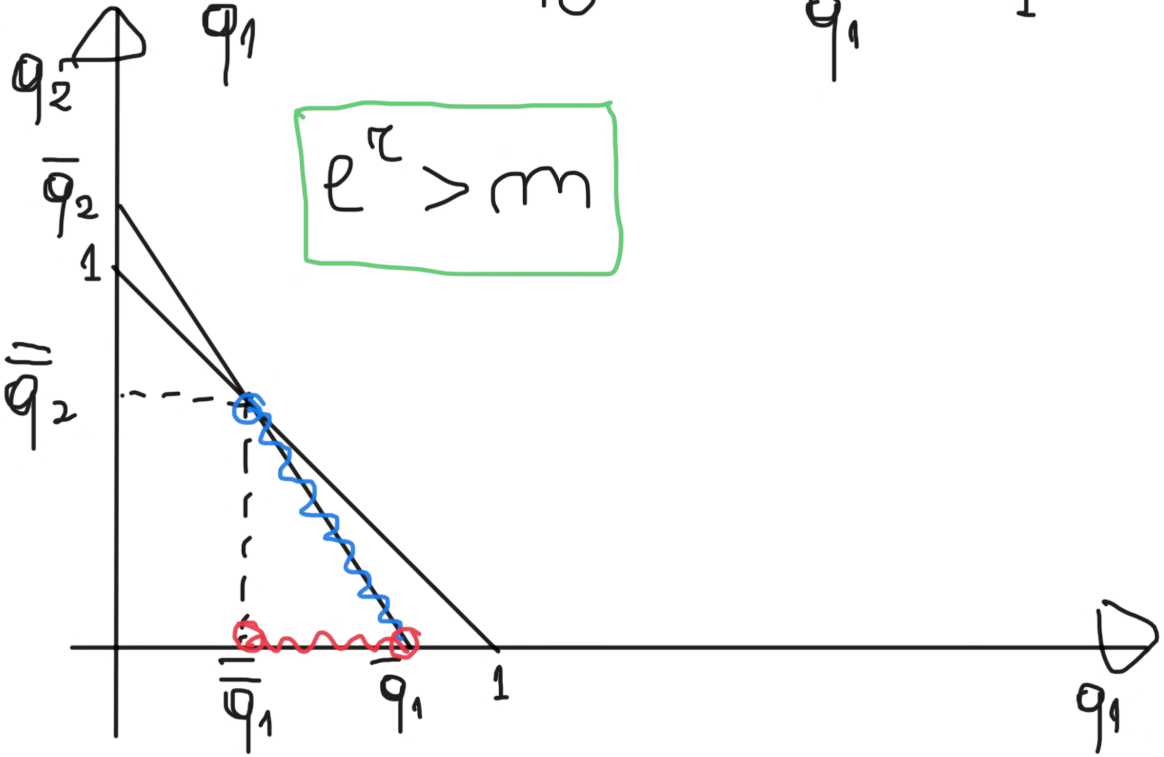
Rappresentiamo graficamente queste tre situazioni nelle figure seguenti, evidenziando anche i punti soluzione del sistema precedente (in blu) e le loro proiezioni sull'asse delle ascisse (in rosso).



q_2
$e^{\tau} < m$
1
$\bar{q}_2$
0
$\bar{q}_1$
1
q_1



q_2
$e^{\tau} = m$
$\bar{q}_2 = 1$
0
$\bar{q}_1$
1
q_1



q_2
$e^{\tau} > m$
$\bar{q}_2$
1
$\bar{\bar{q}}_2$
$\bar{\bar{q}}_1$
$\bar{q}_1$
1
q_1

$\Rightarrow$ Queste soluzioni sono infinite, così come le corrispondenti misure neutrali al rischio.

Vediamo allora di rappresentarle in maniera esplicita. A tale scopo, per prima cosa dall'equazione della retta $q_1(u-d)+q_2(m-d)=\mathrm{e}^r-d$ esplicitiamo q_2:

$$q_2=-\frac{u-d}{m-d}q_1+\frac{\mathrm{e}^r-d}{m-d}\doteq g(q_1).$$

Dalla $q_3=1-q_1-q_2$, sostituendo q_2, si ottiene:

$$q_3=\frac{u-m}{m-d}q_1+\frac{m-\mathrm{e}^r}{m-d}\doteq h(q_1).$$

Posto poi $a=\begin{cases}0 & \text{se } m\ge \mathrm{e}^r\\ \overline{\overline{q}}_1 & \text{se } m<\mathrm{e}^r\end{cases} = \max\left\{\frac{\mathrm{e}^r-m}{u-m},\ 0\right\}$ e $b=\overline{q}_1=\frac{\mathrm{e}^r-d}{u-d}$, e indicato con Q l'insieme delle (infinite) misure neutrali al rischio, si ha infine:

$$Q=\left\{\left(q_1,g(q_1),h(q_1)\right):a<q_1<b\right\}.$$

$\Rightarrow$ Se un <u>derivato</u> è <u>replicabile</u>, ad es. con payoff lineare del tipo $X(1)=cS(1)+d$ (nel caso di un long forward si ha in particolare $c=1$ e $d=-K$), allora

$$\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[X(1)\mathrm{e}^{-r}\right]=\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\left(cS(1)+d\right)\mathrm{e}^{-r}\right]=c\mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[S(1)\mathrm{e}^{-r}\right]+d\mathrm{e}^{-r}=cS+d\mathrm{e}^{-r}\quad\forall\mathbb{Q}\in Q.$$

Vediamo che cosa succede, ad esempio, nel caso di una call europea. Fissata $\mathbb{Q} \in Q$, cioè fissato $q_1 \in (a,b)$, si ha:

$$
\begin{aligned}
c(0) &= \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\max\{S(1)-K,0\}\mathrm{e}^{-r}\right] \\
&= \max\{Su-K,0\}\mathrm{e}^{-r}q_1 + \max\{Sm-K,0\}\mathrm{e}^{-r}g(q_1) + \max\{Sd-K,0\}\mathrm{e}^{-r}h(q_1) \\
&= Aq_1 + B,
\end{aligned}
$$

dove $A = \mathrm{e}^{-r}\left[\max\{Su-K,0\} - \max\{Sm-K,0\}\dfrac{u-d}{m-d} + \max\{Sd-K,0\}\dfrac{u-m}{m-d}\right]$,

$$B = \mathrm{e}^{-r}\left[\max\{Sm-K,0\}\frac{\mathrm{e}^r-d}{m-d} + \max\{Sd-K,0\}\frac{m-\mathrm{e}^r}{m-d}\right].$$

$\Rightarrow$ Se $A \neq 0$ la call non è replicabile; visto che q_1 può essere un qualunque elemento dell'intervallo (a,b), c'è un intervallo di (infiniti) valori in cui cade il suo prezzo: $Aa + B < c(0) < Ab + B$ se $A > 0$, rispettivamente $Ab + B < c(0) < Aa + B$ se $A < 0$.

$\Rightarrow$ Se $A = 0$ la call è replicabile e il suo prezzo è univocamente determinato: $c(0) = B$. Si noti che questo accade solo quando $K \geq Su$ ($\Rightarrow$ $B = 0$, la call non viene mai esercitata), oppure $K \leq Sd$ ($\Rightarrow$ $B = S - K\mathrm{e}^{-r}$, la call viene sempre esercitata, è come un forward).

Esempio 1: $r = 0.05$ ($\Rightarrow$ $\mathrm{e}^r = 1.051271$), $u = 1.2$, $m = 1.05$, $d = 0.9$ ($\Rightarrow$ $m < \mathrm{e}^r$)

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 0.008474 < q_1 < 0.504237 \\ 0.991526 > q_2 > 0 \\ 0 < q_3 < 0.495763 \end{cases}$$

$K = 100,\ S = 100 \ \Rightarrow\ 4.877058 < c(0) < 9.592901 \qquad (4.877058 \le c(0) \le 100)$

$K = 110,\ S = 100 \ \Rightarrow\ 0.080607 < c(0) < 4.796451 \qquad (0 \le c(0) \le 100)$

Esempio 2: $r = 0.05$ ($\Rightarrow$ $\mathrm{e}^r = 1.051271$), $u = 1.2$, $m = 1.19$, $d = 1.05$ ($\Rightarrow$ $m > \mathrm{e}^r$)

$$\Rightarrow \quad \begin{cases} 0 < q_1 < 0.008474 \\ 0.009079 > q_2 > 0 \\ 0.990921 < q_3 < 0.991526 \end{cases}$$

$K = 100,\ S = 100 \ \Rightarrow\ c(0) = S - K\mathrm{e}^{-r} = 4.877058 \qquad (4.877058 \le c(0) \le 100)$

$K = 110,\ S = 100 \ \Rightarrow\ 0.077728 < c(0) < 0.080607 \qquad (0 \le c(0) \le 100)$

Neutralizzazione del rischio

Torniamo ora al modello binomiale. Per raggiungere l'obiettivo di determinare il prezzo di un derivato ci siamo posti il problema della replicabilità. Di solito, però, il problema viene posto in altro modo. Vediamo come, anche perché questo tipo di ragionamento è proprio quello che è stato fatto, per la prima volta, in un altro modello che vedremo, e cioè quello di Black e Scholes.

Supponiamo di partire da un derivato rischioso, cioè di payoff $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ con $x \neq y$. Ci chiediamo allora se è possibile affiancare al derivato un certo quantitativo α di attività sottostante, acquistata o venduta allo scoperto (quindi $\alpha \in \mathbb{R}$), in modo tale da eliminare il rischio. In caso affermativo, il portafoglio costituito dal derivato e dalla quantità α di sottostante si chiama portafoglio neutralizzato rispetto al rischio.

Osservazione:

Ovviamente questo problema è stato posto per un derivato rischioso perché altrimenti non avrebbe senso. Tuttavia, in generale, potremmo porlo anche per un derivato con payoff certo (ad es. un'opzione call quando $K \geq Su$) o, addirittura, per il money market account. In questi casi, però, la risposta sarebbe scontata, ovvero $\alpha = 0$.

Vediamo allora di formalizzare il problema. Un portafoglio è neutralizzato rispetto al rischio se il suo payoff è lo stesso in entrambi gli stati del mondo, quindi quello che ci chiediamo è se

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}:\ x + \alpha S u = y + \alpha S d\,.$$

Poiché $u \neq d$ (e $S > 0$) la risposta è sì: basta prendere

$$\alpha = \frac{y - x}{S(u - d)}$$

(ad es. nel caso di una call bisogna vendere allo scoperto attività sottostante, nel caso di una put bisogna invece comprarne).

Appurato dunque che esiste α qualunque sia il derivato,

⇒ l'assenza di opportunità di arbitraggio implica che il rendimento del portafoglio neutralizzato rispetto al rischio, di payoff finale

$$\varphi := x + \alpha S u (= y + \alpha S d),$$

è lo stesso dell'attività priva di rischio, cioè il tasso risk-free r.

Indicato con $\varphi(0)$ il valore in 0 di tale portafoglio, e con $X(0)$ quello del derivato, si ha:

$$\varphi(0) = X(0) + \alpha S = \varphi \mathrm{e}^{-r}\,.$$

⇒ Sostituendo α e φ, ed esplicitando $X(0)$, si ottiene infine il prezzo del derivato, che ovviamente è lo stesso di quello che avevamo ottenuto per altra strada.

<u>Osservazione finale</u>:

In realtà il problema della neutralizzazione del rischio è speculare rispetto a quello della replicabilità del derivato. Anche qui, alla fin fine, ci poniamo un problema di replicabilità, solo che, anziché replicare il derivato tramite un portafoglio costituito dalle due attività di base, vogliamo replicare un'attività priva di rischio (cioè con lo stesso payoff in entrambi gli stati del mondo) tramite un portafoglio costituito dal derivato e dall'attività rischiosa.

In altri termini, dato $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ci chiediamo se $\exists \alpha, \varphi \in \mathbb{R}$ soluzioni del sistema lineare

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}.$$

Spostando vettori da un membro all'altro possiamo anche riscrivere il sistema come

$$(-\alpha)\begin{pmatrix} Su \\ Sd \end{pmatrix} + (\varphi \mathrm{e}^{-r})\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{r} \\ \mathrm{e}^{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

da cui ci accorgiamo che è lo stesso sistema che avevamo già risolto, in cui però

$$\begin{cases} \delta = -\alpha \\ \beta = \varphi \mathrm{e}^{-r} \end{cases} \quad \text{o, equivalentemente,} \quad \begin{cases} \alpha = -\delta \\ \varphi = \beta \mathrm{e}^{r} \end{cases}.$$

Modello multiperiodale

Vediamo ora di estendere il modello binomiale monoperiodale al caso multiperiodale. A tale scopo supponiamo che

- il mercato sia aperto in tempo discreto, in corrispondenza a date equintervallate. Se prendiamo come unità di misura del tempo la (comune) distanza che intercorre tra due date consecutive di apertura del mercato, possiamo indicarle con $0,1,2,\ldots$;
- sul mercato siano trattate le seguenti attività di base: un'attività rischiosa (che non stacca dividendi) e attività non rischiose.

Riguardo alle attività non rischiose, queste sono date dai titoli a cedola nulla. Tuttavia, siccome dovremmo averne uno per ogni scadenza, per comodità consideriamo un'unica attività non rischiosa, data dal money market account, che in qualche modo "riassume" tutti i bond tramite la strategia di roll-over su di essi. A questo proposito ricordiamo che tale strategia prevede di investire un importo unitario all'epoca 0 nel titolo a cedola nulla di scadenza 1, per poi reinvestire in 1 il ricavato nel titolo a cedola nulla di scadenza 2, e così via. Quindi il valore in 0 del money market account è dato da $B(0)=1$, mentre alla generica epoca $t \in \mathbb{N}^+$ esso è dato da $B(t)=\mathrm{e}^{r(0,1)+r(1,2)+\ldots+r(t-1,t)}$. Si noti che esso dipende dai tassi futuri aleatori $r(1,2)$, $r(2,3)$, ..., $r(t-1,t)$.

- In realtà supponiamo che tutti i tassi a pronti futuri siano deterministici e costanti nel tempo, ovvero che $r(t,T) \equiv r \;\; \forall t,T : t<T \;\; \Rightarrow \;\; B(t)=\mathrm{e}^{rt}$, $t=0,1,2,\ldots$.

Riguardo all’attività rischiosa, di cui indichiamo con $S(t)$ il prezzo a pronti all’epoca t, supponiamo che:

- $S(0) = S > 0$;
- subordinatamente all’informazione disponibile al tempo t $(\in \mathbb{N})$, il prezzo in $t+1$, $S(t+1)$, possa assumere soltanto due possibili determinazioni, pari a $S(t)u$ e $S(t)d$, con $u > \mathrm{e}^r > d > 0$.

Anche qui è importante che tutti gli agenti concordino sulla descrizione dell’incertezza futura, attribuendo probabilità (condizionata) strettamente positiva e di somma 1 ad entrambi gli eventi $\{(S(t+1) = S(t)u) | S(t)\}$ e $\{(S(t+1) = S(t)d) | S(t)\}$, mentre al solito non ha alcuna importanza il valore di queste probabilità, che potrebbero anche differire da operatore ad operatore.

<u>Osservazione</u>:

L'evoluzione futura del processo $\left\{S(v):\ v \geq t\right\}$ dipende soltanto da $S(t)$, ovvero dal valore corrente, o "stato", del processo in t, mentre non ha alcuna rilevanza la storia passata, che pure è nota in t, cioè i valori precedenti $S(0), S(1), \ldots, S(t-1)$.

$\Rightarrow$ Il processo non ha memoria, di tutta l'informazione disponibile conta soltanto l'ultima.

$\Rightarrow$ In generale, un processo stocastico con questa caratteristica si chiama <u>processo di Markov</u>, o <u>processo markoviano</u>.

$\Rightarrow$ La variabile (processo) $S(t)$ viene anche chiamata <u>variabile di stato</u>.

L'evoluzione stocastica del prezzo dell'attività rischiosa può essere rappresentata tramite un <u>albero binomiale ricombinante</u>.

$\Rightarrow$ Tra il tempo 0 e il tempo T $(\in \mathbb{N}^+)$ il prezzo $S(t)$ può percorrere 2^T <u>possibili traiettorie</u>. Tuttavia il prezzo finale $S(T)$ può assumere soltanto $T+1$ <u>determinazioni diverse</u>, date da $S_T^{(i)} = Su^{T-i}d^i$, $i = 0,1,\ldots,T$, dove i rappresenta il numero di "downs", cioè il numero di volte in cui, su un totale di T passi, il prezzo ha fatto un movimento verso il basso (e $T-i$ è dunque il numero di "ups").

$\Rightarrow$ L'albero è ricombinante perché le $\binom{T}{i}$, $i = 0,1,\ldots,T$, traiettorie che conducono allo stesso prezzo finale sono state raggruppate.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & & & & & & & \nearrow & \\
 & & & & & & & Su^3 & & \\
 & & & & & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & & Su^2 & & & & \\
 & & & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & Su & & & & Su^2 d & & \\
 & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & S & & & & Sud & & & & \ldots\ldots \\
 & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & Sd & & & & Sud^2 & & \\
 & & & & \searrow & & \nearrow & & \searrow & \\
 & & & & & Sd^2 & & & & \\
 & & & & & & \searrow & & \nearrow & \\
 & & & & & & & Sd^3 & & \\
 & & & & & & & & \searrow & \\
t = & 0 & & 1 & & 2 & & 3 & & \ldots\ldots
\end{array}
$$

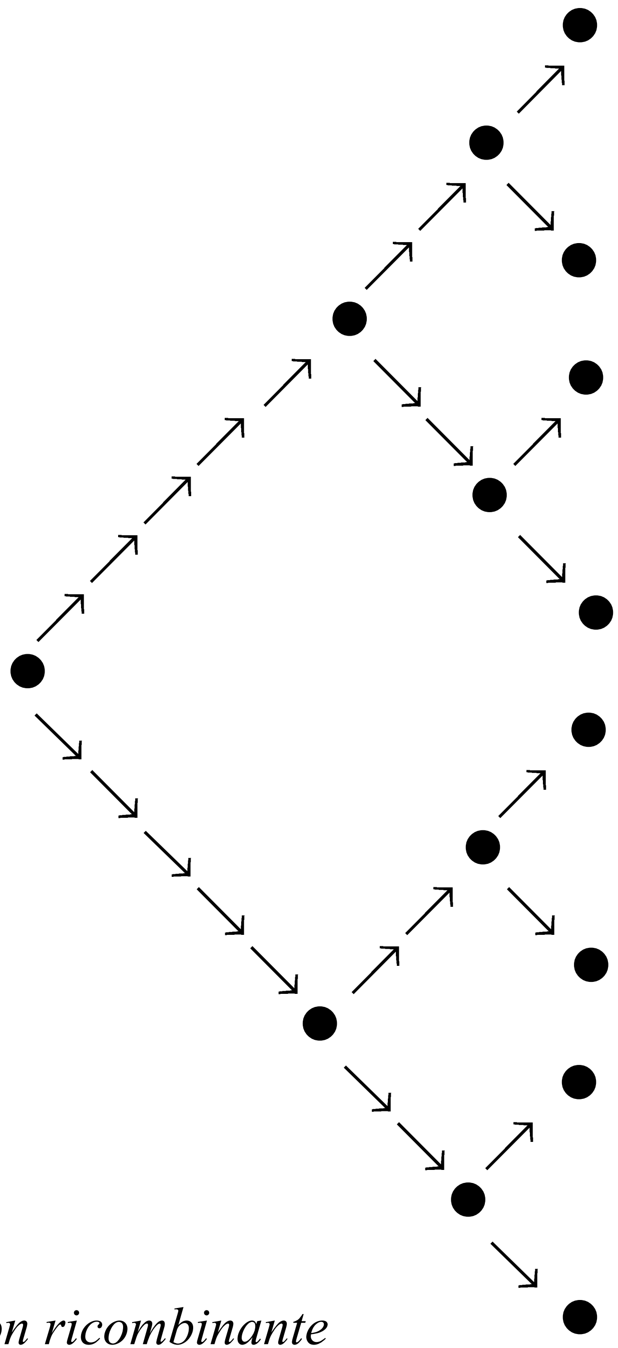
Evoluzione stocastica del prezzo dell'attività rischiosa $S(t)$

Si noti che questa caratteristica di ricombinabilità deriva dal fatto che i fattori moltiplicativi u e d sono costanti; se essi dipendessero invece dal tempo o, più in generale, anche dalla traiettoria seguita dal processo (nel qual caso lo stesso non sarebbe più markoviano), ovvero se da t a $t+1$ le possibili transizioni del prezzo fossero le seguenti:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & S(t)u(t) \\
 & \nearrow & \\
S(t) & & \\
 & \searrow & \\
 & & S(t)d(t)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
 & & S(t)u\big(t,S(t),S(t-1),\ldots,S(0)\big) \\
 & \nearrow & \\
S(t) & & \\
 & \searrow & \\
 & & S(t)d\big(t,S(t),S(t-1),\ldots,S(0)\big)
\end{array}
\quad ,
$$

allora dovremmo rappresentare il modello tramite un albero binomiale non ricombinante.

In generale, in un modello discreto, sia come parametro del processo che come variabili aleatorie che lo compongono, il numero di ramificazioni che si dipartono da ciascun nodo dell'albero è variabile col nodo stesso.



Albero binomiale non ricombinante

Evoluzione dell'incertezza

Vediamo adesso l'effetto dell'incremento di informazione, al passare del tempo. A tale scopo, per comodità, indichiamo con $\omega_t^{(i)} = \left\{ S(t) = S_t^{(i)} \right\}$, $t = 0,1,...;\ i = 0,1,...,t$.

Per fissare le idee, concentriamoci sulla variabile aleatoria $S(3)$ e rappresentiamo sull'albero binomiale tutti gli eventi d'interesse che concernono questa variabile:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & \omega_3^{(0)} \\
 & & \omega_2^{(0)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \omega_1^{(0)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \omega_3^{(1)} \\
\omega_0^{(0)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \omega_2^{(1)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & \omega_1^{(1)} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \omega_3^{(2)} \\
 & & \omega_2^{(2)} \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & \omega_3^{(3)}
\end{tikzcd}
$$

- All’epoca 0, quando l’<u>informazione</u> è <u>nulla</u> (conosciamo soltanto $S(0)$, che è certo), tutti e quattro gli eventi su cui è definita $S(3)$, ovvero $\omega_3^{(0)}$, $\omega_3^{(1)}$, $\omega_3^{(2)}$, $\omega_3^{(3)}$ (che costituiscono una partizione dell’evento certo), hanno probabilità strettamente positiva di verificarsi $\Rightarrow$ tutti e quattro i nodi finali dell’albero sono raggiungibili a partire da $\omega_0^{(0)}$. Indicata con $\mathbb{P}$ la probabilità di un generico operatore (eventualmente soggettiva), si ha infatti:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\omega_3^{(0)}) &= \mathbb{P}(\omega_1^{(0)})\mathbb{P}(\omega_2^{(0)} \mid \omega_1^{(0)})\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_2^{(0)}) > 0, \\
\mathbb{P}(\omega_3^{(1)}) &= \mathbb{P}(\omega_1^{(0)})\mathbb{P}(\omega_2^{(0)} \mid \omega_1^{(0)})\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(0)}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\omega_1^{(0)})\mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(0)})\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(1)}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\omega_1^{(1)})\mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(1)})\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(1)}) > 0, \\
\mathbb{P}(\omega_3^{(2)}) &= \mathbb{P}(\omega_1^{(0)})\mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(0)})\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(1)}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\omega_1^{(1)})\mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(1)})\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(1)}) \\
&\quad + \mathbb{P}(\omega_1^{(1)})\mathbb{P}(\omega_2^{(2)} \mid \omega_1^{(1)})\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(2)}) > 0, \\
\mathbb{P}(\omega_3^{(3)}) &= \mathbb{P}(\omega_1^{(1)})\mathbb{P}(\omega_2^{(2)} \mid \omega_1^{(1)})\mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_2^{(2)}) > 0,
\end{aligned}$$

  dove le probabilità condizionate $\mathbb{P}(\omega_{t+1}^{(i)} \mid \omega_t^{(i)})$ e $\mathbb{P}(\omega_{t+1}^{(i+1)} \mid \omega_t^{(i)})$ sono strettamente positive per ipotesi qualunque siano $t = 0,1,\ldots$ e $i = 0,1,\ldots,t$; in particolare $\mathbb{P}(\omega_1^{(i)} \mid \omega_0^{(0)}) = \mathbb{P}(\omega_1^{(i)})$ per $i = 0,1$.

- All'epoca 1 <u>conosciamo lo stato in cui ci troviamo</u>, che può essere $\omega_1^{(0)}$ o $\omega_1^{(1)}$.
  - Se ci troviamo nello stato $\omega_1^{(0)}$ il nodo dell'albero corrispondente allo stato $\omega_3^{(3)}$ non è più raggiungibile. Infatti:

$$\mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_1^{(0)}) = \mathbb{P}(\omega_2^{(0)} \mid \omega_1^{(0)}) \underbrace{\mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_2^{(0)})}_{=0} + \mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(0)}) \underbrace{\mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_2^{(1)})}_{=0} + \underbrace{\mathbb{P}(\omega_2^{(2)} \mid \omega_1^{(0)})}_{=0} \mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_2^{(2)}) = 0,$$

mentre risultano raggiungibili gli altri tre nodi:

$$\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_1^{(0)}) = \mathbb{P}(\omega_2^{(0)} \mid \omega_1^{(0)}) \mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_2^{(0)}) > 0,$$
$$\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_1^{(0)}) = \mathbb{P}(\omega_2^{(0)} \mid \omega_1^{(0)}) \mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(0)}) + \mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(0)}) \mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(1)}) > 0,$$
$$\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_1^{(0)}) = \mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(0)}) \mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(1)}) > 0.$$

  - Analogamente, se ci troviamo nello stato $\omega_1^{(1)}$ non è più raggiungibile il nodo $\omega_3^{(0)}$: $\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_1^{(1)}) = 0$, mentre:

$$\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_1^{(1)}) = \mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(1)}) \mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(1)}) > 0,$$
$$\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_1^{(1)}) = \mathbb{P}(\omega_2^{(1)} \mid \omega_1^{(1)}) \mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(1)}) + \mathbb{P}(\omega_2^{(2)} \mid \omega_1^{(1)}) \mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(2)}) > 0,$$
$$\mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_1^{(1)}) = \mathbb{P}(\omega_2^{(2)} \mid \omega_1^{(1)}) \mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_2^{(2)}) > 0.$$

- Passa ancora il tempo, e arriviamo all'epoca 2, con un <u>ulteriore incremento d'informazione</u>.
  - Se ci troviamo nello stato $\omega_2^{(0)}$ non sono raggiungibili i nodi $\omega_3^{(2)}$ e $\omega_3^{(3)}$:

    $\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(0)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_2^{(0)}) = 0$, mentre:

    $\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_2^{(0)}) > 0$ e $\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(0)}) > 0$.
  - Se ci troviamo nello stato $\omega_2^{(1)}$ non sono raggiungibili i nodi $\omega_3^{(0)}$ e $\omega_3^{(3)}$:

    $\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_2^{(1)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_2^{(1)}) = 0$, mentre:

    $\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(1)}) > 0$ e $\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(1)}) > 0$.
  - Se ci troviamo nello stato $\omega_2^{(2)}$ non sono raggiungibili i nodi $\omega_3^{(0)}$ e $\omega_3^{(1)}$:

    $\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_2^{(2)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_2^{(2)}) = 0$, mentre:

    $\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_2^{(2)}) > 0$ e $\mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_2^{(2)}) > 0$.

All'epoca 3 <u>abbiamo risolto completamente l'incertezza</u> riguardo $S(3)$, per cui:

- se ci troviamo nello stato $\omega_3^{(0)}$, $\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_3^{(0)}) = 1$, mentre $\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_3^{(0)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_3^{(0)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_3^{(0)}) = 0$;
- se ci troviamo nello stato $\omega_3^{(1)}$, $\mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_3^{(1)}) = 1$, mentre $\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_3^{(1)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_3^{(1)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_3^{(1)}) = 0$;
- se ci troviamo nello stato $\omega_3^{(2)}$, $\mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_3^{(2)}) = 1$, mentre $\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_3^{(2)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_3^{(2)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_3^{(2)}) = 0$;
- se ci troviamo nello stato $\omega_3^{(3)}$, $\mathbb{P}(\omega_3^{(3)} \mid \omega_3^{(3)}) = 1$, mentre $\mathbb{P}(\omega_3^{(0)} \mid \omega_3^{(3)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(1)} \mid \omega_3^{(3)}) = \mathbb{P}(\omega_3^{(2)} \mid \omega_3^{(3)}) = 0$.

$\Rightarrow$ L'<u>evoluzione dell'incertezza</u> al passare del tempo può essere rappresentata tramite la sequenza $\mathcal{P}_0 = \left\{\left\{\omega_3^{(0)}, \omega_3^{(1)}, \omega_3^{(2)}, \omega_3^{(3)}\right\}\right\}$, $\mathcal{P}_1 = \left\{\left\{\omega_3^{(0)}, \omega_3^{(1)}, \omega_3^{(2)}\right\}, \left\{\omega_3^{(1)}, \omega_3^{(2)}, \omega_3^{(3)}\right\}\right\}$, $\mathcal{P}_2 = \left\{\left\{\omega_3^{(0)}, \omega_3^{(1)}\right\}, \left\{\omega_3^{(1)}, \omega_3^{(2)}\right\}, \left\{\omega_3^{(2)}, \omega_3^{(3)}\right\}\right\}$, $\mathcal{P}_3 = \left\{\left\{\omega_3^{(0)}\right\}, \left\{\omega_3^{(1)}\right\}, \left\{\omega_3^{(2)}\right\}, \left\{\omega_3^{(3)}\right\}\right\}$. Tale sequenza prende anche il nome di <u>**struttura informativa**</u>.

Classificazione dei derivati

Introduciamo ora dei derivati sull'attività rischiosa di "stile europeo", in cui cioè le date di esigibilità dei payoff sono certe e non dipendono da decisioni di una delle parti coinvolte nel contratto come succede, ad es., nel caso delle opzioni americane. I payoff possono invece dipendere da siffatte decisioni, ma le ipotesi sugli agenti devono essere tali da consentirci di stabilire in maniera precisa la funzione che collega ciascun payoff con i valori delle variabili sottostanti come succede, ad es., nel caso delle opzioni europee.

Possiamo allora classificare tali derivati in quattro categorie, a seconda che prevedano:

1) un unico payoff finale, in T, non *path-dependent*, cioè funzione solo di $S(T)$;

2) un unico payoff finale, in T, *path-dependent*, cioè funzione di $S(1)$, $S(2)$, …, $S(T)$ (si noti che non occorre considerare la dipendenza da $S(0) = S$, tanto è un numero certo);

3) una sequenza di payoff in $t = 1, 2, ..., T$, ciascuno dei quali non *path-dependent*, cioè funzione solo di $S(t)$;

4) una sequenza di payoff in $t = 1, 2, ..., T$, ciascuno dei quali *path-dependent*, cioè funzione di $S(1)$, …, $S(t)$.

Unico payoff a scadenza non path-dependent

Consideriamo un derivato che prevede un unico payoff finale aleatorio $X(T) = f\left(S(T)\right)$ esigibile in T, con possibili determinazioni $x_T^{(i)} = f(S_T^{(i)}) = f(Su^{T-i}d^i)$, $i = 0,1,...,T$. Potremmo allora chiederci se tale payoff è replicabile, ovvero se

$$\exists \delta, \beta \in \mathbb{R} : \delta \begin{pmatrix} Su^T \\ Su^{T-1}d \\ ... \\ Sd^T \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^{rT} \\ e^{rT} \\ ... \\ e^{rT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_T^{(0)} \\ x_T^{(1)} \\ ... \\ x_T^{(T)} \end{pmatrix}.$$

Anche qui la risposta è “dipende dal derivato”. Se però ci chiediamo se

$$\forall \begin{pmatrix} x_T^{(0)} \\ x_T^{(1)} \\ ... \\ x_T^{(T)} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{T+1} \ \exists \delta, \beta \in \mathbb{R} : \delta \begin{pmatrix} Su^T \\ Su^{T-1}d \\ ... \\ Sd^T \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} e^{rT} \\ e^{rT} \\ ... \\ e^{rT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_T^{(0)} \\ x_T^{(1)} \\ ... \\ x_T^{(T)} \end{pmatrix}$$

la risposta è “SI” se $T = 1$ e “NO” se $T > 1$ perché 2 $(< T+1)$ vettori di $\mathbb{R}^{T+1}$, anche se linearmente indipendenti, non possono generare tutto lo spazio.

Comunque il problema è mal posto, perché non stiamo sfruttando tutte le potenzialità del mercato; infatti esso non è aperto soltanto negli istanti 0 e T, ma anche in tutti gli (eventuali) istanti intermedi $t = 1, 2, ..., T-1$, dove si possono modificare le quantità di attività di base. Dobbiamo quindi rivedere il concetto di strategia, che era statica, ovvero una coppia di numeri reali (δ, β), nel modello monoperiodale, mentre ora diventa dinamica.

Definizione:

Una **strategia dinamica** (che inizia in 0 e termina in $T \in \mathbb{N}^+$) è una coppia di processi stocastici $\left(\delta(t), \beta(t)\right)$, $t = 0,1,...,T-1$, dove $\delta(t)$ (rispettivamente $\beta(t)$) rappresenta la quantità di attività rischiosa (rispettivamente non rischiosa) presente in portafoglio, che viene decisa in t, in base allo *stato del mondo* in cui ci si trova, e mantenuta fissa fino all'epoca $t+1$.

Osservazione:

Si tratta di processi stocastici, in quanto le decisioni sulle quantità dei titoli di base da acquistare/vendere ovviamente dipendono dai loro prezzi, in particolare da quello dell'attività rischiosa, che è osservato in t. Indichiamo con $\delta_t^{(i)}$ e, rispettivamente, $\beta_t^{(i)}$, $t = 0,1,...;\ i = 0,1,...,t$, le possibili determinazioni di $\delta(t)$ e $\beta(t)$ nello stato $\omega_t^{(i)}$, che anche possono essere rappresentate su un albero binomiale ricombinante.

$\Rightarrow$ In 0 si fissano le quantità $\left(\delta(0),\beta(0)\right)$, che vengono tenute ferme fino alla prossima data di aperture dei mercati, cioè 1, dove queste quantità vengono ricalibrate, passando a $\left(\delta(1),\beta(1)\right)$ (coppia aleatoria); …; in $T-1$ c'è l'ultima ricalibratura e si passa a $\left(\delta(T-1),\beta(T-1)\right)$; in T si smobilizza tutto.

Visto che il derivato ha un unico payoff finale, se vogliamo replicarlo la strategia non deve generare cash-flow intermedi, ovvero le <u>ricalibrature</u> devono essere <u>a costo zero</u>.

<u>Definizione</u>:

Una **<u>strategia dinamica</u>** (che inizia in 0 e termina in $T\in\mathbb{N}^+$) si dice **<u>autofinanziantesi</u>** se negli (eventuali) istanti intermedi la <u>ricalibratura</u> del portafoglio è <u>a costo nullo</u>, cioè

$$\left[\delta(t)-\delta(t-1)\right]S(t)+\left[\beta(t)-\beta(t-1)\right]\mathrm{e}^{rt}=0 \quad \text{q.c.,} \quad t=1,2,\dots,T-1.$$

$\Rightarrow$ Se si incrementa la quantità di uno dei due beni, ci si finanzia tramite la vendita (eventualmente allo scoperto) dell'altro.

<u>Osservazione</u>:

Visto che sul mercato non ci sono né tasse né costi di transazione, la proprietà precedente potrebbe anche essere definita in altro modo:

$$\underbrace{\delta(t-1)S(t)+\beta(t-1)\mathrm{e}^{rt}}_{\text{valore di realizzo del "vecchio" portafoglio}} \quad = \quad \underbrace{\delta(t)S(t)+\beta(t)\mathrm{e}^{rt}}_{\text{prezzo di acquisto del "nuovo" portafoglio}} \qquad \text{q.c.,} \quad t=1,2,\dots,T-1.$$

Nel seguito dimostreremo che ogni payoff finale non path-dependent è replicabile tramite una (unica) strategia dinamica autofinanziantesi, e quindi che il mercato costituito dalle due attività di base è completo. Per far questo costruiremo direttamente la strategia replicante, con un procedimento a ritroso.

Osservazione:

In realtà per la completezza bisogna poter replicare anche derivati path-dependent, e/o con payoff intermedi, ma questo è vero e la relativa strategia replicante può essere costruita adattando il procedimento che vedremo.

Costruzione della strategia replicante

Abbiamo indicato con $X(T)$ l'unico payoff finale aleatorio del derivato, con possibili determinazioni $x_T^{(i)} = f(Su^{T-i}d^i)$, $i = 0,1,...,T$.

Sappiamo che l'assenza di opportunità di arbitraggio implica che il valore finale, in T, del derivato, coincide col payoff, per cui, come abbiamo fatto anche in precedenza (sia nel modello monoperiodale che nel caso delle opzioni e dei contratti forward), manteniamo lo stesso simbolo per indicare il valore del derivato anche prima di T.

Quindi $\{X(t): t = 0,1,...,T\}$ rappresenta il processo stocastico del prezzo del derivato, la cui evoluzione temporale può anche essere rappresentata tramite un albero binomiale ricombinante. Infatti la v.a. $X(t)$, per t fissato, può assumere $t+1$ possibili determinazioni, a seconda dello stato in cui ci si trova, che indicheremo con $x_t^{(i)}$, $i = 0,1,...,t$.

L'obiettivo è ora quello di costruire la strategia replicante il derivato, nodo per nodo, e, contestualmente, anche il valore dello stesso. Infatti, indicato con $\delta_t^{(i)}$ e $\beta_t^{(i)}$ le quantità di attività rischiosa sottostante e money market account che ci serve avere, al tempo t $(t = 0,1,\ldots,T-1)$, nello stato $\omega_t^{(i)}$ $(i = 0,1,\ldots,t)$, per replicare il payoff finale del derivato, anche se queste quantità verranno modificate negli (eventuali) istanti intermedi successivi, cioè in $v = t+1,\ldots,T-1$, sappiamo che le modifiche sono a costo zero in quanto la strategia è autofinanziantesi, per cui l'assenza di opportunità di arbitraggio implica che il valore corrente del derivato coincide con quello della strategia, ovvero:

$$x_t^{(i)} = \delta_t^{(i)} S_t^{(i)} + \beta_t^{(i)} \mathrm{e}^{rt}, \quad t = 0,1,\ldots,T-1 \text{ e } i = 0,1,\ldots,t.$$

Costruiremo questa strategia a ritroso.

- Supponiamo dapprima di trovarci al tempo $T-1$, nello stato $\omega_{T-1}^{(i)}$ (in cui il prezzo dell'attività rischiosa sottostante è $S_{T-1}^{(i)} = Su^{T-1-i}d^{i}$), $i = 0,1,\ldots,T-1$.

  Come già discusso in precedenza, sappiamo che gli unici due nodi in T raggiungibili a partire da $\omega_{T-1}^{(i)}$ sono

  - $\omega_T^{(i)}$ (il prezzo dell'attività rischiosa sottostante da $T-1$ a T fa un movimento verso l'alto, per cui il numero di "downs" rimane invariato), e
  - $\omega_T^{(i+1)}$ (il prezzo da $T-1$ a T fa un movimento verso il basso, per cui il numero di "downs" aumenta di 1).

  Il corrispondente payoff finale del derivato che dobbiamo cercare di replicare sarà quindi $x_T^{(i)}$ o, rispettivamente, $x_T^{(i+1)}$.

  Dobbiamo allora cercare delle quantità (numeri reali) $\delta_{T-1}^{(i)}$ e $\beta_{T-1}^{(i)}$ soluzioni del seguente sistema lineare:

$$\delta_{T-1}^{(i)} \begin{pmatrix} S_{T-1}^{(i)}u \\ S_{T-1}^{(i)}d \end{pmatrix} + \beta_{T-1}^{(i)} \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{rT} \\ \mathrm{e}^{rT} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_T^{(i)} \\ x_T^{(i+1)} \end{pmatrix}.$$

Tale sistema è quasi identico a quello che abbiamo già risolto nel modello monoperiodale, con le seguenti sostituzioni di variabili:

$$S_{T-1}^{(i)} \to S,\ \ \delta_{T-1}^{(i)} \to \delta,\ \ \beta_{T-1}^{(i)} \to \beta,\ \ \mathrm{e}^{rT} \to \mathrm{e}^{r},\ \ x_T^{(i)} \to x,\ \ x_T^{(i+1)} \to y.$$

Poiché $u \neq d$, sappiamo già che <u>esiste sempre una e una sola soluzione</u>, qualunque siano $x_T^{(i)}$ e $x_T^{(i+1)}$, data da

$$\delta_{T-1}^{(i)} = \frac{x_T^{(i)} - x_T^{(i+1)}}{S_{T-1}^{(i)}(u-d)} \qquad \text{e} \qquad \beta_{T-1}^{(i)} = \mathrm{e}^{-rT}\,\frac{x_T^{(i+1)}u - x_T^{(i)}d}{u-d}\ ,\ \ i = 0,1,\ldots,T-1.$$

$\Rightarrow$ Il valore del derivato al tempo $T-1$ nello stato $\omega_{T-1}^{(i)}$, pari a quello del portafoglio replicante, è

$$x_{T-1}^{(i)} = \delta_{T-1}^{(i)} S_{T-1}^{(i)} + \beta_{T-1}^{(i)} \mathrm{e}^{r(T-1)},\ \ i = 0,1,\ldots,T-1.$$

Sostituendo $\delta_{T-1}^{(i)}$ e $\beta_{T-1}^{(i)}$, dopo alcuni passaggi algebrici, si perviene infine alla seguente rappresentazione:

$$x_{T-1}^{(i)} = \left(x_T^{(i)}\mathrm{e}^{-r}\right)q + \left(x_T^{(i+1)}\mathrm{e}^{-r}\right)(1-q),\ \ i = 0,1,\ldots,T-1,$$

dove $q = \dfrac{\mathrm{e}^{r} - d}{u-d}$ è la medesima che abbiamo incontrato nel modello binomiale monoperiodale, che può quindi essere interpretata come probabilità neutrale al rischio di fare un movimento verso l'alto da $T-1$ a T, subordinata allo stato in cui ci si trova in $T-1$ (anche se non varia al variare di i).

- Supponiamo ora di trovarci al tempo $t < T-1$ nello stato $\omega_t^{(i)}$, $i = 0,1,\ldots,t$, in cui il sottostante vale $S_t^{(i)} = Su^{t-i}d^i$, e di avere già determinato quello che serve per replicare il payoff del derivato, nonché il suo valore, all'epoca successiva $t+1$ (in ogni nodo dell'albero).

$\Rightarrow$ Gli unici due nodi in $t+1$ raggiungibili a partire da $\omega_t^{(i)}$ sono

- $\omega_{t+1}^{(i)}$, con valore del sottostante $S_{t+1}^{(i)} = S_t^{(i)}u$ e del derivato $x_{t+1}^{(i)} = \delta_{t+1}^{(i)}S_{t+1}^{(i)} + \beta_{t+1}^{(i)}\mathrm{e}^{r(t+1)}$,
- $\omega_{t+1}^{(i+1)}$, con valore del sottostante pari a $S_{t+1}^{(i+1)} = S_t^{(i)}d$ e del derivato pari a $x_{t+1}^{(i+1)} = \delta_{t+1}^{(i+1)}S_{t+1}^{(i+1)} + \beta_{t+1}^{(i+1)}\mathrm{e}^{r(t+1)}$.

Dobbiamo quindi determinare le quantità $\delta_t^{(i)}$ e $\beta_t^{(i)}$ che ci servono, in t e nello stato $\omega_t^{(i)}$, per replicare il payoff finale del derivato.

Poiché $t+1$ è un istante intermedio di ricalibratura del portafoglio, dev'essere

$$\delta(t)S(t+1)+\beta(t)\mathrm{e}^{r(t+1)}=\delta(t+1)S(t+1)+\beta(t+1)\mathrm{e}^{r(t+1)} \text{ q.c.},$$

cioè in ogni nodo e, in particolare, nei due nodi successivi a $\omega_t^{(i)}$. Quindi:

$$\begin{cases} \delta_t^{(i)}S_{t+1}^{(i)}+\beta_t^{(i)}\mathrm{e}^{r(t+1)}=\delta_{t+1}^{(i)}S_{t+1}^{(i)}+\beta_{t+1}^{(i)}\mathrm{e}^{r(t+1)} \\ \delta_t^{(i)}S_{t+1}^{(i+1)}+\beta_t^{(i)}\mathrm{e}^{r(t+1)}=\delta_{t+1}^{(i+1)}S_{t+1}^{(i+1)}+\beta_{t+1}^{(i+1)}\mathrm{e}^{r(t+1)} \end{cases}.$$

Sostituendo $S_{t+1}^{(i)}$ e $S_{t+1}^{(i+1)}$, nonché i valori del "nuovo portafoglio" a secondo membro delle due equazioni, si ottiene:

$$\begin{cases} \delta_t^{(i)}S_t^{(i)}u+\beta_t^{(i)}\mathrm{e}^{r(t+1)}=x_{t+1}^{(i)} \\ \delta_t^{(i)}S_t^{(i)}d+\beta_t^{(i)}\mathrm{e}^{r(t+1)}=x_{t+1}^{(i+1)} \end{cases}$$

ovvero, scritto in forma vettoriale:

$$\delta_t^{(i)}\begin{pmatrix} S_t^{(i)}u \\ S_t^{(i)}d \end{pmatrix}+\beta_t^{(i)}\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{r(t+1)} \\ \mathrm{e}^{r(t+1)} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x_{t+1}^{(i)} \\ x_{t+1}^{(i+1)} \end{pmatrix}.$$

Dobbiamo allora cercare delle quantità $\delta_t^{(i)}$ e $\beta_t^{(i)}$ che definiscono il "vecchio portafoglio" e ci consentono di replicare, in $t+1$, il valore del nuovo.

Anche questo sistema è come quello che abbiamo risolto nel modello monoperiodale, con le seguenti sostituzioni di variabili:

$$S_t^{(i)} \to S\,,\;\; \delta_t^{(i)} \to \delta\,,\;\; \beta_t^{(i)} \to \beta\,,\;\; \mathrm{e}^{r(t+1)} \to \mathrm{e}^r\,,\;\; x_{t+1}^{(i)} \to x\,,\;\; x_{t+1}^{(i+1)} \to y\,.$$

Esso ammette un'unica soluzione, qualunque siano $x_{t+1}^{(i)}$ e $x_{t+1}^{(i+1)}$, data da

$$\delta_t^{(i)} = \frac{x_{t+1}^{(i)} - x_{t+1}^{(i+1)}}{S_t^{(i)}(u-d)} \qquad \text{e} \qquad \beta_t^{(i)} = \mathrm{e}^{-r(t+1)}\,\frac{x_{t+1}^{(i+1)}u - x_{t+1}^{(i)}d}{u-d}\,.$$

⇒ Il valore del derivato al tempo t nello stato $\omega_t^{(i)}$, pari a quello del portafoglio replicante, è

$$x_t^{(i)} = \delta_t^{(i)} S_t^{(i)} + \beta_t^{(i)}\mathrm{e}^{rt}\,,\;\; t = 0,1,\ldots,T-2 \;\;\text{e}\;\; i = 0,1,\ldots,t\,.$$

Sostituendo $\delta_t^{(i)}$ e $\beta_t^{(i)}$ si perviene infine alla seguente rappresentazione:

$$x_t^{(i)} = \left(x_{t+1}^{(i)}\mathrm{e}^{-r}\right)q + \left(x_{t+1}^{(i+1)}\mathrm{e}^{-r}\right)(1-q)\,,$$

dove $q = \dfrac{\mathrm{e}^r - d}{u-d}$ rappresenta la probabilità neutrale al rischio, subordinata allo stato in cui ci si trova in t, di fare un movimento verso l'alto da t a $t+1$. Tale probabilità risulta costante al variare di t e di i.

Vediamo ora qual è il collegamento tra il prezzo del derivato in due istanti di tempo diversi, anche se non consecutivi. Precisamente, si ha:

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{\tau-t} x_\tau^{(i+j)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \binom{\tau-t}{j} q^{\tau-t-j}(1-q)^j, \quad \tau = 1,2,\ldots,T; \quad t = 0,1,\ldots,\tau-1 \text{ e } i = 0,1,\ldots,t.$$

<u>Dimostrazione</u>:

Fissiamo arbitrariamente un $\tau \in \{1,2,\ldots,T\}$. Dobbiamo allora far vedere che la proprietà vale per ogni $t < \tau$ (e per ogni $i \in \{0,1,\ldots,t\}$). Faremo la dimostrazione per induzione.

- Osserviamo innanzitutto che la proprietà vale per $t = \tau - 1$ (cioè $\tau = t+1$, l'abbiamo appena dimostrato). Infatti:

$$\begin{aligned} x_{\tau-1}^{(i)} &= \left(x_\tau^{(i)} \mathrm{e}^{-r}\right) q + \left(x_\tau^{(i+1)} \mathrm{e}^{-r}\right)(1-q) \\ &= x_\tau^{(i+0)} \mathrm{e}^{-r(\tau-(\tau-1))} \binom{\tau-(\tau-1)}{0} q^{\tau-(\tau-1)-0}(1-q)^0 \\ &+ x_\tau^{(i+1)} \mathrm{e}^{-r(\tau-(\tau-1))} \binom{\tau-(\tau-1)}{1} q^{\tau-(\tau-1)-1}(1-q)^1, \quad i = 0,1,\ldots,\tau-1. \end{aligned}$$

- Fissiamo arbitrariamente un $t < \tau - 1$ (ovviamente se $\tau > 1$, altrimenti non c'è più niente da dimostrare) e un $i \in \{0,1,...,t\}$, e supponiamo che la proprietà valga in $t+1$, in ogni nodo $\omega_{t+1}^{(v)}$, $v = 0,1,...,t+1$, e, in particolare, nei due nodi successivi a $\omega_t^{(i)}$, cioè

$$x_{t+1}^{(v)} = \sum_{j=0}^{\tau-t-1} x_\tau^{(v+j)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t-1)} \binom{\tau - t - 1}{j} q^{\tau-t-1-j} (1-q)^j \ , \ \ v = 0,1,...,t+1.$$

Quando abbiamo costruito la strategia abbiamo dimostrato che

$$x_t^{(i)} = \left(x_{t+1}^{(i)} \mathrm{e}^{-r} \right) q + \left(x_{t+1}^{(i+1)} \mathrm{e}^{-r} \right) (1-q)$$

e quindi, sostituendo $x_{t+1}^{(i)}$ e $x_{t+1}^{(i+1)}$, si ottiene:

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{\tau-t-1} x_\tau^{(i+j)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t-1)} \binom{\tau - t - 1}{j} q^{\tau-t-1-j} (1-q)^j \, \mathrm{e}^{-r} q$$

$$+ \sum_{h=0}^{\tau-t-1} x_\tau^{(i+1+h)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t-1)} \binom{\tau - t - 1}{h} q^{\tau-t-1-h} (1-q)^h \, \mathrm{e}^{-r} (1-q).$$

Isoliamo ora il primo termine della prima sommatoria e l'ultimo della seconda, ottenendo, dopo aver accorpato alcuni fattori:

$$x_t^{(i)} = x_\tau^{(i)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} q^{\tau-t} + \sum_{j=1}^{\tau-t-1} x_\tau^{(i+j)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \binom{\tau-t-1}{j} q^{\tau-t-j} (1-q)^j$$

$$+ \sum_{h=0}^{\tau-t-2} x_\tau^{(i+1+h)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \binom{\tau-t-1}{h} q^{\tau-t-1-h} (1-q)^{h+1} + x_\tau^{(i+\tau-t)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} (1-q)^{\tau-t}.$$

Cambiamo l'indice nella seconda sommatoria, ponendo $j = h+1$ (ovvero $h = j-1$):

$$x_t^{(i)} = x_\tau^{(i)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} q^{\tau-t} + \sum_{j=1}^{\tau-t-1} x_\tau^{(i+j)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \binom{\tau-t-1}{j} q^{\tau-t-j} (1-q)^j$$

$$+ \sum_{j=1}^{\tau-t-1} x_\tau^{(i+j)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \binom{\tau-t-1}{j-1} q^{\tau-t-j} (1-q)^j + x_\tau^{(i+\tau-t)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} (1-q)^{\tau-t}.$$

Raccogliamo i termini comuni alle due sommatorie:

$$x_t^{(i)} = x_\tau^{(i)} e^{-r(\tau-t)} q^{\tau-t} + \sum_{j=1}^{\tau-t-1} x_\tau^{(i+j)} e^{-r(\tau-t)} \left[\binom{\tau-t-1}{j} + \binom{\tau-t-1}{j-1} \right] q^{\tau-t-j} (1-q)^j$$

$$+ x_\tau^{(i+\tau-t)} e^{-r(\tau-t)} (1-q)^{\tau-t}.$$

Sfruttando infine le seguenti proprietà dei coefficienti binomiali (le prime due già usate):

$$\binom{\tau-t}{0} = \binom{\tau-t}{\tau-t} = 1, \quad \binom{\tau-t-1}{j} + \binom{\tau-t-1}{j-1} = \binom{\tau-t}{j}$$

e riaccorpando i termini della sommatoria, si ottiene infine la tesi:

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{\tau-t} x_\tau^{(i+j)} e^{-r(\tau-t)} \binom{\tau-t}{j} q^{\tau-t-j} (1-q)^j \ .$$

Probabilità neutrali al rischio e misure martingala equivalenti

Abbiamo appena dimostrato che vale la relazione

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{\tau-t} x_\tau^{(i+j)} \mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \binom{\tau-t}{j} q^{\tau-t-j}(1-q)^j, \quad t=0,1,\dots,T-1 \quad \text{e} \quad i=0,1,\dots,t\,; \quad \tau=t+1,\dots,T\,.$$

In particolare, se prendiamo $t=0$ e $\tau=T$ otteniamo il valore in 0 del derivato:

$$X(0) = x_0^{(0)} = \sum_{j=0}^{T} x_T^{(j)} \mathrm{e}^{-rT} \binom{T}{j} q^{T-j}(1-q)^j \ .$$

Essendo $x_T^{(j)}$, $j=0,1,\dots,T$, le possibili determinazioni del payoff finale aleatorio $X(T)$, notiamo che questo valore può essere rappresentato come una <u>speranza matematica</u> del <u>payoff finale</u>, <u>attualizzato</u> col tasso privo di rischio r, in base a una <u>distribuzione</u> di probabilità di tipo <u>binomiale</u> (sul numero di downs) di parametri T e $1-q$. Si tratta quindi di una <u>probabilità neutrale al rischio</u>. Se indichiamo con $\mathbb{Q}$ tale misura, abbiamo quindi:

$$X(0) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[X(T)\mathrm{e}^{-rT} \right], \quad \text{dove} \quad \mathbb{Q}(\omega_T^{(j)}) = \binom{T}{j} q^{T-j}(1-q)^j, \ j=0,1,\dots,T\,.$$

D'altra parte possiamo ottenere le possibili determinazioni della variabile aleatoria $X(t)$, $t=0,1,\ldots,T-1$, cioè del prezzo in t del derivato, tramite la stessa relazione, sempre prendendo $\tau = T$:

$$x_t^{(i)} = \sum_{j=0}^{T-t} x_T^{(i+j)} \mathrm{e}^{-r(T-t)} \binom{T-t}{j} q^{T-t-j}(1-q)^j, \quad i=0,1,\ldots,t.$$

Quindi anche $X(t)$ può essere rappresentato come una speranza matematica del payoff finale attualizzato, condizionata all'informazione disponibile al tempo t, cioè allo stato in cui ci si trova, calcolata in base a una probabilità neutrale al rischio, $\mathbb{Q}$, sempre di tipo binomiale sui nodi ancora raggiungibili a partire da quello corrente:

$$X(t) = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[X(T)\mathrm{e}^{-r(T-t)} \right], \quad t=0,1,\ldots,T-1,$$

dove $\mathbb{Q}(\omega_T^{(i+j)} \mid \omega_t^{(i)}) = \binom{T-t}{j} q^{T-t-j}(1-q)^j$, $i=0,1,\ldots,t$, e con $\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}$ si è indicato l'operatore di speranza matematica, sotto $\mathbb{Q}$, condizionata all'informazione disponibile al tempo t. In particolare, siccome stiamo considerando un derivato con payoff che dipende solo da $S(T)$, e il processo del prezzo del sottostante è markoviano, di tutta l'informazione disponibile l'unica rilevante è data dal prezzo corrente $S(t)$, per cui:

$$X(t) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[X(T)\mathrm{e}^{-r(T-t)} \middle| S(t) \right], \quad t=0,1,\ldots,T-1.$$

Più in generale, la (<u>unica</u>) probabilità neutrale al rischio $\mathbb{Q}$ che abbiamo individuato può essere definita non soltanto con riferimento ai nodi finali dell'albero, ma anche a tutti quelli intermedi, come segue:

$$\mathbb{Q}(\omega_\tau^{(v)} \mid \omega_t^{(i)}) = \begin{cases} 0 & \text{se } v < i \text{ o } v > i+\tau-t \\ \binom{\tau-t}{v-i} q^{\tau-t-v+i}(1-q)^{v-i} & \text{se } i \le v \le i+\tau-t \end{cases},$$

$$t = 0,1,\ldots,T-1; \quad \tau = t+1, t+2,\ldots,T; \quad i = 0,1,\ldots,t; \quad v = 0,1,\ldots,\tau.$$

Si noti che la misura $\mathbb{Q}$ è <u>equivalente</u> a quella degli operatori, in quanto assegna probabilità subordinata >0 a tutti i nodi raggiungibili a partire da quello in cui ci si trova, e $=0$ agli altri.

In base a questa definizione, e sfruttando la relazione vista all'inizio con t e τ generici (purché $t<\tau$) possiamo collegare i valori del derivato in istanti diversi tramite una speranza matematica condizionata, sotto $\mathbb{Q}$:

$$X(t) = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[X(\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}\right], \quad t = 0,1,\ldots,T-1 \text{ e } \tau = t+1, t+2,\ldots,T.$$

Moltiplicando entrambi i membri per e^{-rt} (in particolare, trattandosi di una costante, può essere portata dentro la speranza matematica) si ottiene:

$$X(t)\mathrm{e}^{-rt} = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[X(\tau)\mathrm{e}^{-r\tau} \right] \quad \forall t, \tau : 0 \le t < \tau \le T \text{ (interi).}$$

$\Rightarrow$ Il prezzo corrente del derivato, scontato (fino a 0) è pari alla speranza matematica condizionata, sotto $\mathbb{Q}$, del prezzo futuro scontato.

Ricordando che $B(t) = \mathrm{e}^{rt}$, la relazione precedente si può anche esprimere come

$$\frac{X(t)}{B(t)} = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X(\tau)}{B(\tau)} \right] \quad \forall t, \tau : 0 \le t < \tau \le T\ .$$

$\Rightarrow$ Il prezzo corrente "normalizzato" del derivato, cioè espresso in unità del money market account, è pari alla speranza matematica condizionata, sotto $\mathbb{Q}$, del prezzo futuro normalizzato.

Definizione:

Un processo stocastico $\{Y(t): t \in A \subset \mathbb{R}\}$, adattato alla struttura informativa (il cui valore, cioè, è noto una volta noto lo stato del mondo in cui ci si trova), con speranza matematica finita, si chiama **martingala** se

$$Y(t) = \mathrm{E}_t\left[Y(\tau)\right] \quad \forall t, \tau \in A : t < \tau .$$

Interpretazione:

Un processo a martingala traduce l'idea del gioco equo: infatti, se ad esempio $Y(t)$ rappresenta il prezzo in t di qualche attività finanziaria con valore finale, aleatorio, $Y(\tau)$, la speranza matematica del guadagno che si consegue (senza tener conto del differimento temporale) acquistando il titolo in t e rivendendolo in τ è data da $\mathrm{E}_t\left[Y(\tau)\right] - Y(t) = 0$.

$\Rightarrow$ Sotto $\mathbb{Q}$, il processo dei prezzi scontati (o normalizzati) è una martingala.

$\Rightarrow$ Oltre che misura (di probabilità) neutrale al rischio, $\mathbb{Q}$ si chiama anche misura martingala equivalente, in quanto si tratta di una probabilità equivalente a quella degli operatori, che rende martingale i processi dei prezzi scontati.

Riepilogando, abbiamo dimostrato che l'assenza di opportunità di arbitraggio implica l'esistenza (e l'unicità, visto che il nostro mercato è completo) di una misura neutrale al rischio, o misura martingala equivalente, che rende martingale i processi dei prezzi normalizzati tramite il money market account.

Si può provare anche il viceversa, come abbiamo fatto nel modello binomiale monoperiodale, ovvero che l'esistenza di (almeno) una siffatta misura implica l'assenza di opportunità di arbitraggio.

La misura che abbiamo trovato è collegata al money market account, nel senso che sono martingale i processi dei prezzi espressi in unità di questo strumento, che si chiama anche "numerario".

In generale, un numerario è uno strumento finanziario con prezzo strettamente positivo qualunque sia lo stato del mondo in cui ci si trova.

In assenza di opportunità di arbitraggio, ad ogni numerario è associata una misura martingala equivalente, che rende cioè martingale i processi dei prezzi con esso normalizzati.

Ad esempio si potrebbe scegliere come numerario un'attività rischiosa, oppure un titolo a cedola nulla.

Nell'ipotesi che abbiamo fatto, di tassi deterministici e costanti, la misura martingala equivalente associata al money market account è la stessa che si troverebbe scegliendo come numerario un titolo a cedola nulla. In generale, però, se i prezzi dei bond (e quindi i tassi) sono stocastici, le misure ottenute sono diverse.

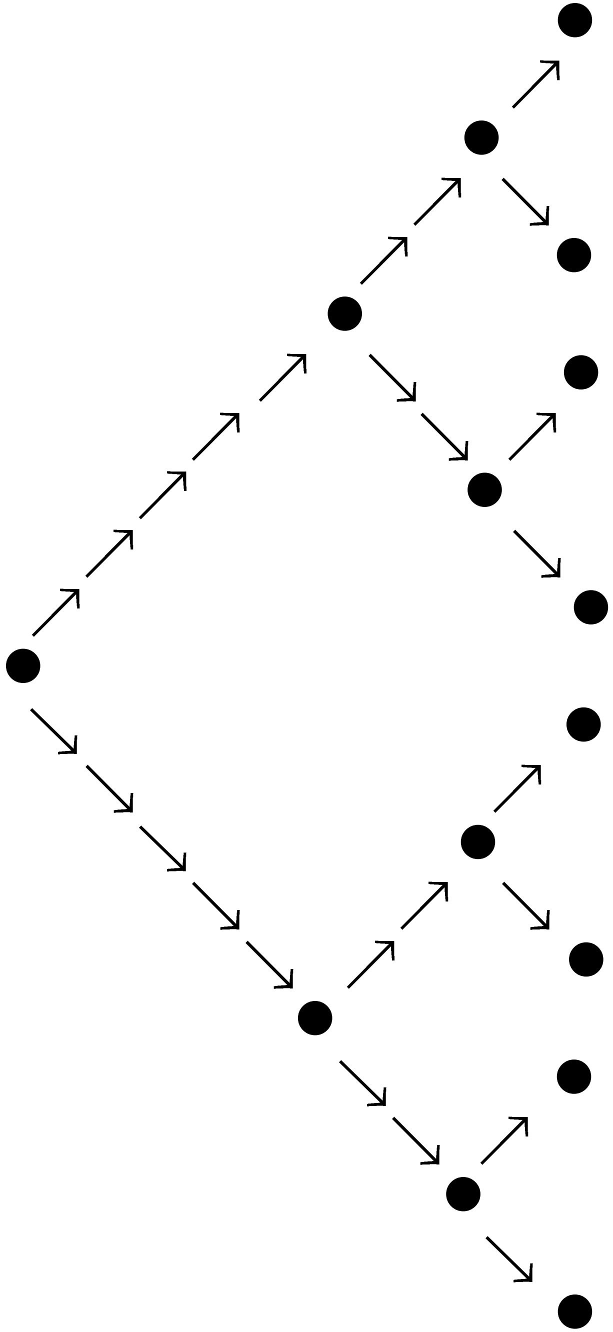
In particolare, la misura martingala equivalente associata ad un titolo a cedola nulla di scadenza T si chiama T*-forward measure*, in quanto rende martingale i processi dei prezzi forward. Infatti ricordiamo che il prezzo forward $F(t,T)=\dfrac{S(t)}{b(t,T)}$ si può interpretare come prezzo a pronti espresso in unità di zero-coupon bond.

Unico payoff a scadenza path-dependent

Consideriamo ora un derivato che prevede un unico payoff finale aleatorio $X(T) = f\left(S(1), S(2), ..., S(T)\right)$ esigibile in T. Tutto ciò che abbiamo visto finora continua a sussistere anche in questo caso, con l'unica differenza che non possiamo più raggruppare le traiettorie del processo del prezzo dell'attività sottostante che portano allo stesso valore finale in quanto il payoff del derivato dipende anche dai prezzi precedenti.

Quindi sia il valore del derivato in ogni epoca e stato del mondo, che la strategia dinamica autofinanziantesi che lo replica, vanno rappresentati tramite un albero binomiale non ricombinante. In particolare, in ogni epoca $t \in \{1, 2, ..., T\}$ ci sono 2^t (anziché $t+1$) stati del mondo, tutti "raggiungibili", cioè con probabilità strettamente positiva, se ci troviamo all'epoca 0, in assenza totale di informazioni. Man mano che passa il tempo saranno raggiungibili (con probabilità subordinata strettamente positiva) soltanto i nodi che si trovano sulla stessa traiettoria di quello corrente, mentre gli altri avranno probabilità condizionata nulla.

La (unica) strategia dinamica autofinanziantesi che replica il payoff del derivato, qualunque esso sia, può ancora essere costruita a ritroso, "muovendosi all'indietro sull'albero" a partire dai nodi terminali, dove rappresentiamo tale payoff.



Anche qui, strada facendo, si trova un'unica misura neutrale al rischio $\mathbb{Q}$ tale che

$$X(0) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[X(T)\mathrm{e}^{-rT} \right],$$

dove $\mathbb{Q}$ è una probabilità equivalente a quella degli operatori. In particolare, la probabilità non condizionata, sotto $\mathbb{Q}$, di una fissata traiettoria che prevede di fare j movimenti verso il basso, da 0 a T (e di conseguenza $T-j$ movimenti verso l'alto), è pari a $q^{T-j}(1-q)^j$, $j = 0,1,\ldots,T$. Di queste traiettorie ce ne sono $\binom{T}{j}$, tutte fra loro equiprobabili, che però non possono essere raggruppate perché a ciascuna di esse è associata una determinazione, in generale diversa, del payoff finale del derivato.

Similmente, se ci troviamo in una generica epoca t, il prezzo del derivato è pari a

$$X(t) = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[X(T)\mathrm{e}^{-r(T-t)} \right] = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[X(T)\mathrm{e}^{-r(T-t)} \middle| S(1), S(2), \ldots, S(t) \right], \quad t = 0,1,\ldots,T-1,$$

dove $\mathbb{Q}$ assegna probabilità condizionata non nulla, data da $q^{T-t-j}(1-q)^j$, soltanto ai nodi che si trovano sulla stessa traiettoria di quello corrente ($j =$ numero di "downs" da t a T).

Infine vale ancora la proprietà di martingalità:

$$\frac{X(t)}{B(t)} = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{X(\tau)}{B(\tau)} \right] \quad \forall t, \tau : 0 \le t < \tau \le T,$$

sempre con probabilità, sotto $\mathbb{Q}$, di un "tratto" che va da t a τ di una generica traiettoria pari a $q^{\tau-t-j}(1-q)^j$, dove j è il numero di downs lungo questo tratto.

Esempio di derivato path-dependent: fondo pensioni

Supponiamo di investire all'inizio di ogni anno un certo importo P con l'obiettivo di costituire, al momento del pensionamento, T, un certo capitale da convertire in rendita. L'investimento viene fatto in un fondo pensioni a capitalizzazione, cioè i dividendi pagati dalle varie attività finanziarie che lo compongono vengono reinvestiti nel fondo stesso, contribuendo ad incrementarne il prezzo unitario. Indichiamo con $S(t)$ il prezzo unitario, in $t \geq 0$, di ciascuna quota del fondo.

⇒ Il numero di quote acquisite alla generica epoca t è pari a $n(t) = \dfrac{P}{S(t)}$, $t = 0,1,\dots,T-1$.

⇒ Il numero di quote accumulate fino al tempo τ, prima dell'(eventuale) investimento ivi effettuato, è pari a $N(\tau) = \sum_{t=0}^{\tau-1} n(t) = P \sum_{t=0}^{\tau-1} \dfrac{1}{S(t)}$, $\tau = 1,\dots,T$.

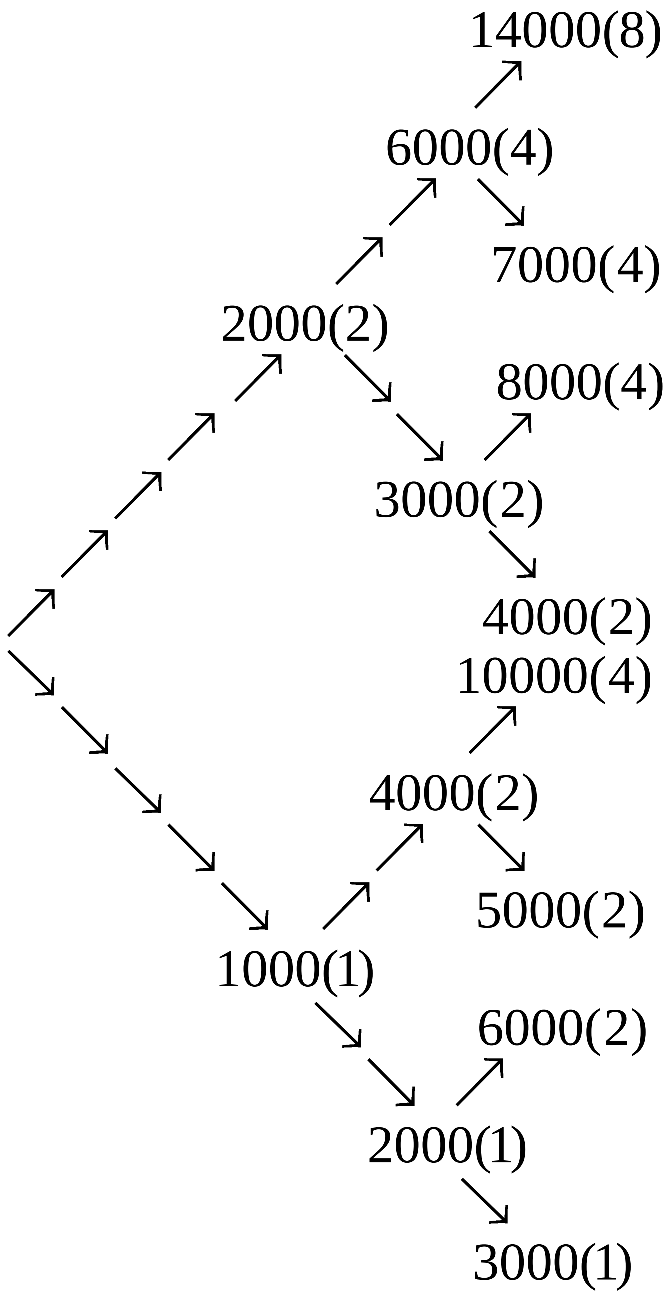
⇒ Il loro valore in τ è dato da $F(\tau) = N(\tau)S(\tau) = PS(\tau)\sum_{t=0}^{\tau-1} \dfrac{1}{S(t)}$, $\tau = 1,\dots,T$.

⇒ Si tratta di un <u>derivato di stile “asiatico</u>” con attività sottostante una quota del fondo pensioni, in quanto il suo payoff in T (o prima, se vogliamo riscattare prima di andare in pensione) è una media dei reciproci dei prezzi dell’attività sottostante:

$$F(\tau) = P\tau S(\tau)\frac{\sum_{t=0}^{\tau-1}\frac{1}{S(t)}}{\tau}, \ \tau = 1,\ldots,T.$$

⇒ Anche se il prezzo dell’attività sottostante può essere rappresentato su un albero binomiale ricombinante, non è così per il valore nel tempo nel fondo pensioni, che prende determinazioni diverse su ogni traiettoria.

Rappresentiamo ora l’evoluzione nel tempo del montante accumulato nel fondo pensioni su un <u>albero binomiale non ricombinante</u> (dove fra parentesi indichiamo anche il prezzo dell’attività sottostante), quando $T = 3, \quad u = 2, \quad d = 1, \quad S(0) = 1, \quad P = 1000$.


14000(8)
6000(4)
7000(4)
2000(2)
8000(4)
3000(2)
4000(2)
10000(4)
4000(2)
5000(2)
1000(1)
6000(2)
2000(1)
3000(1)

Si noti che se noi volessimo calcolare il valore in 0 del payoff finale $F(T)$ in realtà non avremmo bisogno di alcun modello in quanto lo stesso risulta replicabile.

Infatti, per replicare tale payoff bisogna investire P in 0, in 1, …, in $T-1$ nell'attività rischiosa sottostante (cioè nel fondo pensioni), e per avere questo importo a disposizione per l'investimento nelle varie epoche basta acquistare, in 0, P titoli a cedola nulla di scadenza immediata, P titoli a cedola nulla di scadenza 1, …, P titoli a cedola nulla di scadenza $T-1$

$$\Rightarrow \quad V_0(F(T)) = P\sum_{t=0}^{T-1} b(0,t).$$

Diverso sarebbe invece il discorso se volessimo, ad esempio, valutare un'opzione sul valore degli investimenti accumulati nel fondo, ad esempio una put europea di scadenza T e variabile sottostante $F(T)$ che, come sappiamo, consente di avere una garanzia di minimo sul valore finale dell'investimento: qui serve effettivamente un modello, ad es. quello binomiale.

Derivati con cash-flow intermedi

Consideriamo ora un derivato che genera, alle varie epoche $\tau = 1, 2, ..., T$, un cash-flow aleatorio, path o non-path dependent, $D(\tau)$. L'obiettivo è allora quello di determinare il valore del derivato in $t < T$ (cioè dei cash-flow successivi all'epoca di valutazione t). Indichiamo questo valore con $X(t)$, $t = 0,1,...,T-1$.

Per valutare il derivato possiamo seguire due strade alternative:

1) scomporre il derivato in un portafoglio di derivati con un unico payoff finale, e valutarne separatamente le varie componenti come abbiamo visto finora.

   ⇒ Per la linearità dei prezzi implicata dell'assenza di opportunità di arbitraggio, il valore del portafoglio sarà pari alla somma dei valori delle singole componenti:

$$X(t) = \sum_{\tau=t+1}^{T} \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[D(\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \right], \quad t = 0,1,...,T-1.$$

$\Rightarrow$ La metodologia di valutazione ci consente anche di costruire la strategia dinamica autofinanziantesi che replica ciascun payoff. Ad es., volendo partire da 0, si costruisce la strategia dinamica autofinanziantesi che replica $D(1)$, e che quindi inizia in 0 e termina in 1; alla scadenza 1 la strategia produrrà un cash-flow esattamente pari a $D(1)$. Analogamente, si fa lo stesso per tutti gli altri payoff $D(2), D(3), ..., D(T)$.

Esempio: valutazione di un contratto futures in posizione long

Supponiamo che il tempo sia misurato in giorni. I cash-flow generati dal contratto sono

$$D(\tau) = f(\tau, T) - f(\tau - 1, T), \quad \tau = 1, 2, ..., T.$$

Siccome nel nostro modello i tassi sono deterministici, sappiamo che vale l'uguaglianza tra prezzi forward e futures, ovvero che

$$f(\tau, T) = F(\tau, T) = \frac{S(\tau)}{b(\tau, T)} = \frac{S(\tau)}{e^{-r(T-\tau)}} = S(\tau)e^{r(T-\tau)}, \ \ \tau = 0, 1, ..., T$$

(il sottostante non paga dividendi né richiede costi).

$$\Rightarrow \quad D(\tau) = S(\tau)e^{r(T-\tau)} - S(\tau - 1)e^{r(T-\tau+1)}, \ \ \tau = 1, 2, ..., T.$$

Osservazione: Si tratta di payoff path-dependent.

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow \quad X(t) &= \sum_{\tau=t+1}^{T} \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[D(\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \right] \\
&= \sum_{\tau=t+1}^{T} \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\left(S(\tau)\mathrm{e}^{r(T-\tau)} - S(\tau-1)\mathrm{e}^{r(T-\tau+1)} \right)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \right] \\
&= \sum_{\tau=t+1}^{T} \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\left(S(\tau)\mathrm{e}^{r(T-\tau)}\mathrm{e}^{-r(\tau-t)} - S(\tau-1)\mathrm{e}^{r(T-\tau)}\mathrm{e}^{-r(\tau-1-t)} \right) \right] \\
&= \sum_{\tau=t+1}^{T} \mathrm{e}^{r(T-\tau)}\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\left(S(\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)} - S(\tau-1)\mathrm{e}^{-r(\tau-1-t)} \right) \right] \\
&= \sum_{\tau=t+1}^{T} \mathrm{e}^{r(T-\tau)}\left(\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[S(\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)} \right] - \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[S(\tau-1)\mathrm{e}^{-r(\tau-1-t)} \right] \right) \\
&= \sum_{\tau=t+1}^{T} \mathrm{e}^{r(T-\tau)}\left(S(t) - S(t) \right) \\
&= 0, \quad t = 0,1,\ldots,T-1.
\end{aligned}
$$

2) <u>replicare i payoff del derivato tramite una strategia dinamica non autofinanziantesi</u>.

La strategia, che esiste unica, può sempre essere costruita a ritroso, partendo dal payoff finale del derivato rappresentato nei nodi finali dell'albero binomiale (ricombinante o no). Siccome nei nodi intermedi di ricalibratura la nostra strategia deve "rilasciare" il payoff del derivato, dobbiamo costruire il "vecchio portafoglio" in modo che il suo valore all'epoca successiva sia pari alla somma del valore del "nuovo portafoglio" e del payoff del derivato, ovvero:

$$\underbrace{\delta(\tau-1)S(\tau)+\beta(\tau-1)\mathrm{e}^{r\tau}}_{\text{valore di realizzo del "vecchio" portafoglio}} = \underbrace{\delta(\tau)S(\tau)+\beta(\tau)\mathrm{e}^{r\tau}}_{\text{prezzo di acquisto del "nuovo" portafoglio}} + \underbrace{D(\tau)}_{\text{payoff del derivato}}$$

quasi certamente, $\tau = 1, 2, \ldots, T-1$.

Quindi, quando si costruisce la strategia, l'uguaglianza deve valere su entrambi i nodi "raggiungibili" a partire da quello in cui ci si trova.

⇒ Si noti che le quantità $\delta(\tau)$ e $\beta(\tau)$ servono per replicare, in τ, tutti i payoff del derivato successivi a τ (quindi $X(\tau)=\delta(\tau)S(\tau)+\beta(\tau)\mathrm{e}^{r\tau}$), mentre $\delta(\tau-1)$ e $\beta(\tau-1)$ servono per replicare, in $\tau-1$, tutti i payoff successivi a $\tau-1$, compreso $D(\tau)$ che prima non era incluso ($X(\tau-1)=\delta(\tau-1)S(\tau-1)+\beta(\tau-1)\mathrm{e}^{r(\tau-1)}$).

⇒ Quando si deve risolvere il sistema per trovare le quantità in $\tau-1$, il vettore dei termini noti è dato dai valori del derivato costruiti nell'iterazione precedente nei due nodi successivi, sommati alle determinazioni del payoff.

Valutazione di opzioni europee

I risultati ottenuti fin qui ci consentono, quindi, di valutare un qualunque derivato di stile europeo, path o non path-dependent, con o senza cash-flow intermedi. In particolare, nel caso di un'opzione call europea con scadenza T e prezzo di esercizio K si ottiene:

$$c(t) = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\max\left\{S(T)-K,0\right\}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\right] = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[\max\left\{S(T)-K,0\right\}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\middle|S(t)\right],$$

$$t = 0,1,\ldots,T-1.$$

Ricordiamo che le uniche determinazioni di $S(T)$ che hanno probabilità condizionata strettamente positiva di essere "raggiunte" a partire da $S(t)$ sono $S(t)u^{T-t-j}d^{j}$, $j = 0,1,\ldots,T-t$, dove al solito j indica il numero di movimenti verso il basso che il prezzo del sottostante fa da t a T (su un totale di $T-t$ movimenti), e che la probabilità condizionata, sotto $\mathbb{Q}$, della generica determinazione, è data da

$$\mathbb{Q}\left(S(T) = S(t)u^{T-t-j}d^{j}\,\middle|\,S(t)\right) = \binom{T-t}{j}q^{T-t-j}(1-q)^{j}, \quad j = 0,1,\ldots,T-t.$$

$$\Rightarrow \quad c(t) = \sum_{j=0}^{T-t}\max\left\{S(t)u^{T-t-j}d^{j}-K,0\right\}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\binom{T-t}{j}q^{T-t-j}(1-q)^{j}.$$

Osserviamo che le possibili determinazioni condizionate di $S(T)$,

$$S(t)u^{T-t-j}d^{j}=S(t)u^{T-t}\left(\frac{d}{u}\right)^{j},$$

sono decrescenti con j in quanto $0<\dfrac{d}{u}<1$.

- Se $K\geq S(t)u^{T-t} \;\Rightarrow\; K\geq S(t)u^{T-t-j}d^{j}\;\forall j \;\Rightarrow\; \max\left\{S(t)u^{T-t-j}d^{j}-K,0\right\}=0\;\forall j$

  $\Rightarrow\; c(t)=0.$

- Se $K\leq S(t)d^{T-t} \;\Rightarrow\; K\leq S(t)u^{T-t-j}d^{j}\;\forall j$

  $\Rightarrow\; \max\left\{S(t)u^{T-t-j}d^{j}-K,0\right\}=S(t)u^{T-t-j}d^{j}-K\;\forall j$

  $$\Rightarrow\; c(t)=\sum_{j=0}^{T-t}\left(S(t)u^{T-t-j}d^{j}-K\right)\mathrm{e}^{-r(T-t)}\binom{T-t}{j}q^{T-t-j}(1-q)^{j}$$

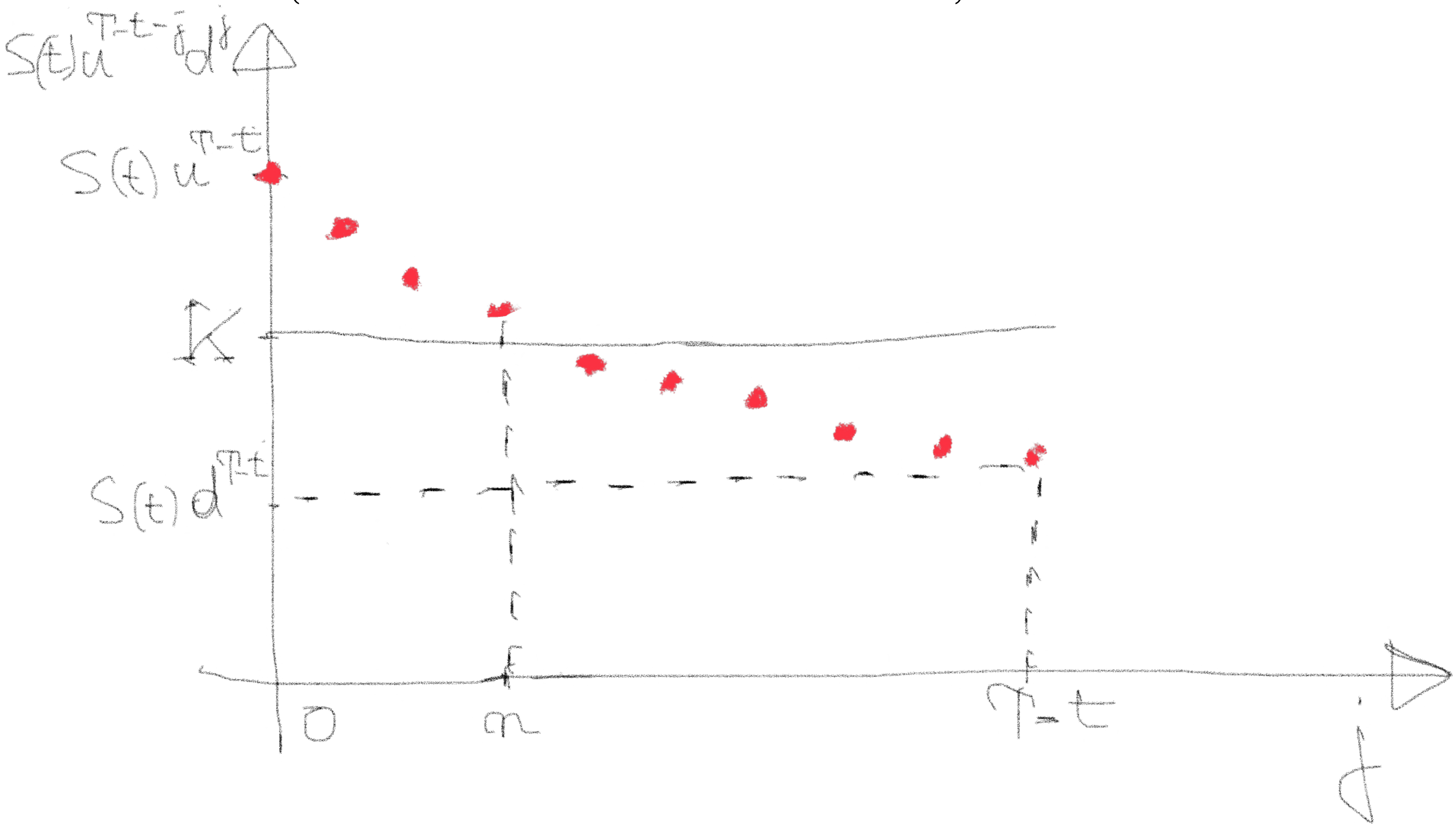
  $$=\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\left(S(T)-K\right)\mathrm{e}^{-r(T-t)}\right]$$

  $$=\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[S(T)\mathrm{e}^{-r(T-t)}\right]-\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\right]$$

  $$=S(t)-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}.$$

- Se $S(t)d^{T-t} < K < S(t)u^{T-t} \;\Rightarrow\; \exists\, j \in \{0,1,\ldots,T-t-1\} :\, S(t)u^{T-t-j}d^{\,j} \geq K$.

  Sia $n = \max\left\{ j \in \{0,1,\ldots,T-t-1\} :\, S(t)u^{T-t-j}d^{\,j} \geq K \right\}$.



$$\Rightarrow \quad \max\left\{S(t)u^{T-t-j}d^{\,j}-K,0\right\}=\begin{cases} S(t)u^{T-t-j}d^{\,j}-K & \text{se } j\le n \\ 0 & \text{se } j>n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad c(t)=\sum_{j=0}^{T-t}\max\left\{S(t)u^{T-t-j}d^{\,j}-K,0\right\}\mathrm{e}^{-r(T-t)}\binom{T-t}{j}q^{T-t-j}(1-q)^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}\left(S(t)u^{T-t-j}d^{\,j}-K\right)\mathrm{e}^{-r(T-t)}\binom{T-t}{j}q^{T-t-j}(1-q)^{j}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}S(t)u^{T-t-j}d^{\,j}\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\binom{T-t}{j}q^{T-t-j}(1-q)^{j}-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\sum_{j=0}^{n}\binom{T-t}{j}q^{T-t-j}(1-q)^{j}$$

Nel generico addendo della prima sommatoria scriviamo

$$\mathrm{e}^{-r(T-t)}=\mathrm{e}^{-r(T-t-j+j)}=\mathrm{e}^{-r(T-t-j)}\mathrm{e}^{-rj}=(\mathrm{e}^{-r})^{T-t-j}(\mathrm{e}^{-r})^{j}$$

e compattiamo tutte le potenze che hanno lo stesso esponente:

$$c(t)=S(t)\sum_{j=0}^{n}\binom{T-t}{j}\left(uq\mathrm{e}^{-r}\right)^{T-t-j}\left(d(1-q)\mathrm{e}^{-r}\right)^{j}-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\sum_{j=0}^{n}\binom{T-t}{j}q^{T-t-j}(1-q)^{j}.$$

Osserviamo che $uq\mathrm{e}^{-r} > 0$ e $d(1-q)\mathrm{e}^{-r} > 0$.

Inoltre $uq\mathrm{e}^{-r} + d(1-q)\mathrm{e}^{-r} = 1$: basta fare la verifica sostituendo q oppure semplicemente ricordarsi che $(Su\mathrm{e}^{-r})q + (Sd\mathrm{e}^{-r})(1-q) = \mathrm{E}^{\mathbb{Q}}\left[S(1)\mathrm{e}^{-r} \right] = S$.

Poniamo allora $\overline{q} = uq\mathrm{e}^{-r}$ ($\Rightarrow d(1-q)\mathrm{e}^{-r} = 1-\overline{q}$) e indichiamo con $\mathrm{Bin}(x; N, p)$ la funzione di ripartizione, calcolata in x, di una variabile aleatoria con distribuzione binomiale di parametri N e p.

$$\Rightarrow \; c(t) = S(t)\sum_{j=0}^{n} \binom{T-t}{j} \overline{q}^{\,T-t-j}(1-\overline{q})^{j} - K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \sum_{j=0}^{n} \binom{T-t}{j} q^{T-t-j}(1-q)^{j}$$

$$= S(t)\mathrm{Bin}(n; T-t, 1-\overline{q}) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{Bin}(n; T-t, 1-q).$$

Resta ancora da determinare n:

$$S(t)u^{T-t-j}d^{j} \geq K \quad \Leftrightarrow \quad \frac{S(t)u^{T-t}}{K} \geq \left(\frac{u}{d}\right)^{j} \quad \Leftrightarrow \quad j\ln\left(\frac{u}{d}\right) \leq \ln\left(\frac{S(t)u^{T-t}}{K}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad j \leq \frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)} \quad \Rightarrow \quad n = \max\ \text{intero} \leq \frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)} = \left\lfloor \frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)} \right\rfloor.$$

<u>Osservazioni</u>:

- Siccome la funzione di ripartizione della binomiale è costante a tratti e continua a destra sugli interi, non occorre nemmeno considerare la parte intera quando si rappresenta il valore della call tramite l'espressione finale che abbiamo ottenuto.
- Tale espressione è stata ricavata nel caso $S(t)d^{T-t} < K < S(t)u^{T-t}$. Tuttavia essa è valida in generale (purché $K > 0$). Infatti:

  - Se $K \leq S(t)d^{T-t} \;\Rightarrow\; \dfrac{S(t)}{K} \geq \left(\dfrac{1}{d}\right)^{T-t} \;\Rightarrow\; \dfrac{S(t)u^{T-t}}{K} \geq \left(\dfrac{u}{d}\right)^{T-t}$

$$\Rightarrow\; \ln\left(\frac{S(t)u^{T-t}}{K}\right) \geq (T-t)\ln\left(\frac{u}{d}\right) \;\Rightarrow\; \frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)} \geq T-t$$

$$\Rightarrow\; \mathrm{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-\overline{q}\right) = \mathrm{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-q\right) = 1$$

$$\Rightarrow\; c(t) = S(t) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}.$$

- Se $K > S(t)u^{T-t} \Rightarrow \dfrac{S(t)u^{T-t}}{K} < 1 \Rightarrow \ln\left(\dfrac{S(t)u^{T-t}}{K}\right) < 0 \Rightarrow \dfrac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)} < 0$

$$\Rightarrow \operatorname{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-\overline{q}\right) = \operatorname{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-q\right) = 0$$

$$\Rightarrow c(t) = 0.$$

- Se $K = S(t)u^{T-t} \Rightarrow \dfrac{S(t)u^{T-t}}{K} = 1 \Rightarrow \ln\left(\dfrac{S(t)u^{T-t}}{K}\right) = 0 \Rightarrow \dfrac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)} = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} \operatorname{Bin}\left(\dfrac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-\overline{q}\right) = \overline{q}^{T-t} \\ \operatorname{Bin}\left(\dfrac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-q\right) = q^{T-t} \end{cases}$$

$$\Rightarrow c(t) = S(t)\overline{q}^{T-t} - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}q^{T-t} = \underbrace{S(t)u^{T-t}}_{=K} q^{T-t}\mathrm{e}^{-r(T-t)} - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}q^{T-t} = 0.$$

Riepilogando, qualunque sia $K>0$ il prezzo di una call europea, e quindi anche di quella americana visto che il sottostante non paga dividendi, è pari a

$$c(t)=C(t)=S(t)\mathrm{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-\bar{q}\right)$$
$$-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-q\right),\quad t=0,1,\dots,T-1,$$

dove $q=\dfrac{\mathrm{e}^{r}-d}{u-d}$ e $\bar{q}=uq\mathrm{e}^{-r}$.

Volendo valutare una put europea, si potrebbe usare lo stesso procedimento tenendo però conto che il payoff finale è ora $\max\left\{K-S(T),0\right\}$ oppure, più velocemente, si può utilizzare la put-call parity:

$$p(t)=c(t)-S(t)+K\mathrm{e}^{-r(T-t)}=K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[1-\mathrm{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-q\right)\right]$$
$$-S(t)\left[1-\mathrm{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u^{T-t}/K\right)}{\ln\left(u/d\right)};T-t,1-\bar{q}\right)\right],\quad t=0,1,\dots,T-1.$$

Proprietà asintotiche del modello binomiale

Consideriamo un'opzione europea, ad esempio call, di scadenza T e prezzo di esercizio $K > 0$, e poniamoci in un istante $(0 \leq) t < T$ (fissato). Non occorre che t e T siano interi ma possono essere numeri reali qualunque.

Supponiamo:

- di suddividere l'intervallo $[t, T]$ in N intervallini di uguale ampiezza $\Delta = \dfrac{T-t}{N}$;
- che i mercati, costituiti dall'attività rischiosa di prezzo $S(t) > 0$ e dal money market account, tra t e T siano aperti alle epoche equidistanziate $t, t+\Delta, ..., t+N\Delta = T$;
- che, <u>subordinatamente all'informazione disponibile</u> al tempo $\tau = t + i\Delta$ $(i = 0,1,..., N-1)$, il prezzo in $\tau + \Delta$ dell'attività rischiosa, $S(\tau + \Delta)$, possa assumere soltanto <u>due possibili determinazioni</u>, pari a $S(\tau)u(\Delta)$ e $S(\tau)d(\Delta)$, dove u e d sono ora due funzioni a valori reali tali che $u(\Delta) > \mathrm{e}^{r\Delta} > d(\Delta) > 0$, e r è l'intensità (deterministica e costante) di rendimento del money market per unità di tempo.

Procedendo esattamente come prima, si determina il prezzo delle opzioni europee con scadenza T in funzione di N che, con un abuso di notazione, indichiamo ora con

$$c_t(N) = S(t)\mathrm{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u\left(\frac{T-t}{N}\right)^N \Big/ K \right)}{\ln\left(u\left(\frac{T-t}{N}\right) \Big/ d\left(\frac{T-t}{N}\right) \right)}; N, 1-\overline{q}\left(\frac{T-t}{N}\right) \right)$$

$$-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{Bin}\left(\frac{\ln\left(S(t)u\left(\frac{T-t}{N}\right)^N \Big/ K \right)}{\ln\left(u\left(\frac{T-t}{N}\right) \Big/ d\left(\frac{T-t}{N}\right) \right)}; N, 1-q\left(\frac{T-t}{N}\right) \right),$$

dove $q(\Delta) = \dfrac{\mathrm{e}^{r\Delta} - d(\Delta)}{u(\Delta) - d(\Delta)}$ e $\overline{q}(\Delta) = u(\Delta)q(\Delta)\mathrm{e}^{-r\Delta}$.

Se $N \to +\infty$ (ovvero, la distanza tra due date consecutive di apertura dei mercati $\Delta = \dfrac{T-t}{N} \to 0$), il nostro modello discreto per il prezzo dell'attività rischiosa tende ad un modello a tempo continuo.

In particolare, fissato un numero reale $\sigma > 0$ e posto

$$u(\Delta) = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta}},\ d(\Delta) = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta}} > \mathrm{e}^{r\Delta} (> \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta}}) \iff \sigma\sqrt{\Delta} > r\Delta \iff \sigma > r\sqrt{\Delta},$$

si può provare, sfruttando il Teorema del limite centrale e dopo un po' di calcoli, che il prezzo dell'opzione tende a quello ottenuto nel modello di Black e Scholes:

$$\lim_{N\to+\infty} c_t(N) = S(t)\Phi\left(\frac{\ln(S(t)/K) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right)$$
$$-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi\left(\frac{\ln(S(t)/K) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}\right),$$

dove $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y$ è la funzione di ripartizione di una variabile aleatoria con distribuzione normale standard.

Valutazione delle opzioni put americane

(approccio numerico)

Il modello binomiale multiperiodale può essere utilizzato, a ritroso, per valutare anche le opzioni put americane. Tornando, per fissare le idee, al caso $\Delta = 1$ (o $N = T$, se ci poniamo, in particolare, all'epoca $t = 0$), si procede come segue:

- Prima di tutto si riempiono i nodi finali dell'albero (ricombinante), all'epoca T, con il payoff dell'opzione (che coincide con quello delle opzioni europee):

$$P_T^{(i)} = \max\left\{K - S_T^{(i)}, 0\right\} = \max\left\{K - Su^{T-i}d^i, 0\right\},\ i = 0,1,\dots,T.$$

- Successivamente, immaginiamo di porci all'epoca $t < T$, nello stato $\omega_t^{(i)}$ ($i = 0,1,\dots,t$), in cui il prezzo dell'attività sottostante è pari a $S_t^{(i)} = Su^{t-i}d^i$. Siccome procediamo all'indietro, nel passo precedente abbiamo già riempito tutti i nodi dell'albero all'epoca $t+1$ con il corrispondente valore dell'opzione $P_{t+1}^{(j)}$, $j = 0,1,\dots,t+1$ e, in particolare, conosciamo il valore della stessa nei due nodi successivi a $\omega_t^{(i)}$ dato, rispettivamente, da $P_{t+1}^{(i)}$ (se da t a $t+1$ il prezzo del sottostante fa un movimento verso l'alto) e da $P_{t+1}^{(i+1)}$ (se il prezzo fa un movimento verso il basso).

A questo punto abbiamo due alternative:

- <u>esercitare</u> l'opzione, con un payoff (*valore di esercizio*) dato da $E_t^{(i)} = K - S_t^{(i)}$,
- non esercitare, cioè <u>continuare</u>, con un "payoff" (*valore di continuazione*) dato da

$$C_t^{(i)} = \left(P_{t+1}^{(i)} e^{-r}\right) q + \left(P_{t+1}^{(i+1)} e^{-r}\right)(1-q).$$

$\Rightarrow$ Siccome tutti gli agenti sono razionali e non saziati, sceglieranno l'alternativa più favorevole, cioè quella che porta ad un payoff maggiore, e quindi:

$$P_t^{(i)} = \max\left\{E_t^{(i)}, C_t^{(i)}\right\}, \quad t = T-1, T-2, \dots, 0 \quad \text{e} \quad i = 0, 1, \dots, t.$$

<u>Osservazioni</u>:

- Nel caso di un'opzione put europea, che non può essere esercitata anticipatamente, il valore dell'opzione in t è sempre pari al valore di continuazione.
- Il valore di continuazione di un'opzione americana, $C_t^{(i)}$, è in generale diverso da quello della corrispondente opzione europea, in quanto esclude soltanto la possibilità di esercizio immediato, in t, mentre include la possibilità di esercizio anticipato in ogni epoca $\tau > t$ (così come lo includono i valori dell'opzione in $t+1$ nei due nodi successivi).

- Il procedimento appena illustrato fornisce anche la strategia di esercizio ottimale: l'esercizio anticipato conviene nel primo istante $t \geq 0$ in cui il valore di esercizio supera strettamente quello di continuazione. Se valore di esercizio e valore di continuazione coincidono, allora è indifferente esercitare o continuare; se il valore di continuazione supera strettamente quello di esercizio, cioè $P(t) > K - S(t)$, allora sappiamo già che non conviene esercitare.

<u>Esempio numerico</u>: $S = 1000,\ K = 1000,\ r = 0.1,\ T = 3,\ u = 1.2,\ d = 0.9$

$(\Rightarrow \quad e^r = 1.10517, \quad q = 0.6839, \quad 1-q = 0.3161)$

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & 1728 \\
 & & 1440 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 1200 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 1296 \\
1000 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 1080 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 900 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 972 \\
 & & 810 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & 729
\end{tikzcd}
$$

Evoluzione di $S(t)$
(attività sottostante)

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & 0 \\
 & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 2.291 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0 \\
10.594 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 8.009 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 32.082 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 28 \\
 & & 94.838 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & 271
\end{tikzcd}
$$

Evoluzione di $p(t)$
(put europea)

$$
\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small]
 & & & 0 \\
 & & 0 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 2.291 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 0 \\
30.02 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 8.009 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & 100\ \ 59.3 \arrow[ur] \arrow[dr] & & 28 \\
 & & 190\ \ 94.838 \arrow[ur] \arrow[dr] & \\
 & & & 271
\end{tikzcd}
$$

Evoluzione di $P(t)$
(put americana)

MODELLO DI BLACK E SCHOLES

Inquadramento storico

Nelle lezioni precedenti abbiamo assunto un modello discreto, sia come tempi di apertura dei mercati che come variabili aleatorie componenti il processo del prezzo dell'attività rischiosa, e precisamente il modello binomiale. Come limite del modello, in particolare riguardo al prezzo delle opzioni europee, abbiamo ottenuto la celeberrima formula di Black e Scholes che, pur con i difetti che descriveremo a fine corso, è tuttora utilizzata dagli operatori per prezzare le opzioni in quanto è estremamente semplice e fornisce dei risultati in tempo reale. Infatti nella pratica c'è la necessità di prezzare, ad elevatissima frequenza, un quantitativo enorme di opzioni, e quindi questo aspetto è importante malgrado la potenza degli strumenti di calcolo attualmente disponibili.

I lavori di Black e Scholes, e Merton, ottenuti in maniera indipendente, sono stati pubblicati nel 1973, e si basano sull'ipotesi di un mercato aperto in tempo continuo, in cui anche le variabili del processo del prezzo dell'attività sottostante sono continue. Questi Autori hanno avuto la geniale intuizione di combinare un risultato riguardante i processi stocastici (*Lemma di Ito*) con un ragionamento di tipo economico. In particolare, proprio per questi risultati, Merton e Scholes hanno avuto l'altissimo riconoscimento del premio Nobel per l'economia nel 1997 (non Black perché purtroppo era già morto da due anni).

Il modello binomiale che abbiamo presentato, proposto da Cox, Ross e Rubinstein, è successivo ai lavori di Black-Scholes e Merton (è stato pubblicato nel 1979); la scelta di partire da questo è dovuta ad esigenze didattiche. Infatti abbiamo potuto andare a fondo dimostrando tutto, in particolare l'esistenza della misura neutrale al rischio, o misura martingala equivalente, senza far uso di strumenti sofisticati ma solo di conoscenze elementari di Calcolo delle probabilità.

Come vedremo in questa e nelle prossime lezioni, ci sono altri due modi alternativi per pervenire alla formula di Black e Scholes. Partiremo dalla descrizione di un primo metodo, che si basa sull'utilizzo delle martingale per la valutazione di strumenti finanziari derivati. Questo approccio è stato proposto da Harrison e Kreps e, rispettivamente, da Harrison e Pliska, in lavori pubblicati nel 1979 e 1981. Si tratta quindi, anche in questo caso, di lavori successivi a quelli di Black-Scholes e Merton, ma di nuovo la scelta nasce da esigenze didattiche, in quanto tale metodo è molto simile a quello utilizzato nel modello binomiale. Qui tuttavia non dimostreremo tutto, ma daremo molte cose per scontate.

Infine descriveremo l'approccio originale utilizzato da Black e Scholes, che si basa su un ragionamento simile a quello della neutralizzazione del rischio che abbiamo illustrato nel modello binomiale monoperiodale, dando anche qui molte cose per buone e concentrandoci soprattutto sull'interpretazione dei risultati.

Modello lognormale

Supponiamo che:

- il mercato sia aperto in tempo continuo, alle generiche epoche $t \geq 0$;
- su di esso siano trattate due attività di base: un'attività non rischiosa, il money market account, che "viaggia" al tasso deterministico e costante r, e un'attività rischiosa (che non stacca dividendi) con prezzo in 0 pari a $S(0) > 0$;
- il processo stocastico del prezzo dell'attività rischiosa sia lognormale, vale a dire che, subordinatamente all'informazione disponibile al tempo t, il prezzo in T di tale attività, $S(T)$, ha distribuzione lognormale $\forall t, T : 0 \leq t < T$. Più precisamente, supponiamo che

$$\ln S(T) \underset{t}{\sim} N\left(\ln S(t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right),$$

dove μ e σ sono due numeri reali, con $\sigma > 0$.

<u>Osservazioni</u>:

- Si tratta di un <u>processo markoviano</u>, in quanto l'evoluzione futura del prezzo dipende soltanto dal prezzo corrente $S(t)$ e non anche da tutta la storia precedente.
- E' importante che tutti gli operatori concordino su questo tipo di distribuzione condizionata di $S(T)$ e, in particolare, sul parametro σ, chiamato *volatilità* del processo, mentre non ha alcuna rilevanza il parametro μ, chiamato *drift*, o *deriva*, che potrebbe anche differire da operatore ad operatore. Come vedremo, infatti, tale parametro "sparirà" completamente quando si determinerà il prezzo dei derivati, così come non sono mai intervenute le probabilità attribuite dai singoli agenti nel modello binomiale.

Vediamo adesso alcuni momenti della distribuzione condizionata di $S(T)$, con l'obiettivo di interpretare il significo dei due parametri che la caratterizzano. In particolare il significato di σ è abbastanza evidente in quanto si tratta della deviazione standard del rendimento per unità di tempo. Infatti:

$$\sigma^2 = \mathrm{var}_t\left[\ln S(t+1)\right] = \mathrm{var}_t\left[\ln S(t+1) - \ln S(t)\right] = \mathrm{var}_t\left[\ln \frac{S(t+1)}{S(t)}\right],$$

dove con var_t abbiamo indicato la varianza condizionata all'informazione disponibile all'epoca t che, nelle nostre ipotesi, equivale a dire condizionata a $S(t)$.

Posto $Z = \ln S(T)$ ($\Rightarrow S(T) = \mathrm{e}^Z$) si ha:

$$\mathrm{E}_t\left[S(T)\right] = \mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^Z\right] = M_Z(1),$$

$$\mathrm{var}_t\left[S(T)\right] = \mathrm{E}_t\left[S(T)^2\right] - \mathrm{E}_t\left[S(T)\right]^2 = \mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^{2Z}\right] - \mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^Z\right]^2 = M_Z(2) - M_Z(1)^2,$$

dove con $M_Z(v) = \mathrm{E}_t\left[\mathrm{e}^{vZ}\right]$, $v \in \mathbb{R}$, abbiamo indicato la funzione generatrice dei momenti della variabile aleatoria Z (condizionata all'informazione disponibile in t).

Ricordando che se $Z \underset{t}{\sim} N(m, s^2)$, $M(v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{vx} \frac{1}{\sqrt{2\pi s}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}} \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{vm + \frac{v^2 s^2}{2}}$, e sostituendo m ed s si ottiene:

$$\mathrm{E}_t\left[S(T)\right] = M_Z(1) = \mathrm{e}^{m + s^2/2} = \mathrm{e}^{\ln S(t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma^2(T-t)/2} = S(t)\mathrm{e}^{\mu(T-t)},$$

$$\mathrm{var}_t\left[S(T)\right] = M_Z(2) - M_Z(1)^2 = \left(\mathrm{e}^{m+s^2}\right)^2 - \left(S(t)\mathrm{e}^{\mu(T-t)}\right)^2$$

$$= \left(\mathrm{e}^{\ln S(t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t) + \sigma^2(T-t)}\right)^2 - \left(S(t)\mathrm{e}^{\mu(T-t)}\right)^2 = \left(S(t)\mathrm{e}^{\mu(T-t)}\right)^2 \left(\mathrm{e}^{\sigma^2(T-t)} - 1\right).$$

In particolare, dalla relazione che ci fornisce la speranza matematica di $S(T)$ si evince l'interpretazione del parametro μ come intensità in base a cui cresce il valore atteso condizionato del prezzo in una data futura T man mano che si allontana tale data futura.

Si può provare che anche in questo modello esiste unica una misura di probabilità, $\mathbb{Q}$, in base alla quale i prezzi dei derivati con unico payoff finale si ottengono come speranza matematica (condizionata) del payoff, attualizzato col tasso privo di rischio r.

Più in generale, come abbiamo visto nel modello binomiale multiperiodale, questa relazione collega tra loro i prezzi dei derivati in due istanti diversi senza che il secondo sia necessariamente la scadenza, e vale in particolare anche per l'attività rischiosa.

Sotto $\mathbb{Q}$, $S(T)$ è ancora lognormale, ma il parametro μ viene sostituito dal tasso privo di rischio r (mentre σ rimane invariato), cioè

$$\ln S(T) \underset{t}{\overset{\mathbb{Q}}{\sim}} N\left(\ln S(t) + (r - \sigma^2/2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right).$$

$\Rightarrow$ Siccome il parametro μ è "sparito", i prezzi dei derivati non dipendono da μ.

Verifica:

$$\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[S(T)\mathrm{e}^{-r(T-t)}\right] = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[S(T)\right] = \mathrm{e}^{-r(T-t)}S(t)\mathrm{e}^{r(T-t)} = S(t) \quad \forall t, T: 0 \le t < T$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ è una probabilità neutrale al rischio.

Dividendo entrambi i membri per $B(t) = \mathrm{e}^{rt}$ si ottiene inoltre:

$$\mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\frac{S(T)}{B(T)}\right] = \frac{S(t)}{B(t)} \quad \forall t, T: 0 \le t < T$$

$\Rightarrow$ $\mathbb{Q}$ è una misura martingala equivalente.

Costruzione della formula di Black e Scholes

Siamo quindi in grado di calcolare il prezzo delle opzioni europee con sottostante l'attività rischiosa. In particolare, il valore in $t \geq 0$ di una call con strike $K > 0$ e scadenza $T > t$ è dato da

$$c(t) = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\max\left\{S(T) - K, 0\right\} \mathrm{e}^{-r(T-t)}\right] = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\max\left\{\mathrm{e}^{Z} - K, 0\right\} \mathrm{e}^{-r(T-t)}\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \max\left\{\mathrm{e}^{x} - K, 0\right\} \mathrm{e}^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(x - \ln S(t) - (r - \sigma^2/2)(T-t)\right)^2} \mathrm{d}x.$$

Osserviamo che $\left(\mathrm{e}^{x} > K \iff x > \ln K\right) \Rightarrow \max\left\{\mathrm{e}^{x} - K, 0\right\} = \begin{cases} 0 & \text{se } x \leq \ln K \\ \mathrm{e}^{x} - K & \text{se } x > \ln K \end{cases}.$

$$\Rightarrow c(t) = \int_{-\infty}^{\ln K} 0 \, \mathrm{d}x + \int_{\ln K}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{x} - K\right) \mathrm{e}^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(x - \ln S(t) - (r - \sigma^2/2)(T-t)\right)^2} \mathrm{d}x$$

$$= \int_{\ln K}^{+\infty} \mathrm{e}^{x} \mathrm{e}^{-r(T-t)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(x - \ln S(t) - (r - \sigma^2/2)(T-t)\right)^2} \mathrm{d}x$$

$$- K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(x - \ln S(t) - (r - \sigma^2/2)(T-t)\right)^2} \mathrm{d}x.$$

Partiamo dal primo integrale e accorpiamo tutte le potenze. Facendo dei lunghi e noiosissimi calcoli a esponente (denominatore comune, sviluppo quadrati, …) perveniamo alla seguente espressione finale:

$$\mathrm{e}^{x-r(T-t)-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(x-\ln S(t)-(r-\sigma^2/2)(T-t)\right)^2} = \mathrm{e}^{\ln S(t)-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(x-\ln S(t)-(r+\sigma^2/2)(T-t)\right)^2}$$

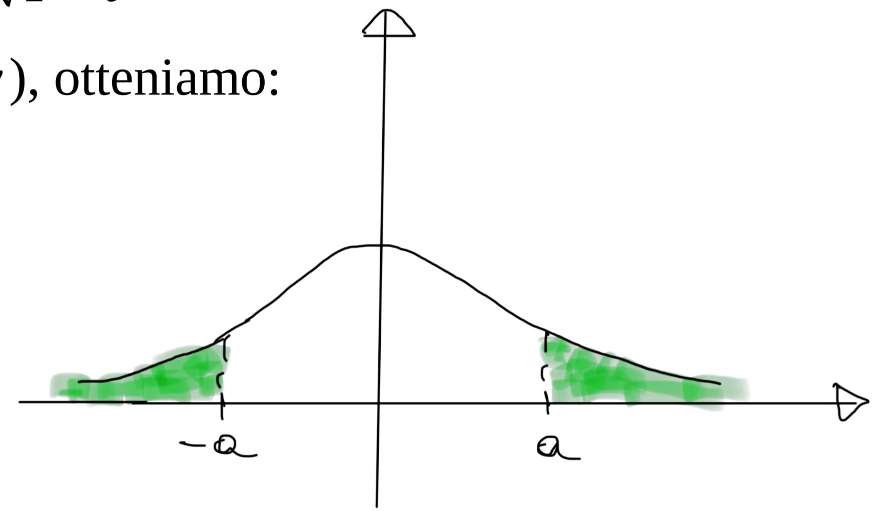
$$\Rightarrow \qquad c(t) = S(t)\int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(x-\ln S(t)-(r+\sigma^2/2)(T-t)\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

$$-K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\int_{\ln K}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma\sqrt{T-t}}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{2\sigma^2(T-t)}\left(x-\ln S(t)-(r-\sigma^2/2)(T-t)\right)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Con le sostituzioni di variabile

$$y = \frac{x - \ln S(t) - (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad y = \frac{x - \ln S(t) - (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}, \quad \text{rispettivamente}$$

nel primo e nel secondo integrale ($\Rightarrow \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$), otteniamo:



- $$c(t) = S(t) \int_{\frac{\ln K - \ln S(t) - (r+\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y$$

$$- K\mathrm{e}^{-r(T-t)} \int_{\frac{\ln K - \ln S(t) - (r-\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y.$$

Riconosciamo, nella funzione integranda, la densità di una normale standard, per cui $\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, \mathrm{e}^{-\frac{y^2}{2}}\, \mathrm{d}y = 1 - \Phi(a)$. Per le proprietà di simmetria di tale distribuzione sappiamo inoltre che $1 - \Phi(a) = \Phi(-a)\ \forall a \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow$ $$c(t) = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\ ,$$

dove $$d_1 = \frac{\ln\left(S(t)/K\right) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t} = \frac{\ln\left(S(t)/K\right) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

$\Rightarrow$ Visto che non ci sono dividendi, il prezzo di un'opzione call americana coicide con quello della corrispondente call europea, $C(t) = c(t)$, mentre per calcolare il valore di una put europea si può usare lo stesso procedimento oppure sfruttare la put-call parity:

$$p(t) = c(t) - S(t) + Ke^{-r(T-t)} = S(t)\Phi(d_1) - Ke^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - S(t) + Ke^{-r(T-t)}$$

$$= Ke^{-r(T-t)}\left[1 - \Phi(d_2)\right] - S(t)\left[1 - \Phi(d_1)\right] = Ke^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S(t)\Phi(-d_1).$$

Per quanto riguarda, invece, la valutazione di opzioni put americane, non esistono soluzioni in forma chiusa ma bisogna utilizzare un procedimento numerico.

I vari metodi che sono stati proposti in letteratura a tale scopo possono essere classificati in tre categorie:

- <u>approssimazione tramite alberi binomiali/multinomiali</u>. Ad esempio, nel caso di alberi binomiali si tratta di approssimare il modello che stiamo considerando con un modello binomiale multiperiodale in cui:
  - l'intervallo $[t,T]$ viene suddiviso in un numero "sufficientemente elevato" di intervallini di uguale ampiezza $\Delta = \dfrac{T-t}{N}$,
  - si fissano $u(\Delta) = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta}}$ e $d(\Delta) = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta}}$ (verificando che sia soddisfatta la condizione di non arbitraggio $\sigma > r\sqrt{\Delta}$),
  - si applica il metodo per la valutazione di opzioni put americane nel modello binomiale multiperiodale, con l'unica variante che ora la distanza tra due date consecutive di apertura dei mercati non è più unitaria bensì di ampiezza Δ;
- <u>soluzione di un sistema di equazioni/disequazioni alle derivate parziali</u> mediante metodi alle differenze finite;
- metodi di <u>simulazione Monte Carlo</u> combinati con la <u>regressione ai minimi quadrati</u> (Least Squares Monte Carlo).

Torniamo alla formula di Black e Scholes:

$$c(t) = S(t)\Phi(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\,, \qquad p(t) = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) - S(t)\Phi(-d_1)\,,$$

con $$d_1 = \frac{\ln\left(S(t)/K\right) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \quad \text{e} \quad d_2 = \frac{\ln\left(S(t)/K\right) + (r - \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Per poterla applicare in pratica <u>bisogna stimare soltanto il parametro di volatilità</u> σ. Gli altri parametri, infatti, sono direttamente osservabili: in particolare r può essere desunto dal prezzo dei titoli privi di rischio (ad esempio da quello dei BOT) con scadenza coincidente con la scadenza dell'opzione.

Per quanto riguarda la stima di σ, ci sono due metodi alternativi:

- volatilità storica. Ci si basa sulle serie storiche dei prezzi dell'attività sottostante. Ricordiamo infatti che $\sigma^2 = \mathrm{var}_t\left[\ln S(t+1) - \ln S(t)\right]$, per cui si può stimare la varianza campionaria delle differenze tra i logaritmi dei prezzi osservati, ad esempio, in un certo numero di giornate consecutive, dopo di che, per passare alla varianza su base annua, basta moltiplicare quella stimata (giornaliera) per 365 o 366 (oppure per un altro numero, ad es. tra 250 e 255 se si considerano invece i giorni lavorativi). La volatilità storica è quindi la radice quadrata della varianza così stimata;
- volatilità implicita. Il prezzo delle opzioni è strettamente crescente rispetto al parametro σ. Ciò si può provare facilmente calcolandone la derivata rispetto a σ, anche se risulta del tutto intuitivo. Infatti, tanto più alto è σ, tanto maggiore è la probabilità che il prezzo faccia grandi movimenti sia verso l'alto che verso il basso (essendo la distribuzione del logaritmo del prezzo simmetrica). Ma siccome l'opzione può anche non essere esercitata, si può trarre beneficio dai movimenti del prezzo in direzione favorevole, restando comunque protetti contro quelli sfavorevoli. Quindi la funzione prezzo dell'opzione risulta invertibile rispetto a σ. Se sul mercato è già presente un'opzione con sottostante l'attività rischiosa, dal suo prezzo si può ricavare il parametro di volatilità σ invertendo numericamente tale funzione, ottenendo così la volatilità implicita, che può essere utilizzata per prezzare nuove opzioni sullo stesso sottostante che si vogliono immettere sul mercato.

La formula di Black e Scholes può essere aggiustata onde tener conto dei dividendi, basta sostituire ovunque nella formula $\bar{S}(t)$ al posto di $S(t)$ (anche in d_1 e d_2).

- Nel caso di dividendi certi, sostituendo $\bar{S}(t) = S(t) - D(t,T)$ si ottiene un valore approssimato delle opzioni.
- Nel caso di dividendi nel continuo con intensità q, sostituendo $\bar{S}(t) = S(t)\mathrm{e}^{-q(T-t)}$ si ottiene il valore esatto. In quest'ultimo caso, infatti, l'ipotesi di lognormalità alla base del modello è che

  $$\ln \bar{S}(\tau) \underset{t}{\sim} N\left(\ln \bar{S}(t) + (\mu - \sigma^2/2)(\tau - t), \sigma^2(\tau - t)\right), \quad \forall t, \tau : 0 \le t < \tau \le T,$$

  dove T è la scadenza dell'opzione per cui, in particolare, $\bar{S}(T) = S(T)$.

  Sotto $\mathbb{Q}$ si ha poi

  $$\ln \bar{S}(\tau) \underset{t}{\overset{\mathbb{Q}}{\sim}} N\left(\ln \bar{S}(t) + (r - \sigma^2/2)(\tau - t), \sigma^2(\tau - t)\right), \quad \forall t, \tau : 0 \le t < \tau \le T,$$

  per cui le due condizioni

  $\bar{S}(t) = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\bar{S}(\tau)\mathrm{e}^{-r(\tau-t)}\right]$ e $\dfrac{\bar{S}(t)}{B(t)} = \mathrm{E}_t^{\mathbb{Q}}\left[\dfrac{\bar{S}(\tau)}{B(\tau)}\right]$ valgono ora $\forall t, \tau : 0 \le t < \tau \le T$ e, in particolare, per $\tau = T$.

Processi di Wiener

Un processo stocastico a parametro continuo e traiettorie continue quasi certamente $\{W(t): t \geq 0\}$ si chiama processo di Wiener, o di moto browniano standard, se soddisfa le seguenti proprietà:

1) $W(0) = 0$ quasi certamente,

2) $\Delta W(t) \doteq W(t+\Delta t) - W(t) \sim N(0, \Delta t) \quad \forall t \geq 0, \Delta t > 0$

$$\Rightarrow \; W(t) = W(t) - W(0) \sim N(0,t) \quad \forall t > 0, \quad \mathrm{d}W(t) \sim N(0, \mathrm{d}t) \quad \forall t \geq 0,$$

3) si tratta di un processo a incrementi indipendenti, cioè $\forall n \in \mathbb{N}^+ - \{1\}$, $\forall t_1, t_2, ..., t_n$: $0 < t_1 < t_2 < ... < t_n$, le variabili aleatorie $W(t_1), W(t_2) - W(t_1), ..., W(t_n) - W(t_{n-1})$ sono stocasticamente indipendenti.

Processi di diffusione

Un processo stocastico a parametro continuo e traiettorie continue quasi certamente $\{X(t): t \geq 0\}$ si chiama processo di diffusione se soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\mathrm{d}X(t) = a\big(X(t), t\big)\mathrm{d}t + b\big(X(t), t\big)\mathrm{d}W(t),$$

dove a e b sono due funzioni continue in due variabili reali, $W(t)$ è un processo di Wiener, e $X(0)$ è dato.

La funzione a si chiama drift, o deriva del processo, mentre $|b|$ è la funzione di volatilità.

Il significato, dal punto di vista interpretativo, di $\mathrm{d}X(t)$ (e, analogamente, di $\mathrm{d}W(t)$), che si chiama anche differenziale stocastico del processo, è quello di variazione istantanea dello stesso, da t a "un istante dopo".

Si tratta di una variazione stocastica, non nota nemmeno in t, in quanto dipende dalla variazione stocastica di W, che in t si deve ancora osservare.

Siccome tale variazione dipende soltanto dal valore corrente del processo $X(t)$, e gli incrementi del processo di Wiener sono indipendenti, X è un processo markoviano.

La variazione $\mathrm{d}X(t)$ può essere scomposta in due parti:

- la variazione "attesa" $a\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t$
- la variazione "inattesa" (cioè il termine stocastico) $b\big(X(t),t\big)\mathrm{d}W(t)$.

Infatti se calcoliamo media e varianza condizionata di $\mathrm{d}X(t)$ otteniamo:

$$\mathrm{E}_t\big[\mathrm{d}X(t)\big] = \mathrm{E}_t\big[a(X(t),t)\mathrm{d}t\big] + \mathrm{E}_t\big[b(X(t),t)\mathrm{d}W(t)\big]$$

$$= a(X(t),t)\mathrm{d}t + b(X(t),t)\mathrm{E}_t\big[\mathrm{d}W(t)\big] = a(X(t),t)\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{var}_t\big[\mathrm{d}X(t)\big] = \mathrm{var}_t\big[a(X(t),t)\mathrm{d}t + b(X(t),t)\mathrm{d}W(t)\big]$$

$$= \mathrm{var}_t\big[b(X(t),t)\mathrm{d}W(t)\big] = b^2(X(t),t)\,\mathrm{var}_t\big[\mathrm{d}W(t)\big] = b^2(X(t),t)\mathrm{d}t.$$

Se pensiamo all'approssimazione discreta del modello otteniamo:

$$X(t+\Delta t) - X(t) \approx a\big(X(t),t\big)\Delta t + b\big(X(t),t\big)\Delta W(t)$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}_t\big[X(t+\Delta t) - X(t)\big] \approx a(X(t),t)\Delta t \qquad \Rightarrow \quad \mathrm{E}_t\big[X(t+\Delta t)\big] \approx X(t) + a(X(t),t)\Delta t,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{var}_t\big[X(t+\Delta t) - X(t)\big] \approx b^2(X(t),t)\Delta t \quad \Rightarrow \quad \mathrm{var}_t\big[X(t+\Delta t)\big] \approx b^2(X(t),t)\Delta t.$$

Processi di moto browniano geometrico

Un caso particolare di processo di diffusione è dato dal moto browniano geometrico. Questo processo si ottiene scegliendo opportunamente le funzioni a e b, e precisamente $a(x,t) = \mu x$ e $b(x,t) = \sigma x$, dove μ e σ sono due numeri reali tali che $\sigma > 0$.

Siccome questo processo viene spesso utilizzato per descrivere l'evoluzione stocastica del prezzo di un'attività rischiosa, ed è proprio quello adottato da Black e Scholes, lo indicheremo con l'usuale simbolo S, anziché X. Quindi si ha:

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t), \quad \text{con} \quad S(0) > 0.$$

Questo processo prende sempre valori strettamente positivi, e spesso si usa descrivere nel seguente modo:

$$\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)} = \mu \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}W(t), \text{ con } S(0) > 0,$$

il cui primo membro è quindi interpretabile come tasso istantaneo di rendimento (stocastico) dell'attività rischiosa

$$\Rightarrow \quad \mathrm{E}_t\left[\mathrm{d}S(t)\right] = \mu S(t)\mathrm{d}t \qquad\qquad \Rightarrow \quad \mathrm{E}_t\left[\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}\right] = \mu \mathrm{d}t,$$

$$\Rightarrow \quad \mathrm{var}_t\left[\mathrm{d}S(t)\right] = \sigma^2 S^2(t)\mathrm{d}t \qquad\qquad \Rightarrow \quad \mathrm{var}_t\left[\frac{\mathrm{d}S(t)}{S(t)}\right] = \sigma^2 \mathrm{d}t,$$

da cui emerge chiaramente il significato dei due parametri μ e σ, rispettivamente valore atteso e varianza, entrambi condizionati all'informazione disponibile, del rendimento istantaneo dell'attività rischiosa, per unità di tempo.

Lemma di Ito

Sia X un processo di diffusione descritto dalla seguente equazione differenziale stocastica:

$$\mathrm{d}X(t) = a\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t + b\big(X(t),t\big)\mathrm{d}W(t),$$

e Y un altro processo, “trasformato” di X attraverso la

$$Y(t) = f\big(X(t),t\big),$$

dove f è una funzione in due variabili reali derivabile con continuità almeno fino al secondo ordine.

$\Rightarrow$ Il processo Y soddisfa la seguente equazione differenziale stocastica:

$$\mathrm{d}Y(t) = \frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)\mathrm{d}X(t) + \frac{\partial f}{\partial y}\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(X(t),t\big)b^2\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t,$$

dove x e y indicano la prima e la seconda variabile della funzione f.

Osservazioni:

- Si tratta di una sorta di estensione al caso stocastico della formula di Taylor arrestata al secondo ordine.
- Se $X(t)$ rappresenta il prezzo al tempo t di un'attività rischiosa, $Y(t)$ potrebbe essere quello di un derivato sulla stessa attività con unico payoff finale non path-dependent. Che il payoff non sia path-dependent è evidente in quanto il prezzo del derivato si assume dipenda esclusivamente dal prezzo corrente del sottostante, e non anche dalla storia precedente. Che ci sia un unico payoff dipende dal fatto che la funzione f è assunta continua, in particolare rispetto a t, mentre, in caso di cash-flow intermedi ci si aspetterebbe un salto nel valore del derivato in corrispondenza alle date di pagamento dei cash-flow di ampiezza pari ai cash-flow stessi.
- Se nella formula che ci dà $\mathrm{d}Y(t)$ sostituiamo $\mathrm{d}X(t)$ e raccogliamo i termini che hanno in comune $\mathrm{d}t$ otteniamo:

$$\begin{aligned}\mathrm{d}Y(t) = &\left[\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)a\big(X(t),t\big)+\frac{\partial f}{\partial y}\big(X(t),t\big)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(X(t),t\big)b^2\big(X(t),t\big)\right]\mathrm{d}t \\ &+\left[\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)b\big(X(t),t\big)\right]\mathrm{d}W(t),\end{aligned}$$

da cui si vede che anche Y segue un processo di diffusione (in particolare se la funzione f risulta invertibile rispetto alla prima variabile cosicché si può esprimere $X(t)$ in funzione di $Y(t)$).

Esercizi di applicazione:

Sia S un processo di moto browniano geometrico descritto dalla seguente equazione:

$$\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t).$$

1) Consideriamo il processo $Y(t) = f(S(t),t) = \ln S(t)$.

Quindi $f(x,y) = \ln x$. Si ha allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{x}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -\frac{1}{x^2} .$$

$$\Rightarrow \ \mathrm{d}Y(t) = \mathrm{d}\ln S(t) = \frac{1}{S(t)}\mathrm{d}S(t) - \frac{1}{2S^2(t)}\sigma^2 S^2(t)\mathrm{d}t = \left(\mu - \sigma^2/2\right)\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}W(t).$$

$$\Rightarrow \ \ln S(T) - \ln S(t) = \int_t^T \mathrm{d}\ln S(v) = \int_t^T \left(\mu - \sigma^2/2\right)\mathrm{d}v + \int_t^T \sigma\mathrm{d}W(v)$$

$$= \left(\mu - \sigma^2/2\right)(T-t) + \sigma\left(W(T) - W(t)\right) \qquad \forall t, T : 0 \le t < T .$$

$$\Rightarrow \ \ln S(T) = \ln S(t) + \left(\mu - \sigma^2/2\right)(T-t) + \sigma\left(W(T) - W(t)\right) \qquad \forall t, T : 0 \le t < T .$$

In particolare: $\ln S(T) \underset{t}{\sim} N\left(\ln S(t) + (\mu - \sigma^2/2)(T-t), \sigma^2(T-t)\right) \ \ \forall t, T : 0 \le t < T .$

$\Rightarrow$ Si tratta dello stesso processo lognormale che abbiamo descritto in precedenza.

In conclusione: $S(T) = S(t)\mathrm{e}^{(\mu-\sigma^2/2)(T-t)+\sigma(W(T)-W(t))} \qquad \forall t, T : 0 \le t < T .$

2)Consideriamo il processo $Y(t) = f(S(t),t) = \dfrac{S(t)}{B(t)}$. Quindi $f(x,y) = x\mathrm{e}^{-ry}$. Si ha allora:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \mathrm{e}^{-ry}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -rx\mathrm{e}^{-ry}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0 .$$

$\Rightarrow$ $\mathrm{d}Y(t) = \mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}S(t) - rS(t)\mathrm{e}^{-rt}\mathrm{d}t = S(t)\mathrm{e}^{-rt}(\mu - r)\mathrm{d}t + S(t)\mathrm{e}^{-rt}\sigma\,\mathrm{d}W(t)$.

$\Rightarrow$ $\mathrm{d}Y(t) = (\mu - r)Y(t)\mathrm{d}t + \sigma Y(t)\mathrm{d}W(t) \qquad \Rightarrow \quad \dfrac{\mathrm{d}Y(t)}{Y(t)} = (\mu - r)\mathrm{d}t + \sigma\,\mathrm{d}W(t)$.

$\Rightarrow$ Anche il prezzo normalizzato (tramite il money market account) segue un processo di moto browniano geometrico con parametri $\mu - r$ e σ.

$\Rightarrow$ Se vogliamo che sia una <u>martingala</u> deve avere <u>drift nullo</u> $\Rightarrow$ $\mu = r$.

$\Rightarrow$ Sotto $\mathbb{Q}$, $\mathrm{d}S(t) = rS(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t) \;\Rightarrow\; \mathrm{d}Y(t) = \sigma Y(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t)$,

dove $W^{\mathbb{Q}}$ indica un processo di Wiener sotto $\mathbb{Q}$.

$\Rightarrow$ Essendo $\mathrm{d}S(t) = \mu S(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W(t) = rS(t)\mathrm{d}t + \sigma S(t)\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t)$, esplicitando $\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t)$ si ottiene $\mathrm{d}W^{\mathbb{Q}}(t) = \dfrac{\mu - r}{\sigma}\mathrm{d}t + \mathrm{d}W(t) \;\; \forall t \geq 0$, da cui, integrando da 0 a t,

$$W^{\mathbb{Q}}(t) = \frac{\mu - r}{\sigma}t + W(t) \;\; \forall t \geq 0.$$

$\Rightarrow$ La quantità $(\mu - r)/\sigma$ si chiama anche <u>prezzo di mercato del rischio</u>.

Portafoglio istantaneamente non rischioso

Torniamo alla formula di Ito per il generico processo X, che supponiamo rappresenti il prezzo di un'attività rischiosa, e quindi Y quello di un suo derivato. Portiamo il primo termine dal secondo al primo membro:

$$\mathrm{d}Y(t)+\left(-\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)\right)\mathrm{d}X(t)=\frac{\partial f}{\partial y}\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(X(t),t\big)b^2\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t\,.$$

Osserviamo che, subordinatamente all'informazione disponibile in t, nel secondo membro non c'è alcuna componente aleatoria in quanto sia la funzione f che le sue derivate sono funzioni reali di variabili reali, e vengono applicate ad $X(t)$ (noto in t) e t, e poi moltiplicate per il differenziale ordinario $\mathrm{d}t$. Quindi anche il primo membro, uguale al secondo, è <u>istantaneamente non rischioso</u>.

Il primo membro rappresenta la variazione istantanea di valore di un portafoglio costituito dal derivato e dalla quantità $-\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)$ di attività sottostante. Indicando con $H(t)$ il valore in t di questo portafoglio si ha quindi:

$$H(t)=Y(t)-\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)X(t),\quad \mathrm{d}H(t)=\frac{\partial f}{\partial y}\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(X(t),t\big)b^2\big(X(t),t\big)\mathrm{d}t\,.$$

<u>Osservazione</u>:

Il portafoglio è <u>solo istantaneamente</u> (cioè in t) <u>non rischioso</u>, nel senso che la sua variazione istantanea di valore è nota. Se passa il tempo, cioè cambia t, cambia anche $X(t)$ e quindi, in generale, cambia la derivata $\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)$. Per mantenerlo sempre non rischioso bisognerebbe ricalibrarlo continuamente, cioè istante per istante, in modo che la quantità di attività sottostante sia sempre pari a $-\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)$.

$\Rightarrow$ L'ipotesi di <u>assenza di opportunità di arbitraggio</u> impone che, nell'istante t, tale portafoglio renda quanto l'attività priva di rischio, cioè il money market account:

$$\mathrm{d}H(t) = rH(t)\mathrm{d}t\,.$$

Sostituendo $\mathrm{d}H(t)$ e $H(t)$ (e semplificando) si ottiene la seguente equazione:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\big(X(t),t\big) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\big(X(t),t\big)b^2\big(X(t),t\big) = rY(t) - r\frac{\partial f}{\partial x}\big(X(t),t\big)X(t)\,.$$

Poiché tale equazione deve essere soddisfatta per tutta la durata di vita del derivato, qualunque sia il prezzo corrente del sottostante (cioè $\forall t, X(t)$), ciò si traduce in un'equazione alle derivate parziali cui deve soddisfare la funzione f. Si ha quindi, portando tutto a primo membro e ricordando che $Y(t) = f\left(X(t), t\right)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} b^2 - rf + r\frac{\partial f}{\partial x}x = 0.$$

N.B. Si noti che la funzione a è "sparita", e quindi il prezzo f del derivato risulterà da essa indipendente.

In particolare, Black e Scholes assumono che $X(t)$ segua un processo di *moto browniano geometrico*:

$$\mathrm{d}X(t) = \mu X(t)\mathrm{d}t + \sigma X(t)\mathrm{d}W(t),$$

L'equazione precedente, sostituendo $b = \sigma x$, si particolarizza allora come segue:

Equazione di Black e Scholes

$$\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\sigma^2 x^2 - rf + r\frac{\partial f}{\partial x}x = 0$$

(in cui non compare il parametro μ).

$\Rightarrow$ Questa equazione è soddisfatta dal prezzo di tutti i derivati che verificano le ipotesi precedenti. Quindi non ci si può aspettare che essa ammetta un'unica soluzione. Per risolverla si devono pertanto imporre alcune condizioni al contorno, fra cui quella che definisce il valore (payoff) finale del derivato.

In particolare, nel caso delle opzioni call europee con scadenza T e prezzo di esercizio $K > 0$ tale condizione si traduce come segue:

$$f\left(x,T\right) = \max\left\{x - K, 0\right\}.$$

Per la soluzione si utilizzano inoltre le seguenti due condizioni al contorno:

- $f\left(0,y\right) = 0$,
  l'opzione call vale sempre 0 se l'attività sottostante ha valore nullo;
- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 1$,
  se il prezzo del sottostante è infinitamente grande prima della scadenza, lo sarà (quasi certamente) anche alla scadenza (basta pensare alla soluzione dell'equazione differenziale stocastica nel caso del processo di moto browniano geometrico) $\Rightarrow$ la call verrà esercitata $\Rightarrow$ essa vale quanto un contratto forward in posizione long: $f\left(x,y\right) \to x - K\mathrm{e}^{-r(T-y)} \;\Rightarrow\; \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) \to 1.$

Per risolvere l’equazione si fanno delle trasformazioni di variabili e ci si riconduce ad una nota equazione della fisica, l’equazione del calore. La sua soluzione, con le specifiche condizioni al contorno, fornisce appunto la formula di Black e Scholes.

Osservazione:

Black e Scholes si sono quindi posti il problema della neutralizzazione del rischio insito in un derivato e non quello della replicabilità dello stesso. Tuttavia, come abbiamo osservato nel modello binomiale monoperiodale, si tratta di due problemi fra loro speculari. Infatti, se si riesce ad ottenere un portafoglio privo di rischio (cioè a replicare l’attività non rischiosa) tramite il derivato e un certo quantitativo di attività rischiosa, ricalibrato istante per istante, allora si potrà replicare anche il payoff del derivato tramite una strategia dinamica autofinanziantesi costituita dalle due attività di base. La strategia partirà, ad esempio, in 0, con un quantitativo di attività sottostante pari a $\frac{\partial f}{\partial x}\left(X(0),0\right)$ e di money market account pari alla differenza tra il prezzo del derivato e il valore dell’attività sottostante detenuta in portafoglio, cioè $f(X(0),0)-\frac{\partial f}{\partial x}\left(X(0),0\right)X(0)$. Tale strategia andrà quindi ricalibrata, istante per istante, a costo nullo, in modo da avere sempre in portafoglio una quantità di attività rischiosa pari alla derivata parziale del prezzo del derivato rispetto al prezzo dell’attività sottostante $\frac{\partial f}{\partial x}\left(X(t),t\right)$.

⇒ Teoricamente, in questo modo si riesce a replicare il payoff del derivato. Se la ricalibratura del portafoglio viene fatta più raramente, anziché istante per istante, si commette un "errore di hedging" e il payoff finale della strategia (in generale) non coinciderà con quello del derivato.

⇒ Tuttavia nel mondo reale sono presenti i costi di transazione (e le tasse), per cui c'è un trade-off fra la frequenza del ribilanciamento, da cui dipende l'errore di hedging, e i costi stessi. Per questo motivo, per ridurre i costi di transazione rinunciando alla possibilità di replicare perfettamente il derivato si potrebbe, ad esempio, decidere di ricalibrare il portafoglio ad intervalli regolari, nel discreto, oppure quando la differenza tra la quantità teorica, e quella effettiva, di sottostante presente in portafoglio supera una certa soglia.

Delta-hedging

La derivate parziali del prezzo di un derivato rispetto alle variabili da cui esso dipende hanno un’enorme importanza nelle tecniche di *hedging*. Esse sono solitamente indicate con delle lettere greche. In particolare, la derivata parziale rispetto al prezzo dell’attività sottostante viene indicata con la lettera Delta.

Riepilogando quanto appena visto, se, accanto al derivato, si “detiene” una quantità (con segno) di sottostante pari all’opposto del Delta, il portafoglio così costruito risulta neutralizzato rispetto al rischio di variazioni nel prezzo del sottostante. Tuttavia tale neutralizzazione è (in generale) soltanto istantanea, perché lo stesso Delta (in generale) varia al variare del prezzo del sottostante e al passare del tempo.

Quindi, per mantenere il portafoglio continuamente non rischioso, bisognerebbe ricalibrarlo istante per istante modificando opportunamente la quantità di sottostante.

Questa tecnica di hedging, che va sotto il nome di *Delta-hedging*, si scontra naturalmente con la realtà, sia perché nel mondo reale le transazioni non avvengono in tempo continuo sia, e soprattutto, perché il mondo reale è affetto dalla presenza dei costi di transazione, che rendono proibitivi aggiustamenti troppo frequenti.

The Greeks – Derivate della formula di Black e Scholes

Come abbiamo appena visto, le derivate parziali del prezzo di un derivato rispetto alle variabili da cui esso dipende hanno un'enorme importanza nelle tecniche di *hedging* e sono solitamente indicate con delle lettere greche. Questo vale in generale anche per un portafoglio composto da derivati con le caratteristiche analizzate (cioè di stile europeo e con payoff non path-dependent) sulla medesima attività sottostante e dall'attività sottostante stessa. Se ad esempio indichiamo con $V(t)$ il valore al tempo t di un siffatto portafoglio e con $S(t)$ quello della sua attività sottostante, si danno le seguenti definizioni:

- Derivate del primo ordine:

$$\textbf{Delta} = \frac{\partial V(t)}{\partial S(t)}, \quad \textbf{Vega} = \frac{\partial V(t)}{\partial \sigma}, \quad \textbf{Theta} = \frac{\partial V(t)}{\partial t}, \quad \textbf{Rho} = \frac{\partial V(t)}{\partial r}.$$

Si noti che Vega non è una lettera greca, anche se per indicarla di solito si utilizza il simbolo ν "ingrandito".

Se l'attività sottostante è una valuta estera, ovvero un bene che paga dividendi nel continuo con intensità q, si definisce inoltre **Epsilon** (o **Psi**) $= \dfrac{\partial V(t)}{\partial q}$.

Infine, anche se non si tratta di una derivata, ma di un'elasticità (variazione percentuale del valore del portafoglio rispetto alla variazione percentuale della variabile di riferimento), si definisce **Lambda** (o **Omega**) $= \dfrac{\partial V(t)}{\partial S(t)} \Big/ \dfrac{V(t)}{S(t)}$.

- Derivate del secondo ordine:

$$\textbf{Gamma} = \frac{\partial^2 V(t)}{\partial S(t)^2}, \quad \textbf{Vanna} = \frac{\partial^2 V(t)}{\partial S(t)\partial \sigma}, \quad \textbf{Charm} = \frac{\partial^2 V(t)}{\partial S(t)\partial t}, \quad \textbf{Vomma} = \frac{\partial^2 V(t)}{\partial \sigma^2},$$

$$\textbf{Veta} = -\frac{\partial^2 V(t)}{\partial \sigma \partial t}, \quad \textbf{Vera} = \frac{\partial^2 V(t)}{\partial \sigma \partial r}.$$

- Derivate del terzo ordine:

$$\textbf{Speed} = \frac{\partial^3 V(t)}{\partial S(t)^3}, \quad \textbf{Zomma} = \frac{\partial^3 V(t)}{\partial S(t)^2 \partial \sigma}, \quad \textbf{Color} = -\frac{\partial^3 V(t)}{\partial S(t)^2 \partial t}, \quad \textbf{Ultima} = \frac{\partial^3 V(t)}{\partial \sigma^3}.$$

A parte Gamma, le derivate parziali del secondo e terzo ordine non sono indicate con lettere greche.

Vediamo adesso di calcolare le derivate parziali del prezzo delle opzioni europee nel modello di Black e Scholes allo scopo di cogliere la sensitività dei prezzi nei confronti dei vari parametri da cui essi dipendono, ovvero $S(t), K, r, \sigma, t, T$.

Per comodità riscriviamo la formula di Black e Scholes:

$$c(t) = S(t)\Phi(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2)\,, \qquad p(t) = c(t) - S(t) + K\mathrm{e}^{-r(T-t)},$$

con $$d_1 = \frac{\ln\left(S(t)/K\right) + (r + \sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}} \qquad \text{e} \qquad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\,.$$

Osserviamo preliminarmente che $S(t)\Phi'(d_1) = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)$. Infatti:

$$\Phi'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}d_2^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\left(d_1 - \sigma\sqrt{T-t}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}d_1^2 + d_1\sigma\sqrt{T-t} - \frac{1}{2}\sigma^2(T-t)}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}d_1^2}\mathrm{e}^{\ln\left(S(t)/K\right) + r(T-t)} = \Phi'(d_1)\frac{S(t)}{K\mathrm{e}^{-r(T-t)}}\,.$$

$$\textbf{Delta(call)} = \frac{\partial c(t)}{\partial S(t)} = \Phi(d_1) + S(t)\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S(t)} - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S(t)}.$$

Poiché $\dfrac{\partial d_1}{\partial S(t)} = \dfrac{\partial d_2}{\partial S(t)}$,

$$\Rightarrow \qquad \textbf{Delta(call)} = \Phi(d_1) + \frac{\partial d_1}{\partial S(t)}\left[S(t)\Phi'(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right] = \Phi(d_1) > 0.$$

$\Rightarrow$ Com'è del tutto intuitivo, il prezzo della call è <u>strettamente crescente</u> con $S(t)$.

$$\textbf{Delta(put)} = \frac{\partial p(t)}{\partial S(t)} = \frac{\partial c(t)}{\partial S(t)} - 1 = \Phi(d_1) - 1 = -\left[1 - \Phi(d_1)\right] = -\Phi(-d_1) < 0.$$

$\Rightarrow$ Com'è del tutto intuitivo, il prezzo della put è <u>strettamente decrescente</u> con $S(t)$.

Anche se non è una greca, calcoliamo ora:

$$\frac{\partial c(t)}{\partial K} = S(t)\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial K} - \mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial K}.$$

Siccome $\frac{\partial d_1}{\partial K} = \frac{\partial d_2}{\partial K}$,

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial c(t)}{\partial K} = \frac{\partial d_1}{\partial K}\left[S(t)\Phi'(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right] - \mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) = -\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) < 0.$$

$\Rightarrow$ Il prezzo della call è <u>strettamente decrescente</u> con K (già avevamo stabilito la monotonia debole, per assenza di arbitraggio).

$$\frac{\partial p(t)}{\partial K} = \frac{\partial c(t)}{\partial K} + \mathrm{e}^{-r(T-t)} = -\,\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \mathrm{e}^{-r(T-t)} = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\left[1 - \Phi(d_2)\right] = \mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(-d_2) > 0$$

$\Rightarrow$ Il prezzo della put è <u>strettamente crescente</u> con K (già avevamo stabilito la monotonia debole, per assenza di arbitraggio).

Rho(call) $= \dfrac{\partial c(t)}{\partial r} = S(t)\Phi'(d_1)\dfrac{\partial d_1}{\partial r} + K\mathrm{e}^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(d_2) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\dfrac{\partial d_2}{\partial r}$.

Poiché $\dfrac{\partial d_1}{\partial r} = \dfrac{\partial d_2}{\partial r}$,

$\Rightarrow$ **Rho(call)** $= \dfrac{\partial d_1}{\partial r}\left[S(t)\Phi'(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right] + K\mathrm{e}^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(d_2)$

$$= K\mathrm{e}^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(d_2) > 0.$$

$\Rightarrow$ Il prezzo della call è <u>strettamente crescente</u> con r. Pensando alla relazione che ci dà il prezzo della call come speranza matematica, sotto $\mathbb{Q}$, del payoff finale attualizzato col tasso r, questo non è intuitivo perché ci sono due effetti contrapposti. Infatti, se aumenta r:

1) diminuisce il fattore di attualizzazione, e quindi il risultato finale è spinto verso il basso;
2) aumenta il drift del processo S, e quindi il risultato finale è spinto verso l'alto.

$\Rightarrow$ Il risultato finale ci dice che prevale il secondo effetto.

Rho(put) $= \dfrac{\partial p(t)}{\partial r} = \dfrac{\partial c(t)}{\partial r} - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}(T-t) = -K\mathrm{e}^{-r(T-t)}(T-t)\Phi(-d_2) < 0$.

$\Rightarrow$ Com'è del intuitivo, il prezzo della put è <u>strettamente decrescente</u> con r, e stavolta i due effetti, sul drift e sul fattore di attualizzazione, agiscono nella stessa direzione.

$$\textbf{Vega(call)} = \frac{\partial c(t)}{\partial \sigma} = S(t)\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial \sigma} - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial \sigma}.$$

Poiché $\dfrac{\partial d_2}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial d_1}{\partial \sigma} - \sqrt{T-t}$,

$$\Rightarrow \qquad \textbf{Vega(call)} = \frac{\partial d_1}{\partial \sigma}\left[S(t)\Phi'(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right] + K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\sqrt{T-t}$$

$$= K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\sqrt{T-t} > 0.$$

$$\textbf{Vega(put)} = \textbf{Vega(call)} = K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\sqrt{T-t} > 0.$$

$\Rightarrow$ Come già avevamo anticipato, e interpretato, il prezzo delle opzioni europee è strettamente crescente con σ.

Si noti che, sfruttando la relazione vista prima, questa derivata può anche essere espressa come $\textbf{Vega(put)} = \textbf{Vega(call)} = S(t)\Phi'(d_1)\sqrt{T-t}$.

Nel modello di Black e Scholes sia r che σ si assumono deterministici e costanti. Nella realtà non è così, perché sia il tasso che la volatilità cambiano nel tempo, in maniera stocastica. Per questo anche **Rho** e **Vega** sono importanti, pur non intervenendo nell'equazione di Black e Scholes, in quanto indicano cosa può capitare se il tasso o, rispettivamente, la volatilità, cambiano improvvisamente mentre tutto il resto rimane invariato.

$$\frac{\partial c(t)}{\partial (T-t)} = S(t)\Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial (T-t)} + rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial (T-t)}.$$

Siccome $\dfrac{\partial d_2}{\partial (T-t)} = \dfrac{\partial d_1}{\partial (T-t)} - \dfrac{\sigma}{2\sqrt{T-t}}$,

$$\Rightarrow \frac{\partial c(t)}{\partial (T-t)} = \frac{\partial d_1}{\partial (T-t)}\left[S(t)\Phi'(d_1) - K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)\right] + rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \frac{\sigma K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}}$$

$$= rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \frac{\sigma K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} > 0.$$

$$\Rightarrow \frac{\partial c(t)}{\partial T} = \frac{\partial c(t)}{\partial (T-t)} = rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \frac{\sigma K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} > 0$$

$\Rightarrow$ Il prezzo della call è <u>strettamente crescente</u> con la scadenza T o, equivalentemente, con il *time-to-maturity* $T-t$ (già avevamo stabilito la monotonia debole, per assenza di arbitraggio, quando il sottostante non paga dividendi).

$\Rightarrow$ **Theta(call)** $= \dfrac{\partial c(t)}{\partial t} = -\dfrac{\partial c(t)}{\partial (T-t)} = -rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - \dfrac{\sigma K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} < 0.$

$\Rightarrow$ Il prezzo della call è <u>strettamente decrescente</u> con l'istante di valutazione (*time decay*).

Si noti che, sfruttando la relazione vista prima, in alternativa si può anche scrivere

$$\textbf{Theta(call)} = -rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) - \frac{\sigma S(t)\Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}}.$$

$$\frac{\partial p(t)}{\partial(T-t)} = \frac{\partial c(t)}{\partial(T-t)} - rK\mathrm{e}^{-r(T-t)} = rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(d_2) + \frac{\sigma K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} - rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}$$

$$= \frac{\sigma K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} - rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(-d_2).$$

$$\Rightarrow \frac{\partial p(t)}{\partial T} = \frac{\partial p(t)}{\partial(T-t)} = \frac{\sigma K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} - rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(-d_2).$$

$$\Rightarrow \textbf{Theta(put)} = \frac{\partial p(t)}{\partial t} = -\frac{\partial p(t)}{\partial(T-t)} = -\frac{\sigma K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{2\sqrt{T-t}} + rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(-d_2).$$

$\Rightarrow$ <u>Non</u> è <u>definito</u> il <u>segno della derivata</u> del prezzo della <u>put</u> europea rispetto alla scadenza o all’istante di valutazione.

Si noti che, sfruttando la relazione vista prima, in alternativa si può anche scrivere

$$\textbf{Theta(put)} = -\frac{\sigma S(t)\Phi'(d_1)}{2\sqrt{T-t}} + rK\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi(-d_2).$$

$$\textbf{Gamma(call)} = \frac{\partial^2 c(t)}{\partial S(t)^2} = \Phi'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S(t)} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S(t)\sqrt{T-t}} > 0.$$

$$\textbf{Gamma(put)} = \frac{\partial^2 p(t)}{\partial S(t)^2} = \Phi'(-d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S(t)} = \frac{\Phi'(d_1)}{\sigma S(t)\sqrt{T-t}} = \textbf{Gamma(call)}.$$

$\Rightarrow$ I prezzi delle opzioni sono <u>strettamente convessi</u> rispetto al prezzo del sottostante.

Si noti che, sfruttando la relazione vista prima, questa derivata può anche essere espressa come

$$\textbf{Gamma(put)} = \textbf{Gamma(call)} = \frac{K\mathrm{e}^{-r(T-t)}\Phi'(d_2)}{\sigma S^2(t)\sqrt{T-t}}.$$

Gamma è molto importante, sia perché interviene direttamente nell'equazione di Black e Scholes, ma anche perché è la <u>derivata</u> di **Delta** che, come visto, è il "protagonista" della strategia di Delta-hedging. Infatti un Gamma "piccolo" (in valore assoluto) indica che il Delta non è troppo sensibile a variazioni improvvise del prezzo dell'attività sottostante, e che quindi la necessità di ricalibratura del portafoglio neutralizzato rispetto al rischio (o, rispettivamente, del portafoglio replicante il derivato) è ridotta, con conseguente risparmio nei costi di transazione.

Conclusioni

Come già accennato, la formula di Black e Scholes è tuttora utilizzata dagli operatori per prezzare le opzioni in quanto è estremamente semplice e fornisce dei risultati in tempo reale. Tuttavia questo semplice modello non è esente da critiche, in quanto non tiene conto di molte caratteristiche empiriche dei prezzi e dei tassi. In particolare:

- I tassi istantanei si assumono deterministici e costanti, mentre modelli con tassi stocastici sarebbero più appropriati per cogliere le caratteristiche del mercato.
- Lo stesso discorso vale per il parametro di volatilità, che cambia nel tempo in maniera aleatoria. Modelli con volatilità stocastica sono quindi preferibili.
- Le traiettorie del moto browniano geometrico sono continue (quasi certamente), mentre i prezzi delle azioni fanno anche dei salti, più o meno piccoli/frequenti. Processi di diffusione con salti possono quindi aiutare a catturare queste caratteristiche.
- I rendimenti istantanei dell'attività rischiosa hanno distribuzione normale, sono quindi simmetrici. Empiricamente, invece, i rendimenti dei titoli rischiosi presentano delle asimmetrie, delle code più pesanti rispetto alla normale e spesso dei picchi molto elevati intorno allo zero.

Un ragionevole compromesso tra flessibilità e trattabilità è rappresentato ad esempio dalla classe dei processi di Lévy (di cui fa parte anche il moto browniano geometrico), che consentono di cogliere molte caratteristiche empiriche della distribuzione dei rendimenti dei titoli rischiosi.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI

- Black, F. e M. Scholes (1973): "The Pricing of Options and Corporate Liabilities", *Journal of Political Economy* 81(3): 637-54.
- Cox, J.C., Ross, S.A. e M. Rubinstein (1979): "Option Pricing: A Simplified Approach", *Journal of Financial Economics* 7: 229-63.
- Cox, J.C. e M. Rubinstein (1985): *Options Markets*, Prentice Hall.
- Geske, R. (1979): "The Valuation of Compound Options", *Journal of Financial Economics* 7: 63-81.
- Harrison, M.J. e D. Kreps (1979): "Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *Journal of Economic Theory* 20: 381-408.
- Harrison, M.J. e S.R. Pliska (1981): "Martingales and Stochastic Integrals in the Theory of Continuous Trading", *Stochastic Processes and Their Applications* 11: 215-260.
- Hull, J.C. (2018): *Opzioni, Futures e Altri Derivati*, Pearson.

- Johnson, H. (1987): “Options on the Maximum or the Minimum of Several Assets”, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* 22(3): 277-283.
- Margrabe, W. (1978): “The Value of an Option to Exchange One Asset for Another”, *Journal of Finance* 33(1): 177-186.
- Merton, R.C (1973): “Theory of Rational Option Pricing”, *Bell Journal of Economics and Management Science* 4: 141-83.